Ingeniería Industrial

Autómatas y Sistemas de Control

26 de junio de 2000

SISTEMAS DE CONTROL (2º Cuatrimestre)
RESULTADOS

1. Para el cálculo de la fdt. global M(z), es necesario obtener $B_0G(z)$ previamente:

$$B_0G(z) = (1-z^{-1})\sum_{\text{polos}} \text{Res.}\left[\frac{G(p)}{p}\frac{1}{1-e^{PT}z^{-1}}\right]$$

es decir:

$$B_0G(z) = (1-z^{-1})\sum_{\text{polos}} \text{Res.}\left[\frac{2}{p^2(p+1)}\frac{1}{1-e^{PT}z^{-1}}\right]$$

quedando,

$$B_0G(z) = \frac{0.21z+0.18}{(z-0.61)(z-1)} = \frac{0.21(z+0.86)}{(z-0.61)(z-1)}$$

De esta forma el equivalente discreto completo es:

$$G_p(z) = \frac{0.21(z+0.86)(z+1.1)}{(z-0.61)(z-1)^2}$$

La función de transferencia global será:

$$M(z) = \frac{G_p(z)G_R(z)}{1+G_p(z)G_R(z)} = \frac{0.21(z+0.86)(z+1.1)G_R(z)}{(z-0.61)(z-1)^2+0.21(z+0.86)(z+1.1)G_R(z)}$$

b.- Para el cálculo del regulador de tiempo mínimo ante referencia escalón es necesario calcular previamente $G_p(z^{-1})$

$$G_p(z^{-1}) = \frac{0.21z^{-1}(1+0.86z^{-1})(1+1.1z^{-1})}{(1-0.61z^{-1})(1-z^{-1})^2}$$

Se han de cumplir las siguientes condiciones:

$$M(z^{-1}) = z^{-d}B^+(z^{-1})M_2(z^{-1})$$

$$1-M(z^{-1}) = A^+(z^{-1})(1-z^{-1})^{\max(v',v+1)}M_1(z^{-1})$$

De esta forma:

$$M(z^{-1}) = z^{-1}(1+1.1z^{-1})M_2(z^{-1})$$

$$1-M(z^{-1}) = (1-z^{-1})^2M_1(z^{-1})$$

Sabiendo que el orden$M(z^{-1})$=d+p+q+máx(v',v+1)-1=1+1+2-1=3, se tiene:

$$M_2(z^{-1}) = a+bz^{-1}$$

$$M_1(z^{-1}) = c+dz^{-1}$$

Planteando la ecuación:

$$1-z^{-1}(1+1.1z^{-1})(a+bz^{-1}) = (1-z^{-1})^2(c+dz^{-1})$$

Igualando coeficiente a coeficiente se obtiene:

$$M_2(z^{-1}) = 1.2 - 0.73z^{-1}$$
$$M_1(z^{-1}) = 1 + 0.8z^{-1}$$

De esta forma se tiene:

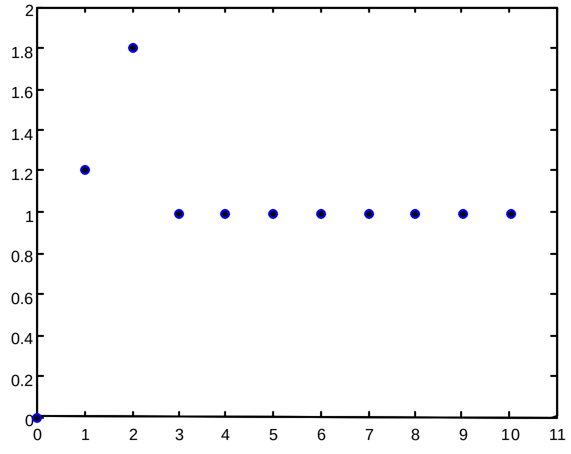
$$M(z^{-1}) = z^{-1}(1+1.1z^{-1})(1.2 - 0.73z^{-1})$$
$$1 - M(z^{-1}) = (1 - z^{-1})^2(1 + 0.8z^{-1})$$

obteniendo como expresión del regulador:

$$G_R(z^{-1}) = \frac{1}{G_p(z^{-1})}\frac{M(z^{-1})}{(1 - M(z^{-1}))} = \frac{(1 - 0.61z^{-1})(1.2 - 0.73z^{-1})}{0.21(1 + 0.86z^{-1})(1 + 0.8z^{-1})}$$

$$G_R(z) = \frac{(z - 0.61)(1.2z - 0.73)}{0.21(z + 0.86)(z + 0.8)}$$

c.- Para representar de forma aproximada la salida del sistema ante entrada escalón con este regulador previamente diseñado, se sabe que el sistema global tiene un retardo de una unidad. Además se sabe que debido a las características del regulador diseñado, se tiene un error ante escalón nulo a partir del instante dado por el orden $M(z^{-1})$, es decir, a partir del instante 3. De esta forma se puede dibujar de forma aproximada la salida ante entrada escalón.



Para el cálculo de los valores exactos es necesario calcular $Y(z)=M(z)U_0(z)$, donde $U_0(z)$ es un escaló unitario, y posteriormente realizar la trasnformada inversa.

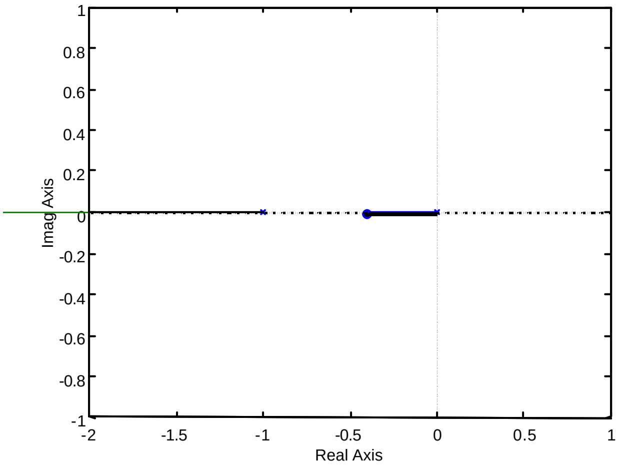
d.- Para que el sistema no presente oscilaciones ocultas con el regulador planteado, es necesario que la acción de control sobre el proceso se haga constante a partir de un periodo de muestreo.

$$U(z^{-1}) = \frac{M(z^{-1})R(z^{-1})}{G_p(z^{-1})} = \frac{(1 - 0.61z^{-1})(1 - z^{-1})^2 z^{-1}(1 + 1.1z^{-1})(1.2 + 0.73z^{-1})}{0.21(1 + 0.86z^{-1})(1 + 1.1z^{-1})(1 - z^{-1})}$$

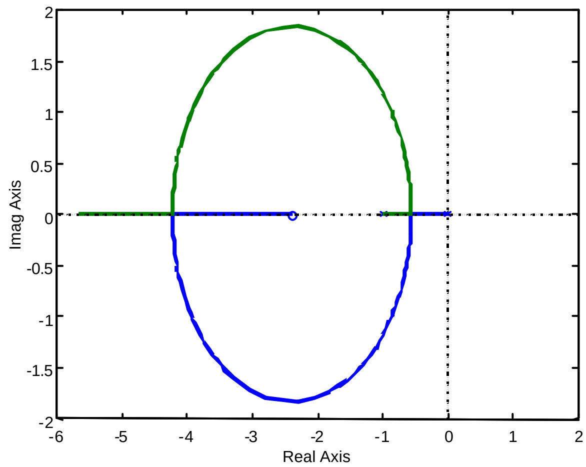
$$U(z^{-1}) = \frac{(1 - 0.61z^{-1})(1 - z^{-1})z^{-1}(1.2 + 0.73z^{-1})}{0.21(1 + 0.86z^{-1})}$$

Como se observa y dado que $U(z^{-1})$ no es una suma finita de escalones el sistema presentará oscilaciones ocultas.

2. El sistema continuo tiene dos polos en s=0, s=-1, y un cero en s=-a Dependiendo del valor de a, se tienen dos lugares de las raíces para el sistema en bucle cerrado.



0<a<1



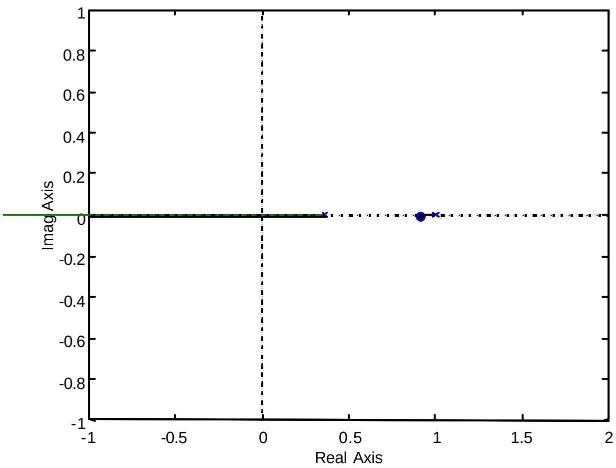
a>1

Como se puede observar el sistema continuo es siempre estable para todo valor de a>0 y K>0. Cuando se discretiza el regulador continuo mediante el operador derivada, se tiene:

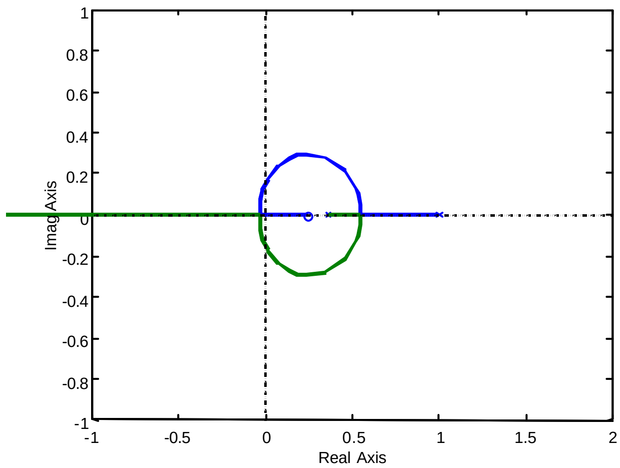
$$R(z) = R(s)\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = K(1+aT)\frac{z-\dfrac{1}{1+aT}}{z-1} = K(1+a)\frac{z-\dfrac{1}{1+a}}{z-1}$$

$$BG(z) = (1-z^{-1})\sum_{\substack{p=0\\ p=-1}} \mathrm{Res}\left[\frac{1}{p+1}\,\frac{1}{p}\,\frac{1}{1-e^{pT}z^{-1}}\right] = \frac{1-e^{-1}}{z-e^{-1}}$$

Al igual que antes, dependiendo del valor de a, se tienen dos lugares de las raíces para el sistema en bucle cerrado:



a<e-1



a>e-1

Tanto en un caso como en otro hay valores para los cuales el sistema se hace inestable (los polos traspasan el círculo unidad). Justo en el punto en el que se tiene un polo en z=-1, 'K' sobre el lugar de las raíces vale:

$$K_{LR} = \frac{(1+1)(1+e^{-1})}{1+\dfrac{1}{1+a}} = \frac{2(1+e^{-1})(1+a)}{2+a}$$

Por lo tanto

$$K(1+a)(1-e^{-1}) < \frac{2(1+e^{-1})(1+a)}{2+a}$$

quedando finalmente:

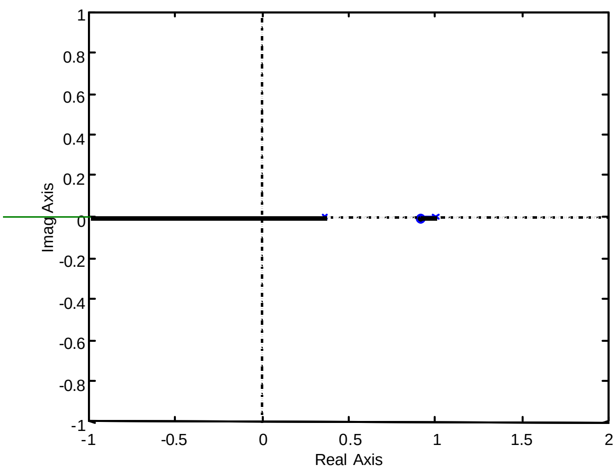
$$K < \frac{2(1+e^{-1})}{(2+a)(1-e^{-1})}$$

b.- El error de posición será nulo al ser ambos sistemas de tipo 1 siempre y cuando sean estables estos sistemas.

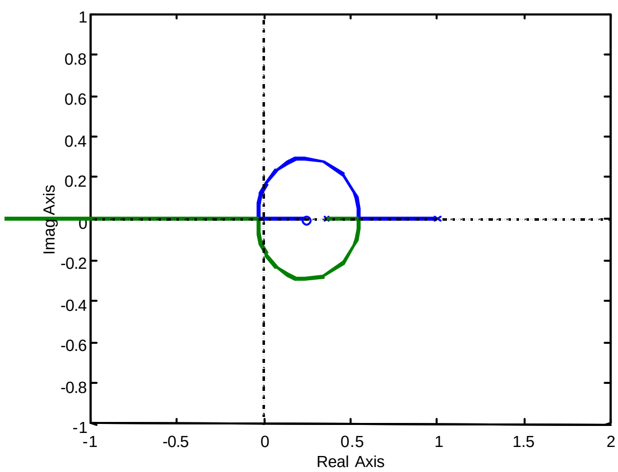
c.- Cuando se utiliza el operador trapezoidal para aproximar el regulador continuo se tiene:

$$R(z) = R(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = K\frac{(2+aT)}{2}\frac{z-\dfrac{2-aT}{2+aT}}{z-1} = K\frac{(2+a)}{2}\frac{z-\dfrac{2-a}{2+a}}{z-1}$$

La situación es similar a la del anterior apartado teniendo dos posibilidades en función de donde se encuentre el cero de R(z)BG(z).



$$\frac{2-a}{2+a} > e^{-1}$$



$$\frac{2-a}{2+a} < e^{-1}$$

El sistema será inestable a partir de que tenga un polo en bucle cerrado en z=-1. En estas circunstancias:

$$K_{LR} = \frac{(1+1)(1+e^{-1})}{1+\dfrac{2-a}{2+a}} = \frac{(1+e^{-1})(2+a)}{2}$$

Por lo tanto

$$K\frac{(2+a)}{2}(1-e^{-1}) < \frac{(1+e^{-1})(2+a)}{2}$$

quedando finalmente:

$$K < \frac{(1+e^{-1})}{(1-e^{-1})}$$

condición que es MENOS RESTRICTIVA que la obtenida en el caso previo.

3. La ecuación característica del sistema queda:

$$z^3 + 3(K-1)z + 0.12 = 0$$

Aplicando Jury:

1	0	3(K-1)	0.12
0.12	3(K-1)	0	1
3(1-K)	0.36(K-1)	-0.9856	
0.9856	0.36(K-1)	3(1-K)	

P(1)>0 → 1+3K-3+0.12>0 → K>0.63
P(-1)<0 → -1-3K+3+0.12<0 → K>0.71
|3-3K|<|-0.9856|
Si K<1 → 3-3K<0.9856 → K>0.67
Si K>1 →-3+3K<0.9856 → K<1.33

Uniendo todas las posibilidades: **0.71<K<1.33**

b.- Cuando K=1. El error de velocidad será infinito al ser un sistema de tipo 0. Para el cálculo del error de posición se tiene:

$$e_p = \frac{1}{1+hK_p}$$

$$K_p = \lim_{z\to 1} KG(z)$$

Así:

$$K_p = \lim_{z\to 1}\frac{z}{(z^3-3z+0.12)} = -0.53$$

$$e_p = \frac{1}{1+hK_p} = \frac{1}{1\text{-}3\cdot 0.53} = -1.69$$

Cuando K=2, el sistema **es inestable**

4. A: COMPORTAMIENTO EN RÉGIMEN TRANSITORIO

De acuerdo con las especificaciones dadas, los polos dominantes del sistema en cadena cerrada deben ser:

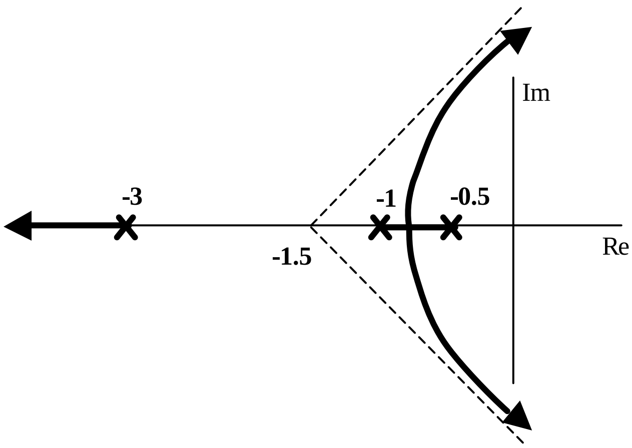
$$\left.\begin{aligned} t_P &= \frac{\pi}{\omega_d} = 1seg; \quad \omega_d = 3.14 \\ M_P &= e^{-\frac{\pi}{\mathrm{tg}(\theta)}} = e^{-\frac{\pi\cdot\sigma}{\omega_d}}; \quad \sigma = 1.05 \end{aligned}\right\} \quad s = -1.05 \pm 3.14j$$

Comprobamos si esos polos dominantes se encuentran sobre el lugar de las raíces del sistema:

Función de transferencia en cadena abierta:

$$\mathrm{G(s)} = \frac{50}{(s+1)\cdot(s+0.5)\cdot(s+3)}$$

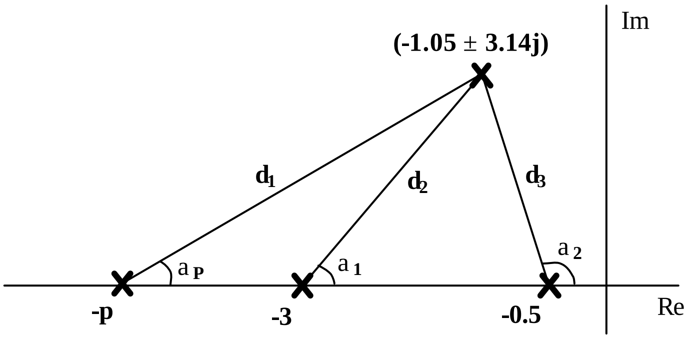
Lugar de las raíces aproximado:



Se puede comprobar cómo el lugar de las raíces no pasa por los puntos –1.05 ± 3.14j, con lo cual no será suficiente un regulador tipo **P** y habrá que plantear la utilización de un regulador tipo **PD**:

$$\mathrm{R(s)} = \mathrm{K_R}\frac{s+z}{s+p}$$

El cero **-z** se elige igual a **-1** para cancelar el segundo polo más significativo en cadena abierta; para calcular el polo **-p** y la constante **K_R** se utiliza el lugar de las raíces:



Criterio del argumento:

$$a_P + a_1 + a_2 = -180$$

Se obtiene:

$$a_P = 21.9 \qquad p = -8.86$$

Criterio del módulo:

$$K = d_1 \cdot d_2 \cdot d_3$$

Se obtiene:

$$K = 99.2 \qquad K_R = \frac{K}{50} = 1.98$$

Por lo tanto el regulador queda:

$$R(s) = 1.98 \cdot \frac{s+1}{s+8.86}$$

B: COMPORTAMIENTO EN RÉGIMEN PERMANENTE

Calculamos el error de posición con el regulador PD calculado:

$$K_P = lim_{s\to 0} G(s) = lim_{s\to 0} 1.98 \cdot \frac{s+1}{s+8.86} \cdot \frac{50}{(s+0.5)(s+1)(s+3)} = 7.45$$

$$e_P = \frac{1}{1+K_P} = 0.12 = 12\%$$

Dado que no se cumplen las especificaciones en régimen permanente, se añade la acción integral:

$$R(s) = 1.98 \cdot \frac{s+1}{s+8.86} \cdot \frac{s+1/T}{s+1/bT}$$

El cero **-1/T** se elige con valor **1/6** de la parte real del polo deseado, esto es **1/T = 1.05/6 = 0.175**

El coeficiente b es igual a la relación entre el valor de $\mathbf{K_P}$ obtenido y el $\mathbf{K_P}$ deseado:

$$5\% = 0.05 = \frac{1}{1+K_{PDES}} \quad \rightarrow \quad K_{PDES} = 19 \quad \rightarrow \quad b = \frac{19}{7.45} = 2.55$$

Por tanto, el regulador **PID** final queda:

$$R(s) = 1.98 \cdot \frac{s+1}{s+8.86} \cdot \frac{s+0.175}{s+0.069}$$