3º INGENIERÍA TELECOMUNICACIÓN
2º ITT SISTEMAS ELECTRÓNICOS
2º ITT SISTEMAS DE TELECOMUNICACIÓN

AUTÓMATAS Y SISTEMAS DE CONTROL

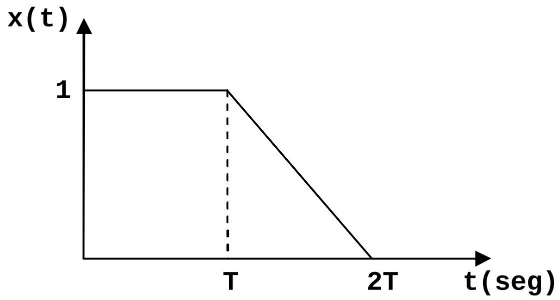
# PROBLEMAS DE SISTEMAS

## PARTE 1:

- **MODELADO DE SISTEMAS CONTINUOS**
- **ANÁLISIS DE SISTEMAS CONTINUOS**

## PROBLEMA 1

Calcular la transformada de Laplace X(s) de la siguiente señal x(t):




$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \le t < T \\ 2 - t/T & T \le t < 2T \\ 0 & t \ge 2T \end{cases}$$

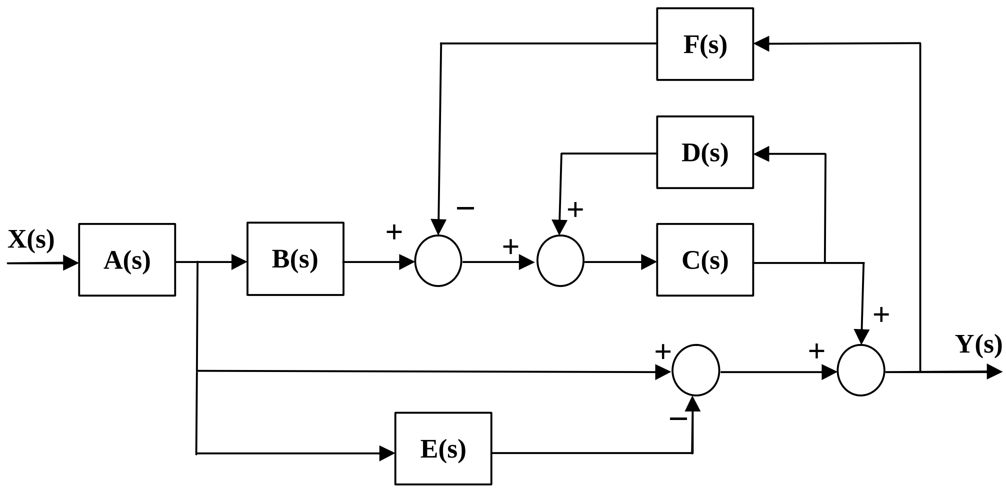
Nota: obtener tanto por aplicación de la fórmula de la transformada como por descomposición de la señal en escalones y rampas y comprobar que los resultados coinciden

***SOLUCIÓN***

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{Ts^2} \cdot e^{-Ts} + \frac{1}{Ts^2} \cdot e^{-2Ts}$$

## PROBLEMA 2

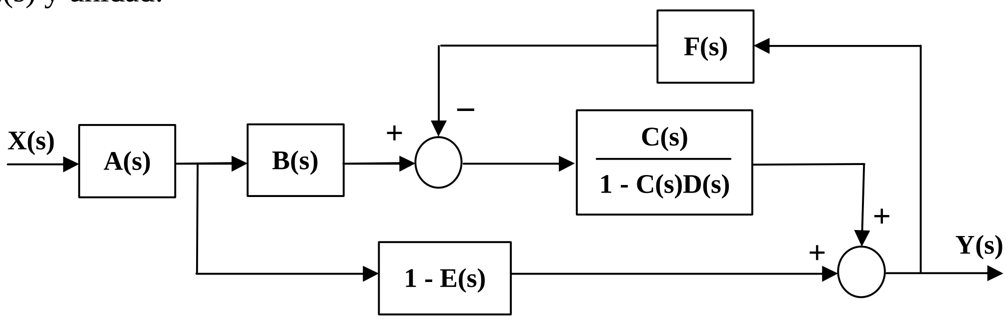
Simplificar el diagrama de bloques y obtener la función de transferencia Y(s)/X(s):



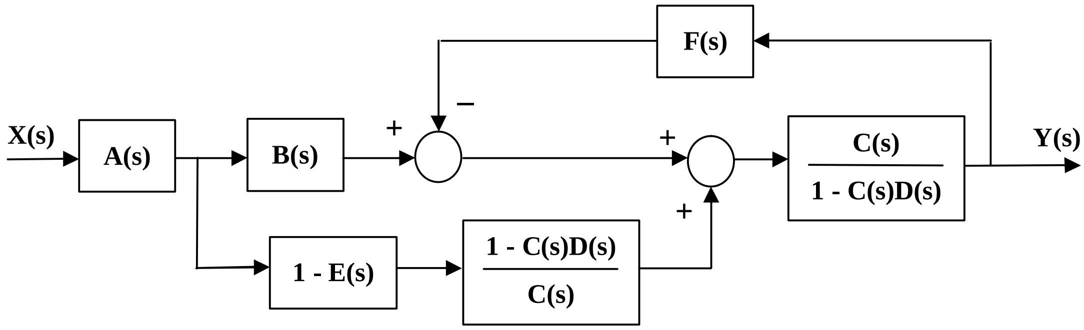

***SOLUCIÓN***

Se resolverá el problema paso por paso:

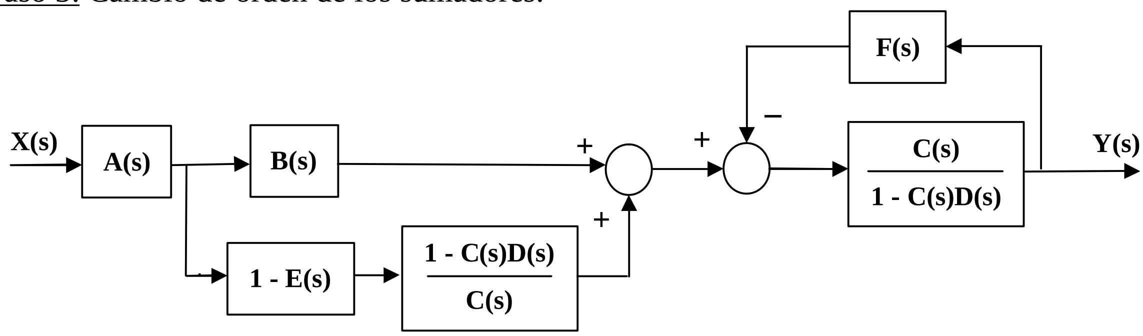
<u>Paso 1:</u> Reducción realimentación bloques C(s) y D(s) y reducción paralelo bloques E(s) y unidad:



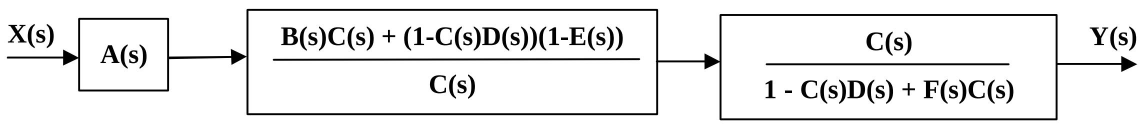

<u>Paso 2:</u> Eliminación bloque C/(1-CD) para conseguir tener los dos sumadores contiguos; será necesario hacer que esta eliminación no tenga efecto sobre el resto del diagrama añadiendo los bloques necesarios:



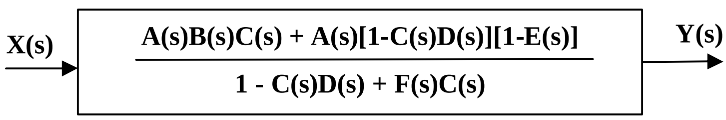

<u>Paso 3:</u> Cambio de orden de los sumadores:




<u>Paso 4:</u> Reducción de la realimentación y de los bloques serie y en paralelo:




Paso 5: Reducción bloques en serie: se obtiene la función de transferencia pedida:



## PROBLEMA 3

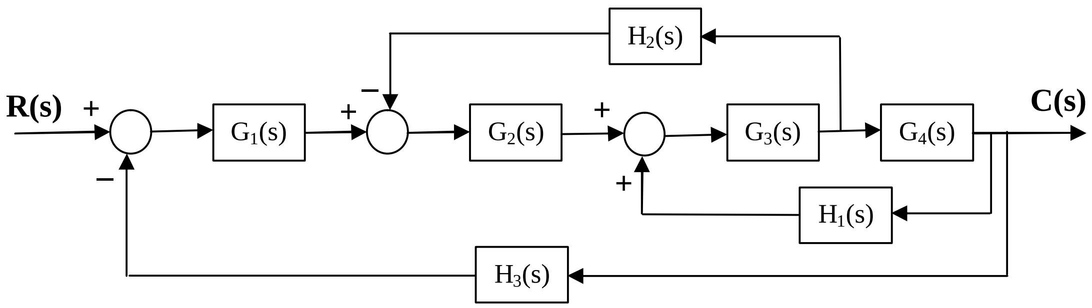
Representar en un diagrama de bloques las ecuaciones expresadas en el dominio de Laplace propuestas y reducir el diagrama de bloques hasta obtener la función de transferencia M(s) que relaciona la entrada R(s) con la salida C(s): M(s) = C(s)/R(s).

Ecuaciones:
$E(s) = R(s) - C(s)H_3(s)$
$U_1(s) = E(s)G_1(s)$
$U_3(s) = [U_1(s) - U_2(s)]G_2(s)$
$U_2(s) = U_4(s)H_2(s)$
$U_4(s) = [U_3(s) + U_5(s)]G_3(s)$
$C(s) = U_4(s)G_4(s)$
$U_5(s) = C(s)H_1(s)$

Nota: E(s), R(s), C(s) y U(s) son señales.
$G_i(s)$ y $H_i(s)$ son funciones de transferencia

## ***SOLUCIÓN***

Diagrama de bloques:

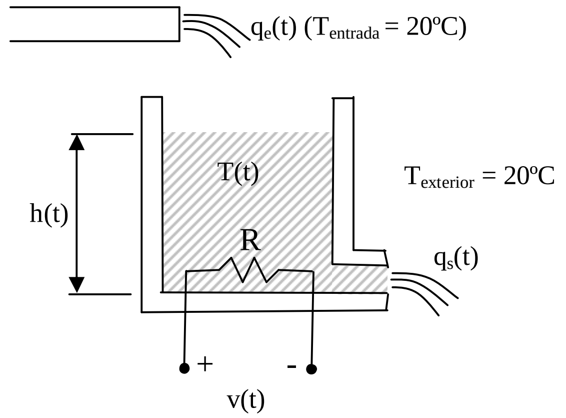



Función de transferencia:

$$M(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}{1 - G_3(s)G_4(s)H_1(s) + G_2(s)G_3(s)H_2(s) + G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)H_3(s)}$$

## PROBLEMA 4

La figura representa un calentador eléctrico para líquidos cuyo contenido se calienta aplicando tensión a una resistencia R:




Variables intervinientes:

- h(t): altura del líquido en el depósito
- v(t): tensión aplicada a la resistencia
- T(t): temperatura del líquido
- $q_e(t)$: caudal de entrada
- $q_s(t)$: caudal de salida

Se pide:

- Diagrama de bloques en el dominio de Laplace
- Funciones de transferencia $M_1(s)$ y $M_2(s)$:

$$M_1(s) = \frac{T(s)}{Q_e(s)}$$

$$M_2(s) = \frac{T(s)}{V(s)}$$

Datos:

- Ecuaciones del sistema con los valores de las constantes sustituidos:

$$0{,}25 \cdot \frac{dh(t)}{dt} = q_e(t) - q_s(t)$$

$$q_s(t) = 5{,}6 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{h(t)}$$

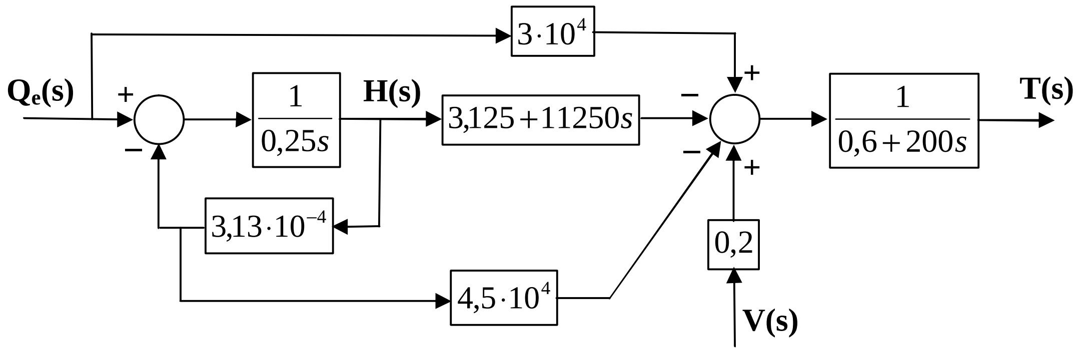
$$125 \cdot q_e(t) + 4{,}17 \cdot 10^{-6} \cdot v^2(t) = 4{,}17 \cdot q_s(t) \cdot T(t) + 520 \cdot 10^{-6} \cdot [T(t) - 30 \cdot h(t)] + 1{,}04 \cdot \left[ h(t) \cdot \frac{dT(t)}{dt} + T(t) \cdot \frac{dh(t)}{dt} \right]$$

- Punto de funcionamiento para el análisis:

v(0) = 100V
qe(0) = $0{,}5 \cdot 10^{-3}$ $m^3/s$

## ***SOLUCIÓN***

Diagrama de bloques:



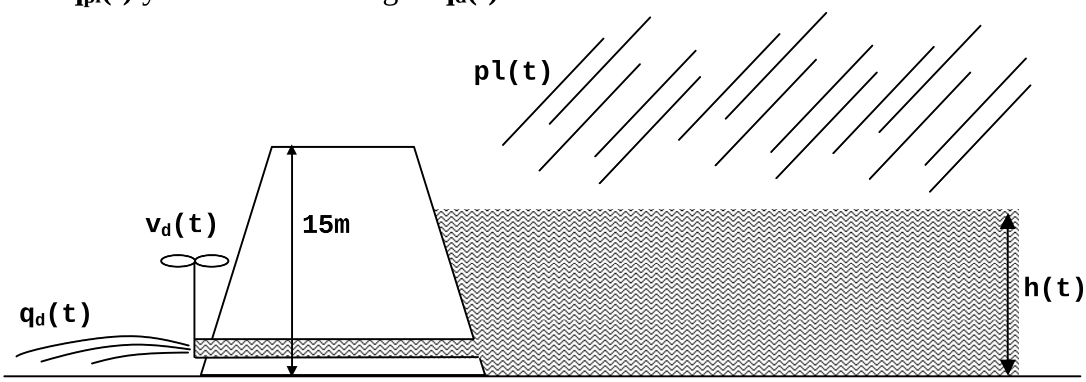

Funciones de transferencia:

$$M_1(s)=\frac{T(s)}{Q_e(s)}=\frac{1,5\cdot 10^4 s+31,28}{(0,6+200s)\cdot(s+1,25\cdot 10^{-3})}$$

$$M_2(s)=\frac{T(s)}{V(s)}=\frac{1}{3+1000s}$$

## PROBLEMA 5

La figura representa un dique de **15m** de altura pensado para evitar riadas en épocas lluviosas. Se considerarán como variables de entrada al sistema la intensidad de lluvia **pl(t)** y la apertura de la compuerta de desagüe **$v_d$(t);** y como variable de salida la altura de agua en el dique **h(t).** También se utilizarán como variables intermedias el caudal de lluvia **$q_{pl}$(t)** y el caudal de desagüe **$q_d$(t).**.




Ecuaciones físicas del

$$q_{pl}(t)=pl(t)\cdot A$$

$$q_d(t)=K\cdot\sqrt{h(t)}\cdot v_d(t)$$

$$\frac{dh(t)}{dt}=\frac{q_{pl}(t)-q_d(t)}{A}$$

Valor de las constantes:

A = 40.000 $m^2$(área de la presa)
K = 28 $m^{1/2}$/s (constante de vaciado)

Se pide:

1. Representar las ecuaciones del sistema en el dominio de Laplace, linealizadas sobre el punto de equilibrio correspondiente a una intensidad de lluvia **pl(0) = 5,2 l/m²s** (1litro = $10^{-3}m^3$) y una apertura de la compuerta de desagüe **$v_d(0)$ = 2,57m²**.
2. Representar el diagrama de bloques del sistema completo.
3. Partiendo de la situación de equilibrio y sin variar la posición de la compuerta de desagüe, calcular la altura que alcanzará el agua en el dique si la intensidad de lluvia pasara a valer **5,7 l/m²s**.
4. Partiendo de la situación de equilibrio y sin variar la posición de la compuerta, calcular el tiempo que tardaría el nivel de agua en sobrepasar el dique si la intensidad de lluvia pasara a valer **8 l/m²s**.
5. Partiendo de la situación de equilibrio y suponiendo que la intensidad de lluvia no varía, calcular cuál sería la apertura de la compuerta necesaria para que la altura de agua en el dique bajara **1m** en **una hora**.
6. ¿Cómo afecta a la velocidad del sistema el área de la presa?. Razonar.

***<u>SOLUCIÓN</u>***

1. El nivel de agua en equilibrio se calcula a partir de las ecuaciones del sistema, haciendo dh(t)/dt = 0:

**h(0) = 8,35m**

Las ecuaciones linealizadas en torno a la posición de equilibrio y en forma incremental quedan:

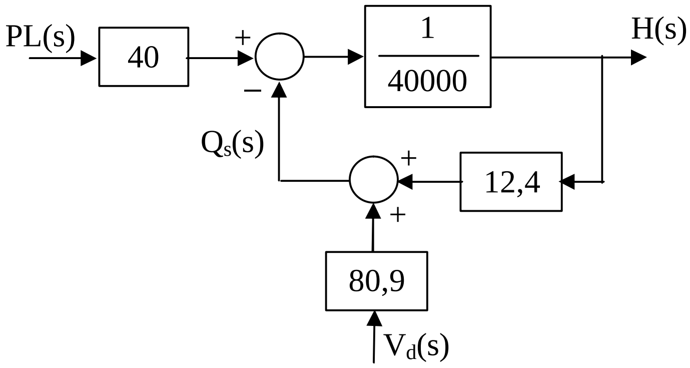
$$\boxed{\begin{aligned}
&\Delta q_{pl}(t) = \Delta pl(t)\cdot A\\
&\Delta q_d(t) = \left(K\cdot\sqrt{h(0)}\right)\cdot\Delta v_d(t) + \left(\frac{K}{2\sqrt{h(0)}}\cdot v_d(0)\right)\cdot\Delta h(t)\\
&\Delta\frac{dh(t)}{dt} = \frac{\Delta q_{pl}(t)-\Delta q_d(t)}{A}
\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
&\Delta q_{pl}(t) = 40\cdot\Delta pl(t)\\
&\Delta q_d(t) = 80{,}9\cdot\Delta v_d(t) + 12{,}44\cdot\Delta h(t)\\
&\Delta\frac{dh(t)}{dt} = \frac{\Delta q_{pl}(t)-\Delta q_d(t)}{40000}
\end{aligned}}$$

Lo cual, representado en el dominio de Laplace resulta:

$$\boxed{\begin{aligned}
&Q_{pl}(s) = 40\cdot PL(s)\\
&Q_d(s) = 80{,}9\cdot V_d(s) + 12{,}44\cdot H(s)\\
&s\cdot H(s) = \frac{Q_{pl}(s)-Q_d(s)}{40000}
\end{aligned}}$$

2.




3. Se calcula la función de transferencia entre H(s) y PL(s) por simplificación de bloques, con $V_s(s)=0$:

$$H(s)=\frac{40}{40000s+12{,}44}\cdot PL(s)$$

Y se aplica un escalón de valor 5,7-5,2 = 0,5:

Para saber el valor que alcanza Δh(t) en régimen permanente se usa el teorema del valor

$$H(s)=\frac{40}{40000s+12{,}44}\cdot\frac{0{,}5}{s}$$

final:

Por tanto, la altura final del depósito será:

$$lim_{t\to\infty}\Delta h(t)=lim_{s\to 0}\left(s\cdot H(s)\right)=1{,}6m$$

$$h(\infty)=h(0)+\Delta h(t)=9{,}96m$$

4. En este caso el valor del escalón a aplicar es 8-5,2 = 2,8

Calculamos la antitransformada de Laplace mediante descomposición en fracciones

$$H(s)=\frac{40}{40000s+12{,}44}\cdot\frac{2{,}8}{s}$$

simples:

Deseamos saber el tiempo en el que la altura se incrementa 15-8,35 = 6,65m

$$H(s)=\frac{-360000}{40000s+12{,}44}+\frac{9}{s}=\frac{-9}{s+3{,}11\cdot 10^{-4}}+\frac{9}{s}$$

$$h(t)=9\left(1-e^{-3{,}11\cdot 10^{-4}t}\right)$$

$$6{,}65=9\left(1-e^{-3{,}11\cdot 10^{-4}t}\right)$$

$$t=4318s=1h\,11m\,58s$$

5. Se calcula la función de transferencia entre H(s) y $V_s$(s) por simplificación de bloques, con PL(s)=0:

$$H(s) = \frac{-80{,}9}{40000s + 12{,}44} \cdot V_d(s)$$

En este caso la incógnita es el valor del escalón a aplicar. Lo llamaremos X:

$$H(s) = \frac{-80{,}9}{40000s + 12{,}44} \cdot \frac{X}{s}$$

Al igual que antes, calculamos la antitransformada de Laplace mediante fracciones simples:

$$H(s) = X \cdot \left( \frac{260000}{40000s + 12{,}44} - \frac{6{,}5}{s} \right)$$

$$h(t) = X \cdot \left( e^{-3{,}11 \cdot 10^{-4} t} - 1 \right) \cdot 6{,}5$$

Hacemos t=3600s y h(t) = -1 y despejamos X:

$$1 = X \cdot \left( e^{-3{,}11 \cdot 10^{-4} \cdot 3600} - 1 \right) \cdot 6{,}5$$

$$X = 0{,}23 m^2$$

Por tanto, la apertura pedida es 2,57+0,23 = 2,80m$^2$

6. En el denominador de las dos funciones de transferencia obtenidas interviene el área de la presa:

40000·s + 12,44

O lo que es lo mismo:

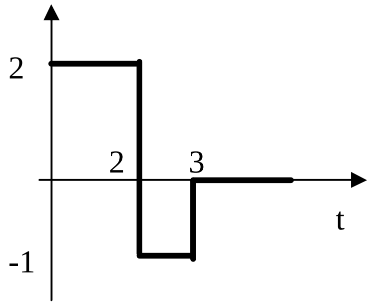
A·s + 12,44

La constante de tiempo del sistema es, por tanto:

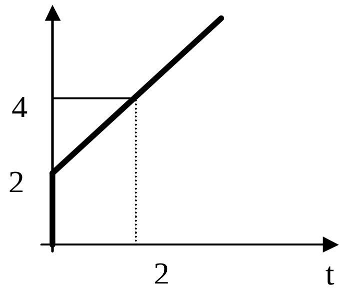
$\tau$ = A/12,44

Cuanto mayor sea el área mayor la constante de tiempo y por tanto más lento el sistema.

**PROBLEMA 6**
Las respuestas de dos sistemas continuos diferentes ante impulso unitario y ante escalón unitario vienen representadas en las figuras (a) y (b) respectivamente.



(a)



(b)

Se pide: a.- Deducir si son estables estos dos sistemas.
b.- Calcular la función de transferencia del segundo sistema (b)
c.- Dibujar la respuesta de ambos siste. ante entrada escalón de 3 unidades.

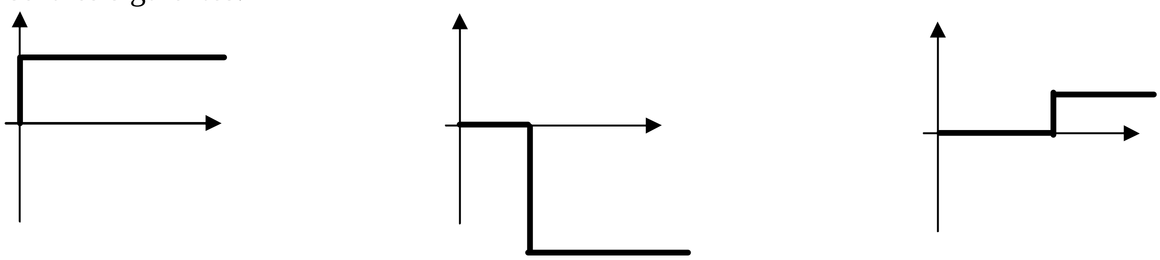
***SOLUCIÓN***

a. El sistema (a) es estable ya que al ser la respuesta impulsional la representada en la figura se cumple:

$$\int_0^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$$

El sistema (b) es inestable ya que el escalón es una entrada acotada y la salida es no acotada.

b. La respuesta impulsional del primer sistema se puede descomponer en la suma de las tres señales siguientes:



Teniendo como transformada de Laplace respectivamente 2/s; $-3e^{-2s}/s$; $e^{-3s}/s$. Por lo tanto la función de transferencia del primer sistema será:

$$G_a(s) = \frac{2}{s} + \frac{-3e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s} = \frac{2 - 3e^{-2s} + e^{-3s}}{s}$$

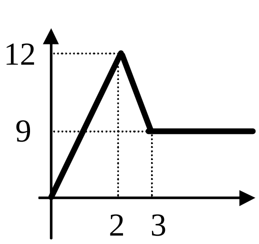
Para el segundo sistema, la señal de salida ante entrada escalón es y(t)=2+t, su transformada de Laplace será:

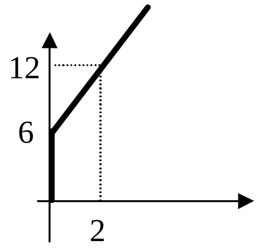
$$Y(s) = \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}$$

con lo que la función de transferencia será:

$$G_b(s) = \frac{Y(s)}{U_0(s)} = \frac{2s+1}{s}$$

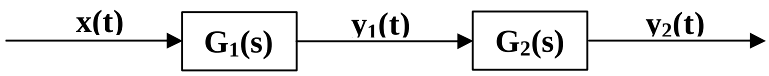
c.- La respuesta ante escalón de tres unidades de ambos sistemas viene representada en las siguientes figuras:



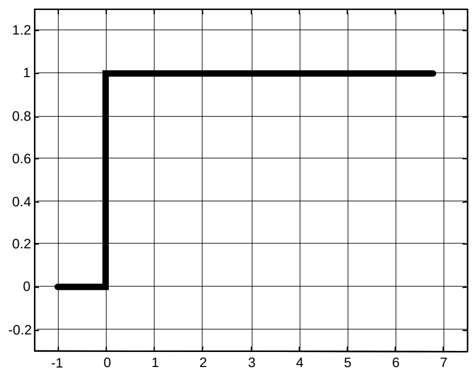



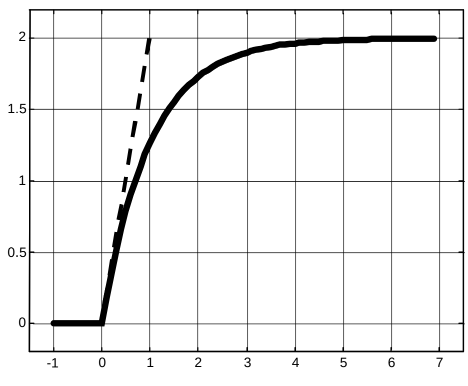

## PROBLEMA 7

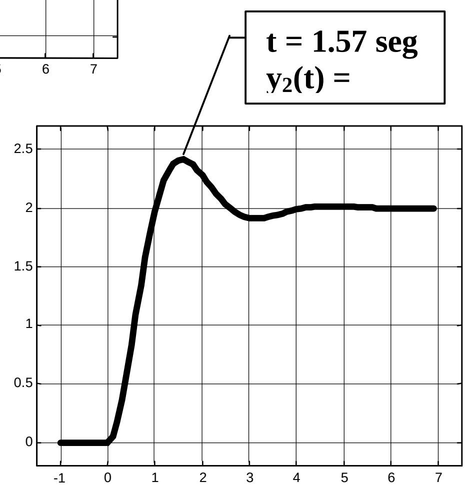
Considérese la siguiente agrupación en serie de los sistemas **$G_1(s)$** y **$G_2(s)$**:




**señal**








**señal** **señal**

Se registran con un osciloscopio las señales **$x(t)$**, **$y_1(t)$** e **$y_2(t)$**, con el siguiente resultado:
Se pide:

a.- Identificar el sistema **$G_1(s)$**

b.- Identificar el sistema **$G_2(s)$**

c.- Obtener la respuesta a escalón unitario del sistema **$G_2(s)$**, expresada como una función del tiempo.

## ***SOLUCIÓN***

La señal de entrada es un escalón unitario. La señal $y_1(t)$ es la respuesta a escalón de $G_1(s)$; por su aspecto se deduce que $G_1(s)$ es un sistema de primer orden:

$$G_1(s) = \frac{K_1}{1+\tau s}$$

donde $\mathbf{K_1}$ es la ganancia (sobre la figura se ve que su valor es **2**) y t es la constante de tiempo (se aprecia que su valor es **1 segundo**).

$$G_1(s) = \frac{2}{1+s}$$

La señal $\mathbf{y_2(t)}$ es la respuesta a escalón de $\mathbf{G_1(s)}{\times}\mathbf{G_2(s)}$. Por su aspecto se deduce que el producto $\mathbf{G_1(s)}{\times}\mathbf{G_2(s)}$ es un sistema de segundo orden subamortiguado:

$$G_1(s)\cdot G_2(s) = \frac{K_2}{s^2+a\cdot s+b} = \frac{K_2}{(s+\sigma+j\omega_d)\cdot(s+\sigma-j\omega_d)}$$

donde s y $\mathbf{w_d}$ se obtienen observando sobre la gráfica de la señal $\mathbf{y_2(t)}$ tiempo de pico y sobreoscilación:

$$\left.\begin{aligned} t_p &= 1.57 = \frac{p}{w_d} \\ M_p &= \frac{0.416}{2} = 0.208 = e^{-\frac{p}{\mathrm{tg}(q)}} = e^{-\frac{ps}{w_d}} \end{aligned}\right\} \quad w_d = 2 \qquad s = 1$$

con lo que resulta:

$$G_1(s)\cdot G_2(s) = \frac{K_2}{(s+1+2j)\cdot(s+1-2j)} = \frac{K_2}{s^2+2s+5}$$

El valor de $\mathbf{K_2}$ se obtiene a partir de la ganancia (en la gráfica se aprecia ganancia=2):

$$2 = \frac{K_2}{5} \quad \rightarrow \quad K_2 = 10$$

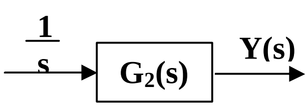
$$G_1(s)\cdot G_2(s) == \frac{10}{s^2+2s+5}$$

A partir de este resultado se puede obtener la función de transferencia pedida $G_2(s)$:

$$G_2(s) = \frac{G_1(s)\cdot G_2(s)}{G_1(s)} = \frac{\frac{10}{s^2+2s+5}}{\frac{2}{s+1}}$$

$$G_2(s) = \frac{5\cdot(s+1)}{s^2+2s+5}$$

A continuación se pide obtener la respuesta a escalón de $G_2(s)$:



$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot G_2(s) = \frac{5(s+1)}{s \cdot (s^2 + 2s + 5)}$$

Para obtener **y(t)** se hace la antitransformada de Laplace por fracciones simples:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5(s+1)}{s \cdot (s^2 + 2s + 5)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s} + \frac{B}{s+1+2j} + \frac{C}{s+1-2j}\right]$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} + \frac{-0.5+j}{s+1+2j} + \frac{-0.5-j}{s+1-2j}\right] = 1 + (-0.5+j) \cdot e^{(-1-2j)\cdot t} + (-0.5-j) \cdot e^{(-1+2j)\cdot t}$$

Agrupando los términos imaginarios:

$$y(t) = 1 + e^{-t}\left[(-0.5+j) \cdot e^{(-1-2j)\cdot t} + (-0.5-j) \cdot e^{(-1+2j)\cdot t}\right]$$

$$y(t) = 1 + e^{-t}\left[-j(e^{2j\cdot t} - e^{-2j\cdot t}) - 0.5(e^{2j\cdot t} + e^{-2j\cdot t})\right] = 1 + e^{-t}\left[2\frac{e^{2j\cdot t} - e^{-2j\cdot t}}{2j} - \frac{e^{2j\cdot t} + e^{-2j\cdot t}}{2}\right]$$

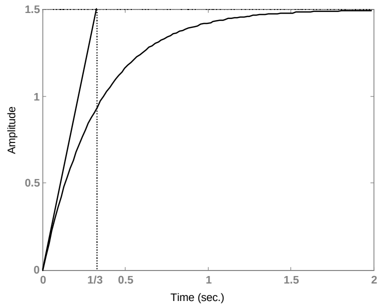
$$y(t) = 1 + e^{-t} \cdot [2\mathrm{sen}(2t) - \cos(2t)]$$

## PROBLEMA 8

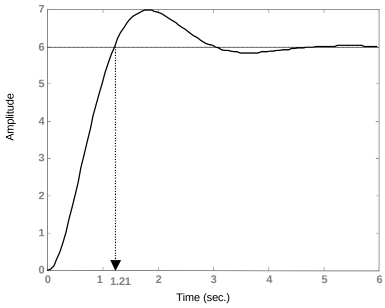
Calcular la función de transferencia $G_1(s)$ y $G_2(s)$, siendo:

(a) Respuesta del sistema $G_1(s)$ ante una entrada de escalón con una amplitud 0.5

(b) Respuesta del sistema $G_2(s)$ ante entrada impulso




(a)




(b)

## ***SOLUCIÓN***

(a) Es un sistema de primer orden típico. Si la entrada hubiera sido un escalón unitario el sistema sería:

$$G(s) = \frac{4.5}{s+3}$$

Pero como la entrada es un escalón de amplitud 0.5, el sistema que se tiene es:

$$G(s) = \frac{9}{s+3}$$

(b). La respuesta es la típica de un sistema G'(s) de segundo orden ante entrada en escalón. Podemos calcular esta G'(s) a partir de los datos siguientes:

- Tiempo de subida $t_r$=1.21
- Máximo valor de la señal de salida $y_p$=7
- Valor en el infinito y=6

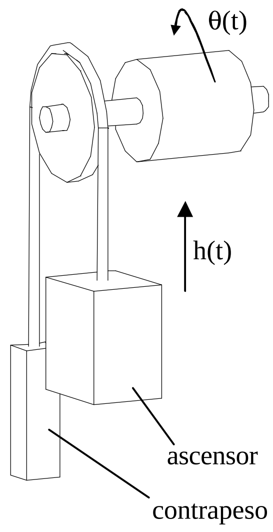
A partir de estos datos se obtiene para el sistema G'(s)

$$G'(s) = \frac{24}{s^2 + 2s + 4}$$

Puesto que la entrada realmente ha sido un impulso unitario y no un escalón, la función de transferencia del sistema es:

$$G_2(s) = \frac{24}{s^3 + 2s^2 + 4s}$$

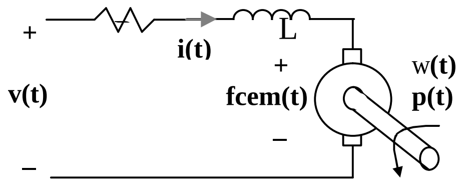
## PROBLEMA 9




Un motor eléctrico de corriente continua se acopla, mediante una polea, a un ascensor. Se supondrá que la caja del ascensor y el contrapeso se encuentran equilibrados, de modo que no se considerarán sus pesos en las ecuaciones.

Las variables del sistema serán:

- **h(t):** altura de la caja del ascensor
- q**(t):** ángulo girado por el motor
- w**(t):** velocidad de giro del motor
- **p(t):** par proporcionado por el motor
- **v(t):** tensión aplicada al motor
- **i(t):** intensidad que circula por el devanado del motor
- **fcem(t):** fuerza contraelectromotriz inducida en el devanado




Las ecuaciones del motor son las siguientes:

- **v(t) = R**x**i(t) + L**x**di(t)/dt + fcem(t)**
- **fcem(t) = $K_V$**x w**(t)**
- **p(t) = $K_P$**x**i(t)**

El resto de ecuaciones necesarias se indican a continuación:

- **p(t) = J**x**d**w**(t)/dt + B**x w**(t)**
- w**(t) = d**q**(t)/dt**
- **h(t) = r**x q**(t)**

Para las distintas constantes se tomarán los siguientes valores:

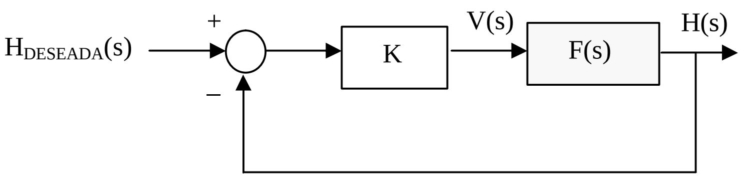
**R = 0,2**W (resistencia del devanado del motor)
**L = 0H** (inductancia del devanado del motor) <u>**L** SE CONSIDERA DESPRECIABLE</u>
**$K_P$ = 1,5N**x**m/A** (constante de par del motor)
**$K_V$ = 0,2V**x**s** (constante de fuerza contraelectromotriz del motor)
**J = 0,25kg**x**$m^2$** (momento de inercia del conjunto)
**B = 1N**x**s** (rozamiento viscoso del conjunto)
**r = 0,25m** (radio de la polea)

### Primera parte

1. Dibujar el diagrama de bloques del sistema.
2. Reducir el diagrama de bloques para obtener la función de transferencia que relaciona la altura del ascensor con la tensión aplicada al motor: **F(s) = H(s)/V(s)**
3. Discutir la estabilidad de la función de transferencia obtenida. ¿Es lógico el resultado?

### Segunda parte

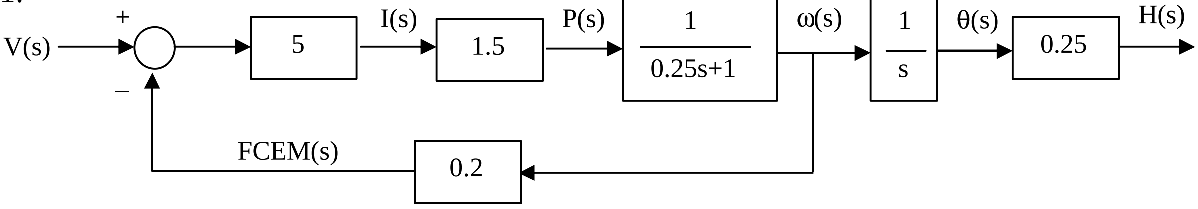
Sobre el sistema anterior **F(s)** se añade una realimentación y un bloque multiplicador de valor **K**:



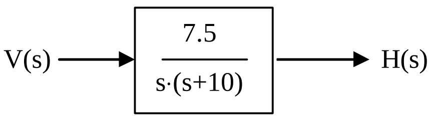
4. Obtener la f. de transferencia **G(s)** que relaciona H(s) y $H_{DESEADA}(s)$: **G(s) = H(s)/ $\mathbf{H_{DESEADA}(s)}$**
5. Discutir la estabilidad del sistema en función del valor de **K** según el criterio de Routh.
6. Supuesto un valor de **K=30**:
   - **6.1.** Dibujar aproximadamente la respuesta del sistema a un escalón unitario.
   - **6.2.** Obtener el valor de la ganancia en régimen permanente ante escalón unitario. ¿Qué sentido físico tiene?
   - **6.3.** Obtener el valor de la sobreoscilación y del tiempo de pico de sobreoscilación.
   - **6.4.** Obtener el valor del tiempo de establecimiento (es válido utilizar la fórmula aproximada).
   - **6.5.** ¿Qué efecto tendría aumentar el valor de **K** sobre la sobreoscilación?

***<u>SOLUCIÓN</u>***

1.

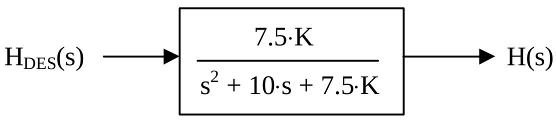



2.



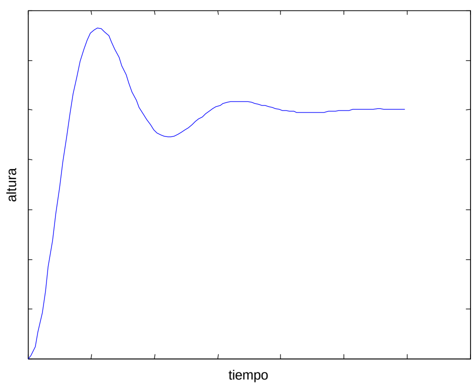

3. Sistema inestable por tener un polo en s=0. Es lógico que el sistema resulte inestable. Basta pensar en lo que sucede si se aplica una entrada tipo escalón: el motor se pondría a girar indefinidamente, con lo que la altura crecería sin parar.

4.




5. La condición de estabilidad es: $\boxed{K > 0}$

6.1.



6.2.

$$Y(s) = G(s)\cdot\frac{1}{s} = \frac{225}{s^2 + 10\cdot s + 225}$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot G(s) = \lim_{s\to 0}\frac{225}{s^2 + 10\cdot s + 225} = 1$$

Luego la ganancia en régimen permanente es 1. Una ganancia unidad indica que, en régimen permanente, la altura del ascensor será igual a la altura deseada.

6.3.

$$M_p = e^{-z\frac{p}{\sqrt{1-z^2}}}.100\% = 33\%$$

$$t_p = \frac{p}{w_n\sqrt{1-z^2}} = 0.22s$$

6.4.

$$t_s = \frac{p}{zw_n} = 0.62s$$

6.5.

$$H_{DES}(s) \longrightarrow \boxed{\frac{7.5\cdot K}{s^2 + 10\cdot s + 7.5\cdot K}} \longrightarrow H(s)$$

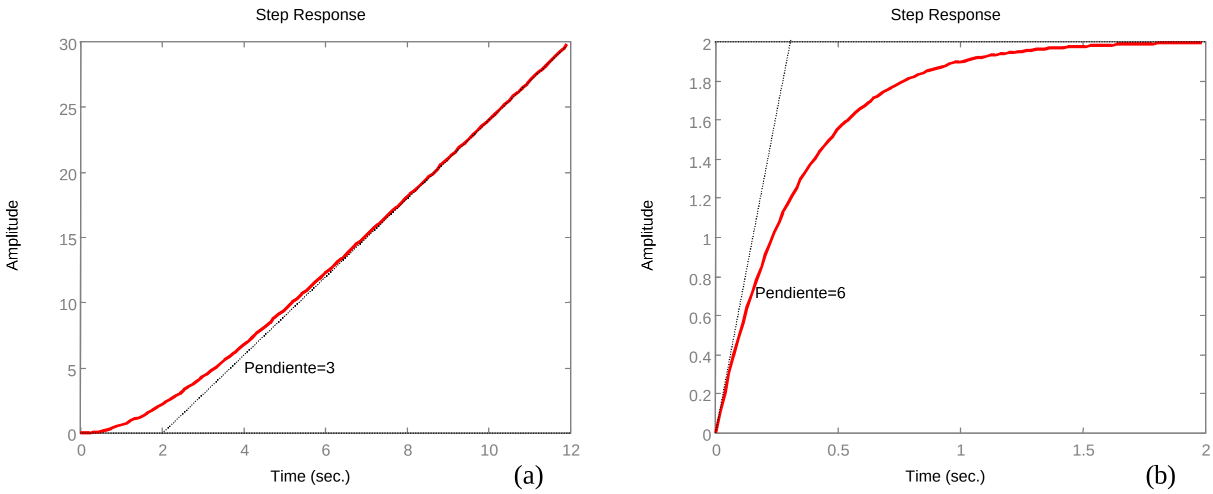
$7.5\cdot K = \omega_n^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{(7.5\cdot K)}$

$10 = 2\xi\omega_n \quad \Rightarrow \quad \xi = 5/\sqrt{(7.5\cdot K)}$

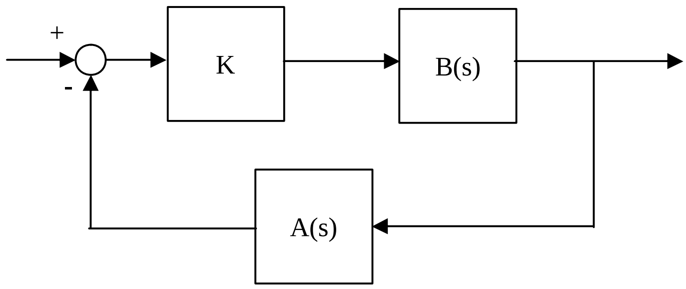
Al aumentar K disminuye el coeficiente de amortiguamiento y la sobreoscilación amenta

# PROBLEMA 10

Siendo la respuesta ante entrada en escalón unitario de los sistemas A(s) y B(s) la representada en las figuras (a) y (b) respectivamente, calcular:

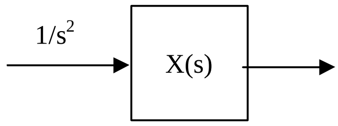



a. Función de transferencia de ambos sistemas.
b. Estudiar por Routh la estabilidad del sistema representado en la siguiente figura




## *SOLUCIÓN*

a. La función de transferencia del sistema A(s) en función de la respuesta ante escalón es la siguiente. La gráfica representa la respuesta de un sistema de primer orden X(s) ante entrada rampa:




Sin embargo, la entrada es un escalón. Si se conociera X(s), se podría tener A(s):

$$A(s) = sX(s)$$

ya que así se tendría una entrada escalón con la misma señal de salida.

Conocida la pendiente (k=3) y el desplazamiento de la asíntota (T=2), se tiene:

$$X(s) = \frac{3}{1+2s}$$

con lo que A(s) quedará:

$$A(s) = \frac{3}{2s^2+s}$$

B(s) es la respuesta de un sistema de primer orden ante entrada escalón. La ganancia del sistema es 2, y la pendiente es 6 (k/T=6). Así B(s) es:

$$B(s)=\frac{2}{1+\frac{1}{3}s}=\frac{6}{s+3}$$

b. Para el sistema propuesto en la figura se tiene una función de transferencia global:

$$M(s)=\frac{KB(s)}{1+KB(s)A(s)}$$

quedando:

$$M(s)=\frac{6K(2s^2+s)}{2s^3+7s^2+3s+18K}$$

Se puede construir la tabla de Routh:

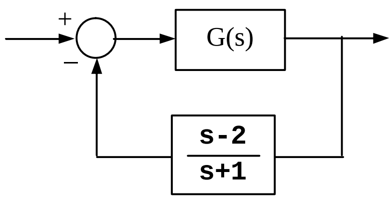
| | | |
|---|---|---|
| $s^3$ | 2 | 3 |
| $s^2$ | 7 | 18K |
| $s^1$ | (21-36K)/7 | 0 |
| $s^0$ | 18K | |

Las condiciones son pues $18K>0$ y $\frac{36}{7}K-3<0$

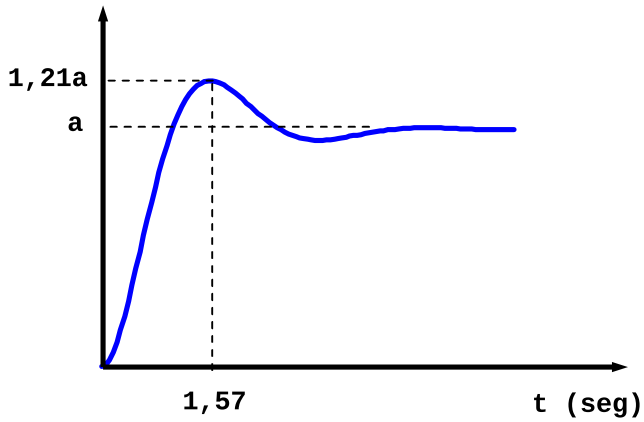
Que queda finalmente **K<7/12 y K>0**

## PROBLEMA 11

Discutir en función del parámetro **'a'** la estabilidad del siguiente sistema realimentado:




Dato: respuesta ante escalón unitario de G(s):



## *SOLUCIÓN*

G(s) es fácil de identificar: su respuesta a escalón se corresponde con la de un sistema de 2º orden:

$$G(s) = \frac{Kw_n^2}{s^2 + 2zw_n s + w_n^2}$$

Los datos para la identificación serán:

- $K = a$ (valor en régimen permanente)
- $t_P = \dfrac{p}{w_d} = 1{,}57 \quad \rightarrow \quad w_d = 2$ (tiempo de pico)
- $M_P = e^{-\frac{p}{\mathrm{tg}(J)}} = 0.21 \quad \rightarrow \quad \mathrm{tg}(J) = 2 \quad \rightarrow \quad s = \dfrac{w_d}{\mathrm{tg}(J)} = 1 = xw_n$ (sobreoscilación)
- $w_n^2 = s^2 + w_d^2 = 5$

Con lo que la función de transferencia resulta:

$$G(s) = \frac{5a}{s^2 + 2s + 5}$$

El resultado de la realimentación será:

$$M(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\dfrac{5a}{s^2+2s+5}}{1 + \dfrac{5a}{s^2+2s+5} \cdot \dfrac{s-2}{s+1}} = \frac{5a(s+1)}{s^3 + 3s^2 + (7+5a)s + (5-10a)}$$

A partir de los coeficientes del denominador se pueden obtener las condiciones de estabilidad:

- Todos los coeficientes del mismo signo:

  $7 + 5a > 0 \quad \rightarrow \quad a > -1{,}4$

  $5 - 10a > 0 \quad \rightarrow \quad a < 0{,}5$

- Primera columna de la tabla de Routh del mismo signo:

$$\begin{array}{c|ccl}
s^3 & 1 & 7+5a & \\
s^2 & 3 & 5-10a & \\
s^1 & \dfrac{16+25a}{3} & 0 & \rightarrow \quad a > -0{,}64 \\
s^0 & 5-10a & 0 & \rightarrow \quad a < 0{,}5
\end{array}$$

La combinación de todas las condiciones queda: $-0{,}64 < a < 0{,}5$

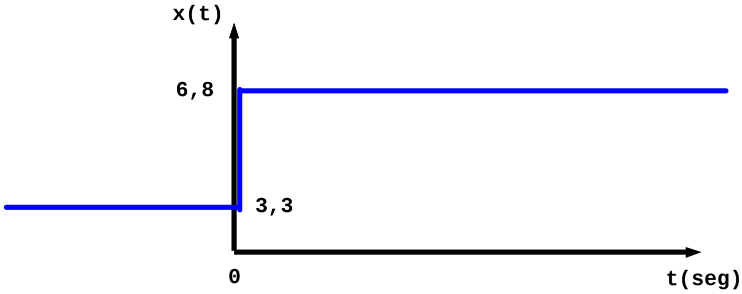
# PROBLEMA 12

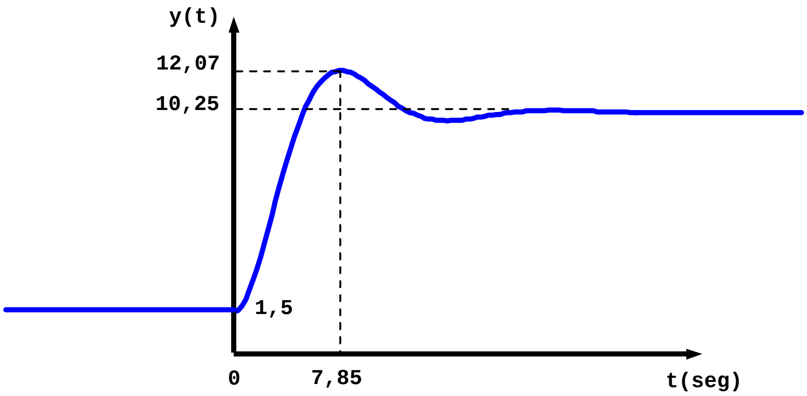
Un sistema físico responde a la siguiente ecuación diferencial:

$$K_1 \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + K_2 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y^2(t) - x(t) \cdot y(t) + 0{,}7 \cdot y(t) + 0{,}5 \cdot x(t) = 0$$

Donde $\mathbf{K_1}$ y $\mathbf{K_2}$ son constantes desconocidas

Experimentalmente se obtiene que la respuesta a la señal **x(t)** mostrada en la figura es la señal **y(t)**:




Se pide identificar los parámetros $\mathbf{K_1}$ y $\mathbf{K_2}$ del sistema

Nota: se considerarán despreciables los errores cometidos con la linealización

***SOLUCIÓN***

La función de transferencia del sistema se puede obtener a partir de la ec. diferencial:
En primer lugar se linealiza la ecuación y se expresa en variables incrementales:

$$K_1 \cdot \Delta \ddot{y}(t) + K_2 \cdot \Delta \dot{y}(t) + 2 \cdot y_0 \cdot \Delta y(t) - x_0 \cdot \Delta y(t) - y_0 \cdot \Delta x(t) + 0{,}7 \cdot \Delta y(t) + 0{,}5 \cdot \Delta x(t) = 0$$

Sustituyendo para los valores de $y_0$ y $x_0$ que se pueden ver en la gráfica, queda:

$$K_1 \cdot \Delta \ddot{y}(t) + K_2 \cdot \Delta \dot{y}(t) + 0{,}4 \cdot \Delta y(t) - \Delta x(t) = 0$$

Transformando al dominio de Laplace se obtiene la función de transferencia:

$$K_1 \cdot s^2 \cdot Y(s) + K_2 \cdot s \cdot Y(s) + 0{,}4 \cdot Y(s) = X(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{K_1 \cdot s^2 + K_2 \cdot s + 0{,}4}$$

Por otra parte, la expresión exacta de la función de transferencia también puede obtenerse a partir de la respuesta a escalón que aparece en la gráfica y que es típica de un sistema de segundo orden:

$$G(s) = \frac{Kw_n^2}{s^2 + 2xw_n s + w_n^2}$$

$$K = \frac{8{,}75}{3{,}5} = 2{,}5$$

$$t_p = 7{,}85 = \frac{p}{w_d} \quad \rightarrow \quad w_d = 0{,}4$$

$$M_p = \frac{1{,}82}{8{,}75} = e^{-\frac{p}{\mathrm{tg}(q)}} \quad \rightarrow \quad \mathrm{tg}(q) = 2$$

$$s = \frac{w_d}{\mathrm{tg}(q)} = 0{,}2 \qquad w_n = \sqrt{s^2 + w_d^2} = \sqrt{0{,}2} \qquad x = \frac{s}{w_n} = \frac{0{,}2}{\sqrt{0{,}2}}$$

$$G(s) = \frac{0{,}5}{s^2 + 0{,}4 \cdot s + 0{,}2} = \frac{1}{2 \cdot s^2 + 0{,}8 \cdot s + 0{,}4}$$

Identificando términos:

$$K_1 = 2$$

$$K_2 = 0{,}8$$