SISTEMAS DE CONTROL (2º Cuatrimestre)
RESULTADOS

1. Si $\{u_k\}$ es un escalón unitario, a la vista de la señal de salida de $G_1(z)$ se deduce que éste tiene por expresión:

$$G_1(z) = \frac{bz}{z-a}$$

donde b=2, y

$$\frac{b}{1-a} = 2.85$$

luego a=0.3

$$G_1(z) = \frac{2z}{z-0.3}$$

A la vista de la señal de salida $\{y_k\}$, y dado que la señal de entrada es un escalón unitario, se deduce que el conjunto $G_1(z)\cdot G_2(z)$ es un sistema de segundo orden con un retardo de orden 3:

$$G_1(z)\cdot G_2(z) = z^{-1}\frac{K}{z^2+az+c}$$

A partir del gráfico se tiene K/c=4.
La fdt típica tiene un retardo de orden dos, y es sobre la que se han definido los coeficientes.

$$G(z) = \frac{c}{z^2+az+b}$$

Por este motivo para el cálculo de los valores en la fdt típica hay que restar una unidad. Puesto que n_r=4 y n_p=5, se tiene:

$$n_p - 1 = \frac{\pi}{\vartheta} \quad \Rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{4}$$

$$n_r - 1 = \frac{\gamma}{\vartheta} \quad \Rightarrow \gamma = \frac{3\pi}{4}$$

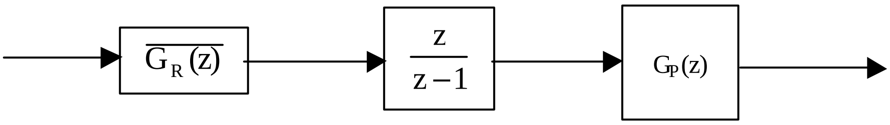
Por lo tanto los polos se encuentran en z=0.5±0.5j. De esta forma:

$$G_1(z)\cdot G_2(z) = z^{-1}\frac{2}{z^2 - z + 0.5}$$

Por lo tanto:

$$G_2(z) = \frac{(z-0.3)}{z^2\left(z^2 - z + 0.5\right)}$$

2. Para cumplir las especificaciones de error nulo en régimen permanente ante entrada escalón, es necesario añadir un polo en z=1



De esta forma:

$$\overline{G_P(z)} = \frac{0.3(z-0.3)}{(z+0.4)(z+0.1)} \cdot \frac{z}{z-1}$$

donde m=2 y n=3.

$$\overline{G_R(z)} = \frac{Q(z)}{P(z)}$$

siendo el grado de Q(z) μ=n-1=2 y el de P(z) v=μ=2.
Planteando la ecuación:

$$B(z)Q(z) + P(z)A(z) = \prod_{i=1}^{v+n} (z-p_i)$$

y dado que se puede cancelar el cero del modelo de la planta, se tiene:

$$0.3(z-0.3)zQ(z) + P(z)\,(z-1)(z+0.1)(z+0.4) = z^2\left(z^2+0.25z+0.5\right)(z-0.3)$$

siendo:

$$P(z) = z^2 + qz + hz = (z-0.3)(z-p)$$

$$Q(z) = az^2 + bz + cz$$

Así:

$$0.3z\left(az^2+bz+c\right)+(z-p)(z-1)(z+0.1)(z+0.4) = z^2\left(z^2+0.25z+0.5\right)$$

Identificando coeficientes:

$$\begin{aligned} 0.04p &= 0 && \rightarrow \quad p=0 \\ 0.3c-0.04 &= 0 && \rightarrow \quad c=0.13 \\ 0.3b-0.46 &= 0.5 && \rightarrow \quad b=3.2 \\ 0.3a-0.5 &= 1 && \rightarrow \quad a=5 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\overline{G_R(z)} = \frac{2.5z^2+3.2z+0.13}{z(z-0.3)}$$

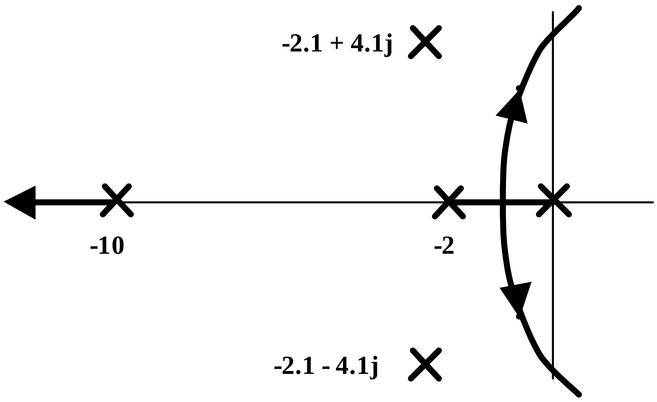
y el regulador pedido será:

$$G_R(z) = \overline{G_R(z)} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{2.5z^2+3.2z+0.13}{(z-1)(z-0.3)}$$

3. Polos dominantes deseados en función de las especificaciones de régimen transitorio:

$$\left.\begin{aligned} t_S &= \frac{\pi}{\sigma} = 1.5 \\ M_P &= e^{-\frac{\pi}{\operatorname{tg}\theta}} = e^{-\frac{\pi \cdot \sigma}{\omega_d}} = 0.2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \sigma = 2.1 \quad \omega_d = 4.1$$

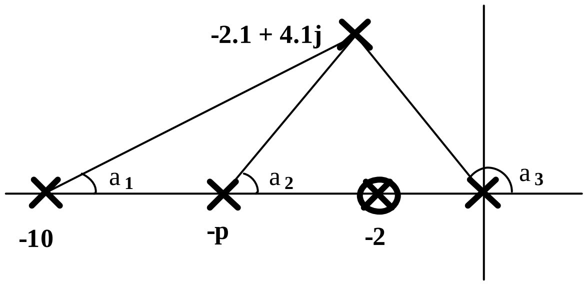
Por tanto los polos dominantes son: **p = -2.1 ± 4.1j**
Trazamos el lugar de las raíces del sistema:



...y vemos que el lugar de las raíces no pasa por esos puntos, por lo que hará falta un regulador **PD**:

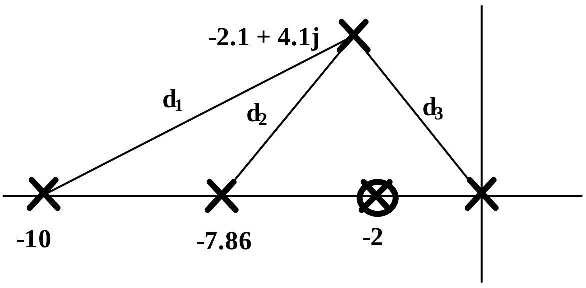
$$R(s) = K\,\frac{s+z}{s+p}$$

Cero del regulador: cancelando el polo más cercano al origen, por lo tanto **z = 2**
Polo del regulador: se calcula mediante el criterio del argumento:



$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -180^{\circ} \quad \rightarrow \quad \alpha_2 = 35.5^{\circ} \quad \rightarrow \quad p = 7.86$$

Constante **K** del regulador: se calcula mediante el criterio del módulo:



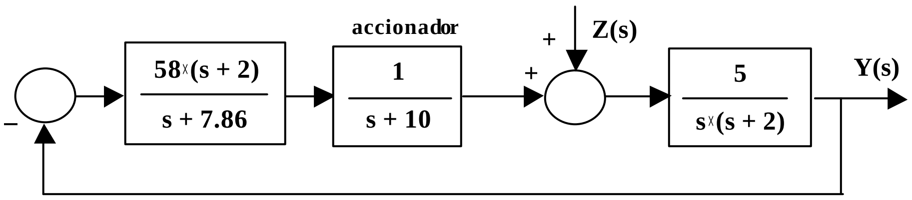
$$\left.\begin{array}{l} K' = d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 = 290 \\ K' = 5K \end{array}\right\} \rightarrow \quad K = 58 \quad \rightarrow \quad R(s) = 58\frac{s+2}{s+7.86}$$

Comprobación de las condiciones impuestas para el régimen permanente:

$$K_P = lim_{s\to 0} G(s) = lim_{s\to 0} \frac{58\cdot 5\cdot (s+2)}{s(s+7.86)(s+10)(s+2)} = \infty \qquad e_P = \frac{1}{1+K_P} = 0$$

Dado que se cumplen las especificaciones, es suficiente con el regulador PD propuesto.

b. Para analizar el efecto de la perturbación, reducimos el diagrama haciendo cero la entrada de referencia:



La función de transferencia que se obtiene es:

$$\frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{5s^2 + 89.3s + 393}{s^4 + 19.86s^3 + 114.3s^2 + 447.2s + 580}$$

Si aplicamos un escalón de valor 0.01:

$$Y(s) = \frac{5s^2 + 89.3s + 393}{s^4 + 19.86s^3 + 114.3s^2 + 447.2s + 580} \cdot \frac{0.01}{s}$$

$$lim_{t\to\infty} y(t) = lim_{s\to 0} s \cdot Y(s) = \frac{0.01\cdot 393}{580} = 0.0068$$

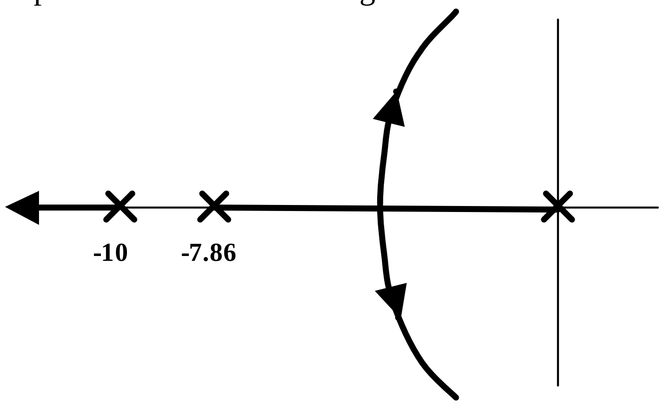
Por lo tanto, la salida sufre un incremento igual a 0.0068

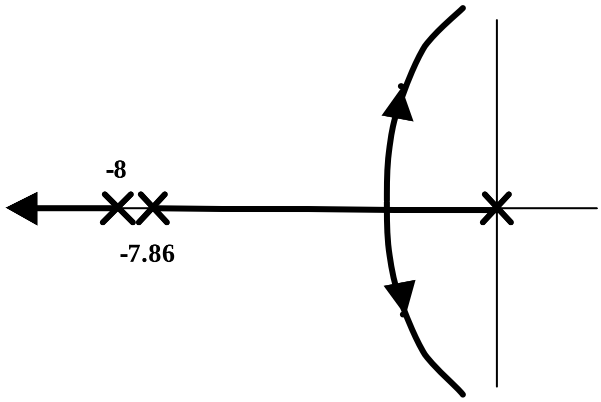
c. Calculamos la función de transferencia del bloque accionador si su cte. de tiempo aumenta un 20%:

$$G_{antes}(s) = \frac{1}{s+10} = \frac{0.1}{1+0.1s} \quad \rightarrow \quad t_{antes} = 0.1$$

$$t_{después} = 0.125 \quad \rightarrow \quad G_{después}(s) = \frac{0.1}{1+0.125s} = \frac{0.8}{s+8}$$

Si comparamos aproximadamente los dos lugares de las raíces:





Vemos que los polos dominantes se desplazan a la derecha como resultado de que el polo en –10 pasa a estar en –8 (las asíntotas se desplazan a la derecha).

En estas circunstancias, cabe esperar un aumento de la sobreoscilación y del tiempo de establecimiento.

d. Comprobamos el error de velocidad con el regulador PD

$$K_V = lim_{s\to 0} s\cdot G(s) = lim_{s\to 0} s\cdot \frac{58\cdot 5}{s\cdot(s+7.86)(s+10)} = 3.69$$

$$e_V = \frac{1}{K_V} = 0.27seg$$

Dado que el error es superior al pedido, es necesario añadir efecto integral al regulador:

$$R(s) = 58\cdot\frac{s+2}{s+7.86}\cdot\frac{s+1/T}{s+1/bT}$$

El cero **-1/T** se elige con valor **1/6** de la parte real del polo deseado, esto es **1/T = 2.1/6 = 0.35**

El coeficiente b es igual a la relación entre el valor de $\mathbf{K_V}$ obtenido y el $\mathbf{K_V}$ deseado:

$$0.15 = \frac{1}{K_{VDES}} \quad\to\quad K_{VDES} = 6.67 \quad\to\quad b = \frac{6.67}{3.69} = 1.8$$

Por tanto, el regulador **PID** final queda:

$$R(s) = 58 \cdot \frac{s+2}{s+7.86} \cdot \frac{s+0.35}{s+0.19}$$