EXAMEN DE SISTEMAS ELECTRÓNICOS DE CONTROL

(1ª Parte) Septiembre 2001

Problema 2

Sea el sistema discreto representado por las siguientes ecuaciones:

$$x[(k+1)T] = Gx(kT) + Hu(kT)$$
$$y(kT) = Cx(kT)$$

donde

$$T = 0.1s \qquad G = \begin{bmatrix} 0.75 & -1.75 & 0.25 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2.25 & -8.75 & 5.25 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0.25 & -0.5 & -0.25 \end{bmatrix}$$

Considerando que sólo es conocida la salida y la entrada del sistema, diseñar un control por realimentación del estado de forma que el sistema, ante entrada en escalón unitario, sea críticamente amortiguado y su tiempo de establecimiento sea aproximadamente 0.4 segundos. Los polos restantes se situará en el origen.

Además no debe existir error en régimen permanente ante una entrada en escalón unitario (la salida debe seguir a la entrada en régimen permanente ante cualquier perturbación), por lo que debe incorporar un regulador integral.

Dibujar el diagrama de bloques del conjunto indicando flujos monovariables (trazo simple) o multivariables (trazo doble) según proceda.

Explicar, de forma concisa, el efecto del observador sobre la dinámica del sistema realimentado

Solución

1. Análisis del Sistema:

En primer lugar se debe comprobar que el sistema no cumple las especificaciones dinámicas impuestas.

Polos deseados:

Tiempo de establecimiento ≈ 0.4 seg

$$t_s \approx \frac{4.73}{\sigma} \rightarrow \sigma \approx 11{,}82 \rightarrow \sigma = 12$$

Respuesta críticamente amortiguada

$$z = 1 \rightarrow w_d = 0$$

Por tanto los polos del sistema se encuentran en:

$$s_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d = -12$$

A continuación se deben obtener los polos en el plano discreto:

$$z_{1,2} = e^{s_{1,2}T} = e^{-12 \cdot 0.1} = 0.3$$

El tercer polo se situará en z = 0.

$$\phi(z) = z \cdot (z - 0.3)^2 = z^3 - 0.6z^3 + 0.09\,z$$

Cálculo de los polos del sistema actual:

$$\det(zI - G) = \begin{vmatrix} z - 0.75 & 1.75 & -0.25 \\ 1 & z + 3 & -2 \\ 2.25 & 8.75 & z - 5.25 \end{vmatrix} = z^3 - 3\,z^2 + 2.25\,z - 0.5 = (z-2)(z-0.5)^2$$

El sistema tiene dos polos en z = 0.5 y otro polo en z = 2.

Como puede comprobarse no se cumplen las especificaciones de diseño ya que el sistema tiene un polo inestable (fuera del círculo unidad). Por lo tanto será necesario diseñar un control por realimentación del estado para fijar los polos en la ubicación deseada.

Análisis de Controlabilidad:

Para poder implantar un control por realimentación del estado, el sistema debe ser controlable. Si el sistema no fuera controlable, su comportamiento sería independiente de la entrada, por lo que no sería modificable a pesar de realizar una realimentación del estado sobre ella.

Como es conocido, para saber si un sistema lineal e invariante en el tiempo es controlable, únicamente hay que comprobar que el rango de la matriz de controlabilidad *Q* coincida con el orden del sistema:

$$Q = \begin{bmatrix} H & GH & G^2H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0.25 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & -4.75 \end{bmatrix} \rightarrow rango = 3 \rightarrow Sistema\ controlable$$

$$cond(Q) \approx 53$$

Por tanto el sistema es controlable estando la matriz Q bien condicionada.

Análisis de Observabilidad:

Puesto que sólo es conocida la salida y la entrada al sistema, no es posible realimentar las variables de estado directamente, por lo que será necesario diseñar un observador del estado para estimar su valor. Para poder estimar las variables de estado el sistema debe ser observable. Para saber si un sistema lineal e invariante en el tiempo es observable, hay que comprobar que el rango de la matriz de observabilidad *P* coincida con el orden del sistema:

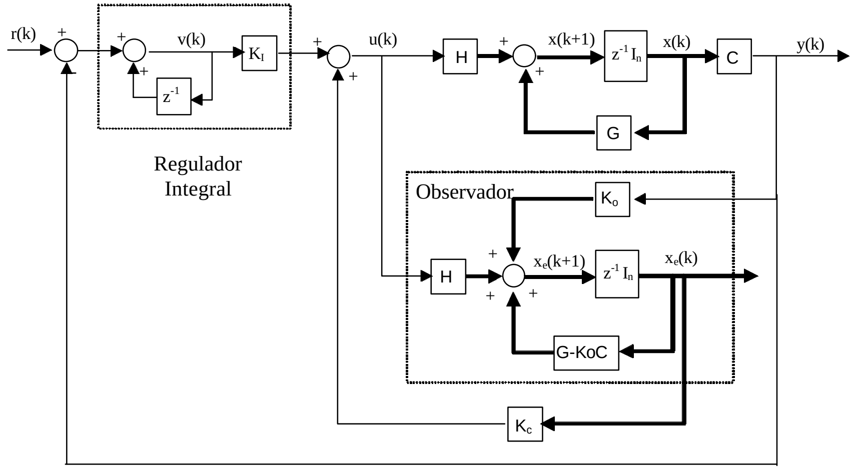
$$P = \begin{bmatrix} C \\ CG \\ CG^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 & -0.5 & -0.25 \\ 1.25 & 3.25 & -2.25 \\ 2.75 & 7.75 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow rango = 3 \rightarrow Sistema\ observable$$

$$cond(P) \approx 835$$

Por tanto el sistema es observable aunque la matriz P no está muy bien condicionada. En todo caso ya que el observador es un algoritmo que se ejecuta en un computador los efectos de saturación que suele provocar la mala condición no son determinantes como en el caso del sistema de control.

Esquema de control

El esquema de control por realimentación del estado con el observador para estimar el valor de las variables de estado es el siguiente (en trazo fino se muestran los flujos monovariables y en trazo grueso los flujos multivariables):



2. Diseño del observador

El diseño del observador es independiente del sistema de control al ser el error de estimación no controlable, no siendo afectado por la realimentación del estado o la salida.

Para diseñar el observador se va a calcular la matriz de transformación a forma canónica observable:

$$x(k) = T_o \tilde{x}_o(k)$$

Esta matriz se calcula a partir de la matriz de observabilidad:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 15.2 & -56.8 & 24.8 \\ 0.8 & -7.2 & 13.2 \\ 9.6 & -42.4 & 18.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix}$$

$$T_o = \begin{bmatrix} e_3 & Ge_3 & G^2e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24.8 & 17.6 & 12.2 \\ 3.2 & 2.4 & 0.8 \\ 18.4 & 12.8 & 6.6 \end{bmatrix} \rightarrow T_o^{-1} = \begin{bmatrix} -0.4375 & -3.125 & 1.1875 \\ 0.5 & 4.75 & -1.5 \\ 0.25 & -0.5 & -0.25 \end{bmatrix}$$

Se realiza la transformación a forma canónica observable:

Campus de Elche. Avda. del Ferrocarril s/n – 03202 ELCHE

$$\tilde{G} = T_o^{-1} G T_o \quad \tilde{H} = T_o^{-1} H \quad \tilde{C} = C T_o$$

Obteniéndose las siguientes matrices:

$$\tilde{G}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & -2.25 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \tilde{H}_o = \begin{bmatrix} -0.75 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \tilde{C}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como puede observarse la transformación es correcta. Corresponde a un sistema con función de transferencia:

$$G(z) = \frac{z - 0.75}{z^3 - 3z^2 + 2.25z - 0.5}$$

A continuación se va a calcular K_o situando los polos del observador de forma que no afecten a la dinámica del sistema. Por tanto se situarán los tres polos en z = 0. De modo que el polinomio característico deseado en el observador será:

$$\phi(z) = z^3$$

$\tilde{K}_o$ se calcula del siguiente modo:

$$\tilde{G}_o - \tilde{K}_o \tilde{C}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 - \tilde{k}_{o1} \\ 1 & 0 & -2.25 - \tilde{k}_{o2} \\ 0 & 1 & 3 - \tilde{k}_{o3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

De aquí se deduce:

$$\tilde{K}_o = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{o1} \\ \tilde{k}_{o2} \\ \tilde{k}_{o3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 - a_o \\ \alpha_1 - a_1 \\ \alpha_2 - a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -2.25 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la matriz K_o es:

$$\boxed{K_o = T_o \tilde{K}_o = \begin{bmatrix} 9.4 \\ -1.4 \\ 0.2 \end{bmatrix}}$$

3. Diseño del sistema de control:

Ya que el sistema de control incluye la realimentación del estado junto a un regulador integral, debemos realizar el diseño conjunto de las ganancias ***K_c y K_I***. Para ello plantearemos el modelo del **sistema ampliado** con regulador integral.

Para la solución, utilizaremos la representación del sistema ampliado mediante un sistema realimentado equivalente:

$$\xi(k+1) = \hat{G}\,\xi(k) + \hat{H}\,\omega(k)$$
$$\omega(k) = -\hat{K}\,\xi(k)$$

Donde:

$$\xi(k) = \begin{bmatrix} x(k) - x(\infty) \\ p(k) - p(\infty) \end{bmatrix} \qquad p(k) = v(k-1)$$

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} G & 0_m \\ -C & I_m \end{bmatrix} \quad \hat{H} = \begin{bmatrix} H \\ 0_m \end{bmatrix} \quad \hat{K} = \begin{bmatrix} (K_c + K_I C) & | & -K_I \end{bmatrix}$$

Las matrices del sistema ampliado quedarían:

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} G & 0_m \\ -C & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 & -1.75 & 0.25 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \\ -2.25 & -8.75 & 5.25 & 0 \\ -0.25 & 0.5 & 0.25 & 1 \end{bmatrix} \qquad \hat{H} = \begin{bmatrix} H \\ 0_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para diseñar la matriz de realimentación del estado $\hat{K}$ se va a calcular la matriz de transformación a forma canónica controlable:

$$\xi(k) = T_c \tilde{\xi}_c(k)$$

Esta matriz se calcula a partir de la matriz de controlabilidad:

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} \hat{H} & \hat{G}\hat{H} & \hat{G}^2\hat{H} & \hat{G}^3\hat{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0.25 & 2.5 \\ 0 & -1 & -2 & -3.75 \\ -1 & -3 & -4.75 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -3.25 \end{bmatrix}$$

$$\hat{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 3.25 & 9.5 & -4.25 & 2 \\ -11 & -23 & 11 & -9 \\ 13 & 26 & -13 & 12 \\ -4 & -8 & 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ e_3^T \\ e_4^T \end{bmatrix}$$

$$T_c^{-1} = \begin{bmatrix} e_4^T \\ e_3^T G \\ e_3^T G^2 \\ e_3^T G^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -8 & 4 & -4 \\ -3 & -6 & 3 & -4 \\ -2 & -5 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \qquad T_c = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ 0.75 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se realiza la transformación a forma canónica controlable:

$$\tilde{\hat{G}} = T_c^{-1} \hat{G} T_c \qquad \tilde{\hat{H}} = T_c^{-1} \hat{H}$$

Obteniéndose las siguientes matrices:

$$\tilde{\hat{G}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & 2.75 & -5.25 & 4 \end{bmatrix} \qquad \tilde{\hat{H}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como puede observarse la transformación es correcta, siendo el polinomio característico del sistema ampliado:

$$\hat{p}(z) = z^4 - 4\,z^3 + 5.25\,z^2 - 2.75\,z + 0.5 = (z-1)(z-2)(z-0.5)^2$$

Se va a diseñar la matriz $\tilde{\hat{K}}$ de forma que se coloquen los polos del sistema según las especificaciones dadas. Recordemos que se desea que los polos se localicen en:

$$z_{1,2} = 0.3$$
$$z_{3,4} = 0$$

Por tanto el polinomio buscado es:

$$\phi(z) = z^2 \cdot \left(z^2 - 0.6z + 0.09\right) = z^4 - 0.6z^3 + 0.09\,z^2$$

$\tilde{\hat{K}}$ se calcula de la siguiente manera:

$$\tilde{\hat{G}} - \tilde{\hat{H}}\,\tilde{\hat{K}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.5-\tilde{k}_1 & 2.75-\tilde{k}_2 & -5.25-\tilde{k}_3 & 4-\tilde{k}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.09 & 0.6 \end{bmatrix}$$

De aquí se deduce:

$$\tilde{\hat{K}} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & \tilde{k}_2 & \tilde{k}_3 & \tilde{k}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 - a_o & \alpha_1 - a_1 & \alpha_2 - a_2 & \alpha_3 - a_3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\tilde{\hat{K}} = \begin{bmatrix} -0.5 & 2.75 & -5.1 & 3.4 \end{bmatrix}}$$

Por lo tanto la matriz $\hat{K}$ es:

$$\hat{K} = \tilde{\hat{K}}\,T_c^{-1} = \begin{bmatrix} 4.07 & 9.9 & -7.47 & -1.96 \end{bmatrix}$$

4. <u>Cálculo de *las ganancias* K_c *y* K_I:</u>

Aplicamos la ecuación:

$$\hat{K} = \left[(K_c + K_I\,C) \;\middle|\; -K_I \right] = \begin{bmatrix} 4.07 & 9.9 & -7.47 & -1.96 \end{bmatrix}$$
$$K_I = 1.96$$
$$K_c + K_I\,C = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.49 & -0.48 & -0.49 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.07 & 9.9 & -7.47 \end{bmatrix}$$

Despejando tenemos:

$$\boxed{\begin{aligned} K_I &= 1.96 \\ K_c &= \begin{bmatrix} 3.58 & 10.88 & -6.98 \end{bmatrix} \end{aligned}}$$

5. <u>Efecto del observador sobre la dinámica del sistema realimentado:</u>

La ecuación del sistema realimentado con observador corresponde a:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ p(k+1) \\ e(k+1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} G - HK_c - HK_I C & HK_I & -HK_c \\ -C & I_m & 0 \\ \hline 0 & 0 & G - K_o C \end{array} \right] \begin{bmatrix} x(k) \\ p(k) \\ e(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} HK_I \\ I_m \\ 0 \end{bmatrix} r(k)$$

El efecto de la realimentación del estado observado tiene dos aspectos:

a) El efecto del término ***–HKc e(k)*** que tiende a cero rápidamente al anularse el error de estimación ***e(k)***. Ya que el observador es de orden 3 con todos los polos en el origen tardará 3 muestras en anularse su efecto.

b) Los polos del observador se añaden al sistema realimentado por lo que éste se comportará con un retardo de tres muestras. Este efecto de retardo puede compensarse con los ceros del sistema.