



Div. Ingeniería de Sistemas y Automática  
Grupo de Tecnologías Industriales  
Universidad Miguel Hernández

# Modelo de Captación de Imágenes



**UPM DISAM**  
Grupo de Visión



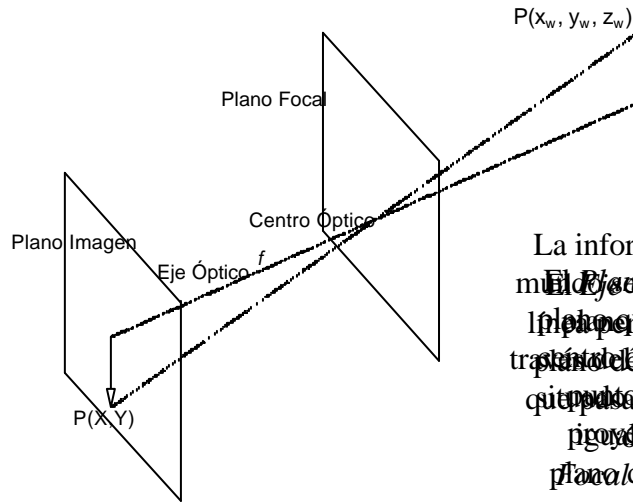
Dpto. Automática, Ingeniería  
Electrónica e Informática Industrial  
Universidad Politécnica de Madrid

## Tabla de Contenidos

- 📄 Modelo de lentes: Pinhole, Delgada y Gruesa
- ↩ Parámetros del Modelo de Captación
- ↩ Sistemas de Coordenadas involucradas
- ↩ Proceso de Calibración

## Modelo de Lente Pinhole

3



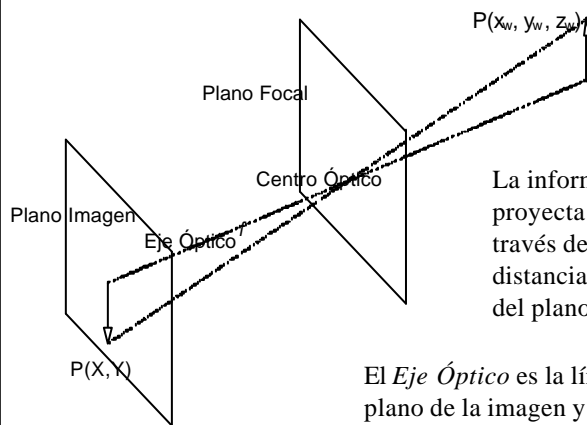
La información 3D del mundo se proyecta en el plano de la imagen a través del Centro Óptico que pasa a una distancia igual a la Distancia Focal del plano de la imagen.

Visión Tridimensional

UPM DISAM

## Modelo de Lente Pinhole

4



La información 3D del mundo se proyecta en el plano de la imagen a través del *Centro Óptico* situado a una distancia igual a la *Distancia Focal* del plano de la imagen.

El *Eje Óptico* es la línea perpendicular al plano de la imagen y que pasa por el centro óptico.

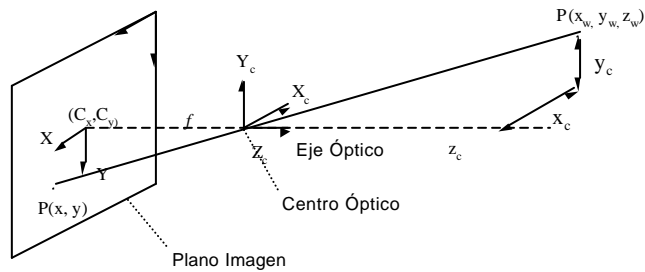
El *Plano Focal* es el plano que pasa por el centro óptico y cuyos puntos no tienen proyección en el plano de la imagen.

Visión Tridimensional

UPM DISAM

## Modelo de Lente Pinhole

5



$$\frac{X}{f} = \frac{X_c}{Z_c}$$

$$\frac{Y}{f} = \frac{Y_c}{Z_c}$$

$$\begin{bmatrix} nX \\ nY \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix}$$

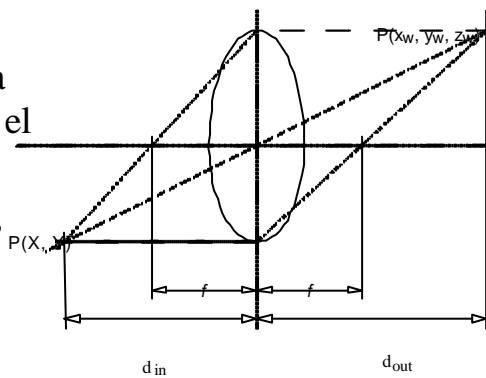
Visión Tridimensional

UPM DISAM

## Modelo Ideal o de Lente Delgada

6

- ↓ Cuando se tiene una irradiación finita en el plano de la imagen.
- ↓ Produce las mismas ecuaciones de proyección.
- ↓ Ley de Gauss



$$\frac{1}{d_{in}} + \frac{1}{d_{out}} = \frac{1}{f}$$

- ↓ Magnificación

$$m = \frac{d_{int}}{d_{out}}$$

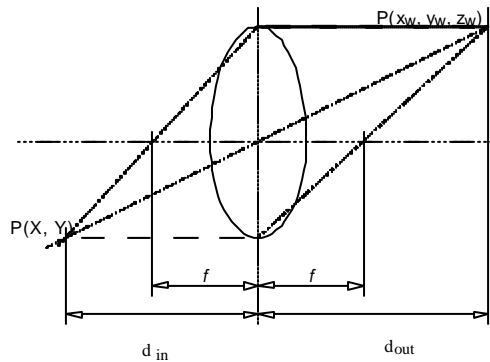
Visión Tridimensional

UPM DISAM

## Modelo Ideal o de Lente Delgada

7

- ↖ Los Rayos ópticos que pasan por el centro de la lente no sufren ninguna deflexión.
- ↖ Los Rayos que entran paralelos al eje óptico de la lente convergen en un punto del eje óptico a una distancia igual a la *distancia focal* del centro de la lente.



Visión Tridimensional

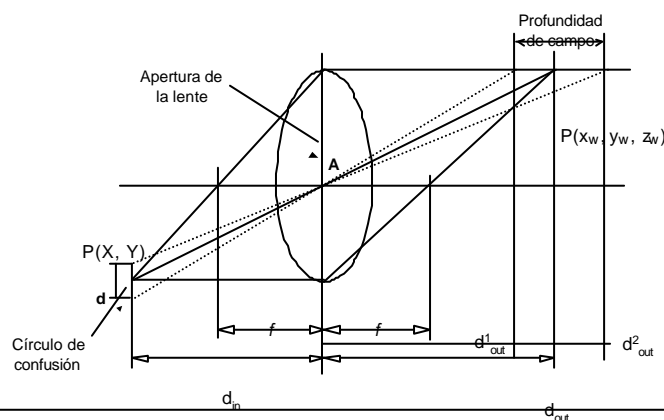
UPM DISAM

## Modelo Ideal o de Lente Delgada

8

- ↖ *Profundidad de Campo.*

$$\text{profundida } d_{\text{campo}} = 2 \frac{d_{\text{out}}}{\text{apertura}_{\text{lente}}} \Phi_{\text{circulo}_{\text{confusion}}}$$



Visión Tridimensional

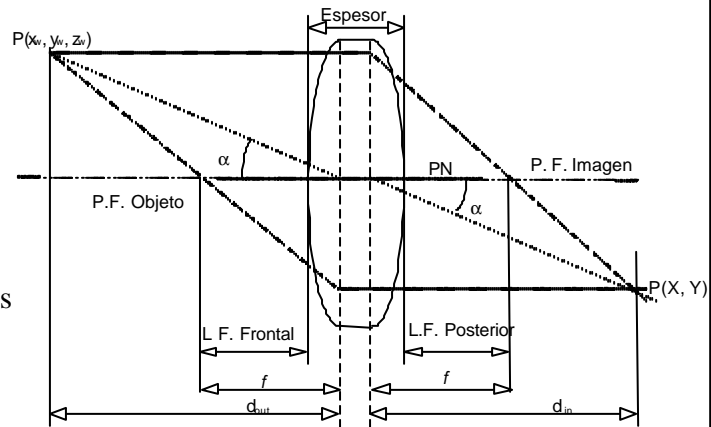
UPM DISAM

## Modelo de Lente Gruesa

9

↓ Puntos de referencia

- ▲ Nodales
- ▲ Principales
- ▲ Focales



Visión Tridimensional

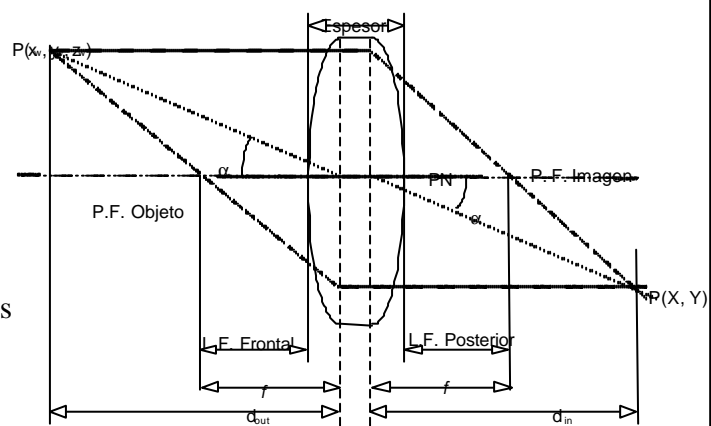
UPM DISAM

## Modelo de Lente Gruesa

10

↓ Puntos de referencia

- ▲ Nodales
- ▲ Principales
- ▲ Focales



- Cualquier rayo luminoso que alcanza el punto nodal
- Para reducir el tamaño de la imagen, se debe colocar el objeto entre el punto focal anterior y el punto focal posterior.
- Para aumentar el tamaño de la imagen, se debe colocar el objeto entre el punto focal posterior y el punto focal anterior.

Visión Tridimensional

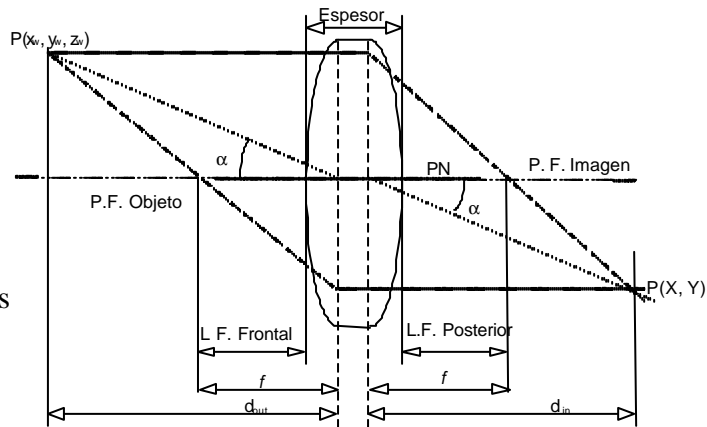
UPM DISAM

## Modelo de Lente Gruesa

11

### ↓ Puntos de referencia

- ▲ Nodales
- ▲ Principales
- ▲ Focales



- Cuando el medio frente al objeto de la lente es el mismo que el medio que está frente a la imagen, a menos que las distancias focales delantera y trasera son iguales a los puntos principales coinciden con los puntos nodales con magnificación unidad.

Visión Tridimensional

UPM DISAM

## Modelo de Lente Gruesa

12

- ↯ Para reducir las aberraciones que se producen en una lente, los sistemas de lentes constan de varios juegos de lentes coaxiales.
- ↯ Produce la misma proyección que el modelo ideal de lente, excepto por un *offset* adicional.
- ↯ El centro óptico es reemplazado por los *puntos nodal delantero y trasero* de la lente.
- ↯ Cualquier rayo luminoso que alcanza el punto nodal delantero, continúa su propagación emergiendo del punto nodal trasero sin cambiar su dirección.

Visión Tridimensional

UPM DISAM

## Modelo de Lente Gruesa

13

- ↖ Los *puntos principales* son dos puntos conjugados situados sobre el eje óptico, intersección sobre éste de los planos con magnificación unidad.
- ↖ Los *puntos focales* son dos puntos situados sobre el eje óptico y conjugados a puntos del infinito.
- ↖ Cuando el medio entre el objeto y la lente tiene el mismo índice de refracción que el medio entre la imagen y la lente, las distancias focales delantera y trasera son iguales y los puntos principales coinciden con los puntos nodales.
- ↖ La *apertura del diafragma* tiene como misión reducir las aberraciones ópticas.

## Tabla de Contenidos

14

- 🖱️ Modelo de lentes: Pinhole, Delgada y Gruesa
- 📄 Parámetros del Modelo de Captación
  - ↖ Parámetros intrínsecos. Distorsiones
  - ↖ Parámetros extrínsecos
- ↖ Sistemas de Coordenadas involucradas
- ↖ Proceso de Calibración

- ↖ **Parámetros Intrínsecos**. Son los que describen la geometría y óptica del conjunto cámara y Tarjeta de Adquisición de Imágenes. Afectan al proceso que un rayo luminoso sigue desde que alcanza la lente del objetivo hasta que impresiona un elemento sensible.
- ↖ **Parámetros Extrínsecos**. Son aquellos que definen la orientación y la posición de la cámara, respecto a un Sistema de Coordenadas conocido, al que se llamará *Sistema de Coordenadas del Mundo*.

- ↖ Distancia focal.
  - ↖ Se define como la distancia que separa el *centro óptico* del plano de la imagen y está dada en mm.
- ↖ Factores de Escala.
  - ↖ Relacionan las coordenadas en mm. del plano de la imagen, con las coordenadas en píxeles de la memoria de almacenamiento.
- ↖ Punto Principal.
  - ↖ Es el Punto de intersección entre el eje óptico de la cámara y el plano de la imagen.

**↖ Coeficientes de Distorsión.**

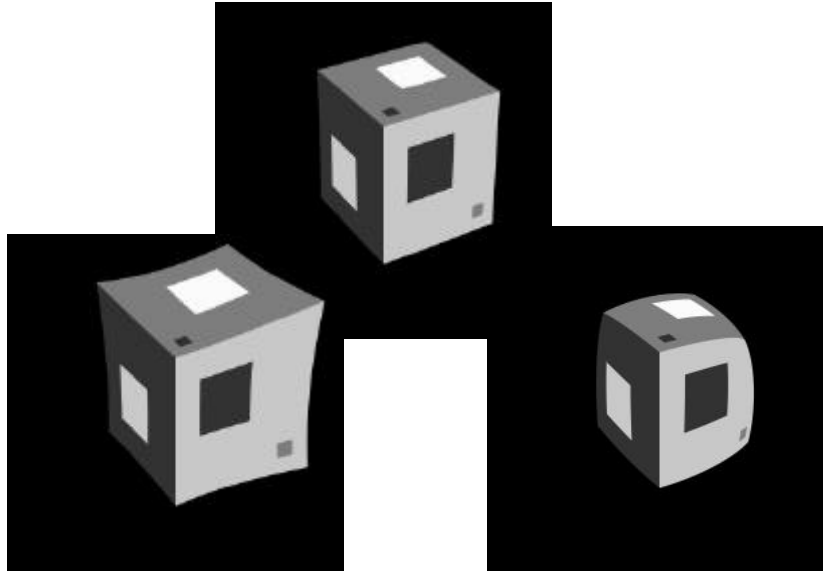
- ↖ La distorsión geométrica afecta a los puntos en el plano de la imagen; como resultado de una serie de imperfecciones en la fabricación y el montaje de las lentes que forman el sistema óptico.
- ↖ La cantidad de error de posición depende de la posición del punto en el plano de la imagen.
- ↖ Tres tipos de distorsión.
  - ↔ Distorsión Radial.
  - ↔ Distorsión Descentral.
  - ↔ Distorsión Prismática.

**↖ Distorsión Radial.**

- ↖ Provocada por defectos en la curvatura de las lentes.

$$d_{xr} = k_1 X_d (X_d^2 + Y_d^2) + O[(X_d, Y_d)^5]$$

$$d_{yr} = k_1 Y_d (X_d^2 + Y_d^2) + O[(X_d, Y_d)^5]$$

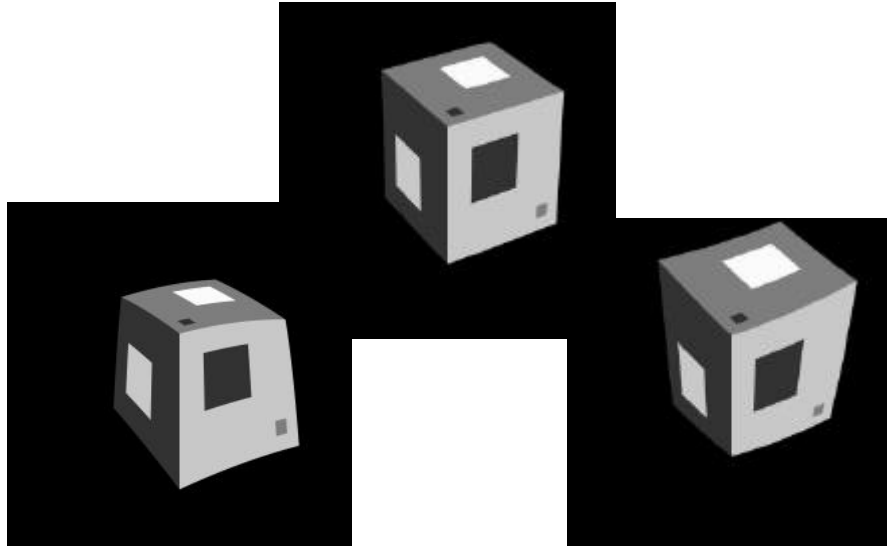


**Distorsión Descentral.**

- ↖ Provocada por la falta de colinealidad de los centros ópticos.
- ↖ Produce desplazamientos radiales y tangenciales.

$$d_{Xd} = p_1 \left( 3X_d^2 + Y_d^2 \right) + 2p_2 X_d Y_d + O \left[ (X_d, Y_d)^4 \right]$$

$$d_{Yd} = 2p_1 X_d Y_d + p_2 \left( X_d^2 + 3Y_d^2 \right) + O \left[ (X_d, Y_d)^4 \right]$$



Descentral  $p_1=0.0$  ;  $p_2=0.04$

↖ Distorsión Prismática.

↖ Se origina por las imperfecciones en las lentes durante su diseño y fabricación, así como en el montaje de la óptica en la cámara.

↖ Causa desplazamientos radiales y tangenciales.

$$d_{x_p} = s_1 (X_d^2 + Y_d^2) + O \left[ (X_d, Y_d)^4 \right]$$

$$d_{y_p} = s_2 (X_d^2 + Y_d^2) + O \left[ (X_d, Y_d)^4 \right]$$

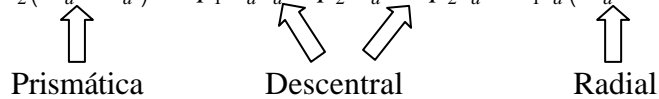
↖ Distorsión Total.

↖ Aunque la distorsión descentral y la distorsión prismática tienen unos coeficientes similares, modelan dos tipos diferentes de distorsiones.

↖ Las dos tienen diferentes *ejes de máxima distorsión tangencial*.

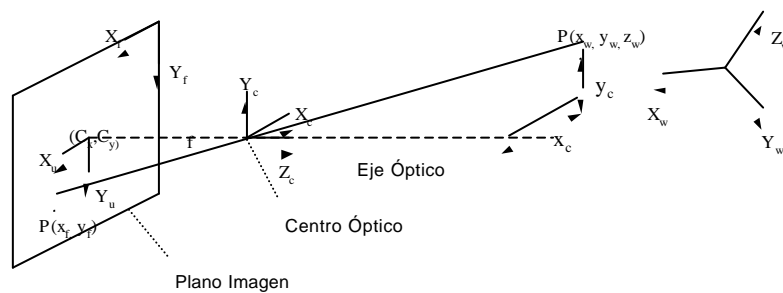
$$d_x(X_d, Y_d) = s_1(X_d^2 + Y_d^2) + 3p_1X_d^2 + p_1Y_d^2 + 2p_2X_dY_d + k_1X_d(X_d^2 + Y_d^2)$$

$$d_y(X_d, Y_d) = s_2(X_d^2 + Y_d^2) + 2p_1X_dY_d + p_2X_d^2 + 3p_2Y_d^2 + k_1Y_d(X_d^2 + Y_d^2)$$

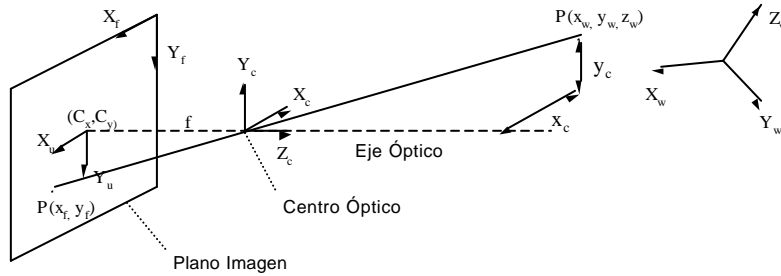


↖ **Parámetros Extrínsecos**. Son aquellos que definen la orientación y la posición de la cámara, respecto a un Sistema de Coordenadas conocido, al que se llamará *Sistema de Coordenadas del Mundo*. Tres parámetros definen el desplazamiento y otros parámetros definen la orientación.

- 🔗 Modelo de lentes: Pinhole, Delgada y Gruesa
- 🔗 Parámetros del Modelo de Captación
- 📄 Sistemas de Coordenadas involucradas
- ↩ Proceso de Calibración

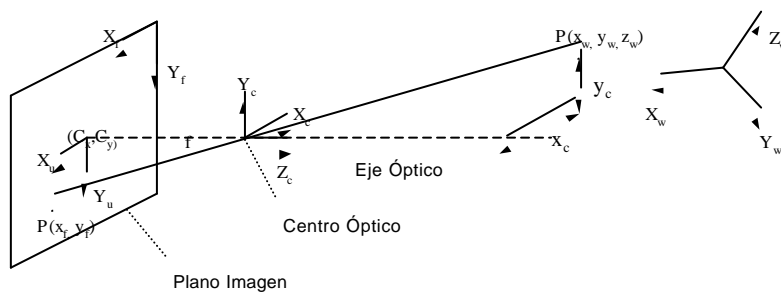


- Coordenadas del mundo  $(O; X_w, Y_w, Z_w)$
- Coordenadas de la cámara  $(O_c; X_c, Y_c, Z_c)$
- Coordenadas centrales de la imagen  $(C_x, C_y; X_u, Y_u)$
- Coordenadas laterales de la imagen  $(O_f; X_f, Y_f)$



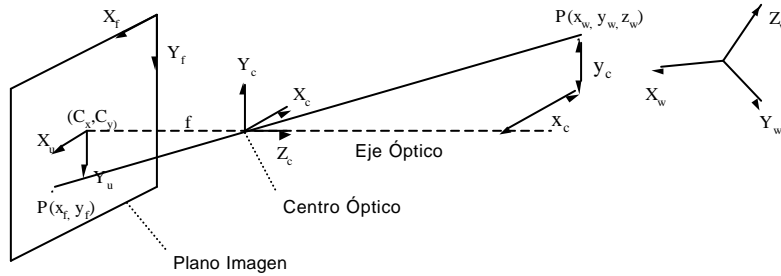
Relación entre: las coordenadas del mundo y de la cámara

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$



Relación entre las coordenadas de la cámara y las centrales de la imagen

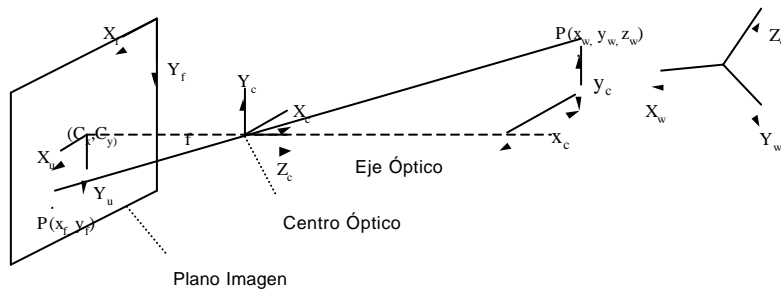
$$\begin{bmatrix} nx_u \\ ny_u \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{bmatrix}$$



Relación entre las coordenadas  
centrales de la imagen:  
Las teóricas (sin distorsión)  
Las reales (con distorsión)

$$x_d = x_u + D_x(x_u, y_u)$$

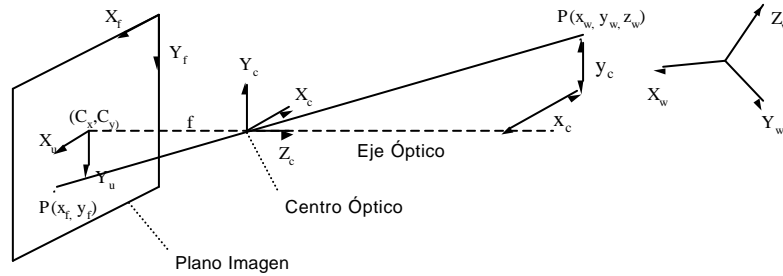
$$y_d = y_u + D_y(x_u, y_u)$$



Relación entre las coordenadas  
laterales y centrales de la imagen

$$x_f = K_x x_d + C_x$$

$$y_f = K_y y_d + C_y$$



$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} n x_u \\ n y_u \\ n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_d &= x_u + D_x(x_u, y_u) & x_f &= K_x x_d + C_x \\ y_d &= y_u + D_y(x_u, y_u) & y_f &= K_y y_d + C_y \end{aligned}$$

Coordenadas centrales de la cámara en función de las coordenadas del mundo y de los parámetros del modelo

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} n x_u \\ n y_u \\ n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n x_u \\ n y_u \\ n f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_u = f \frac{r_{11}x_w + r_{12}y_w + r_{13}z_w + t_x}{r_{31}x_w + r_{32}y_w + r_{33}z_w + t_z} \\ y_u = f \frac{r_{21}x_w + r_{22}y_w + r_{23}z_w + t_y}{r_{31}x_w + r_{32}y_w + r_{33}z_w + t_z} \end{cases}$$

Coordenadas laterales de la cámara en función de las coordenadas del mundo y de los parámetros del modelo

$$\begin{aligned}
 x_f &= K_x x_d + C_x \\
 y_f &= K_y y_d + C_y \\
 x_d &= x_u + D_x(x_u, y_u) \\
 y_d &= y_u + D_y(x_u, y_u)
 \end{aligned}
 \Rightarrow
 \begin{cases}
 x_f = C_x + K_x D_x + K_x x_u \\
 y_f = C_y + K_y D_y + K_y y_u
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 x_f = C_x + K_x D_x + K_x f \frac{r_{11}x_w + r_{12}y_w + r_{13}z_w + t_x}{r_{31}x_w + r_{32}y_w + r_{33}z_w + t_z} \\
 y_f = C_y + K_y D_y + K_y f \frac{r_{21}x_w + r_{22}y_w + r_{23}z_w + t_y}{r_{31}x_w + r_{32}y_w + r_{33}z_w + t_z}
 \end{cases}$$

Relación matricial entre las coordenadas del mundo y las coordenadas laterales de la cámara (sin distorsión).

Matriz de Proyección.

$$\begin{bmatrix} n x_f \\ n y_f \\ n \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} n x_f \\ n y_f \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x & 0 & (C_x + K_x D_x)/f & 0 \\ 0 & K_y & (C_y + K_y D_y)/f & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n x_f \\ n y_f \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x f & 0 & C_x & 0 \\ 0 & K_y f & C_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Relación matricial entre las coordenadas del mundo y las coordenadas laterales de la cámara (sin distorsión ).

Matriz de Proyección.

$$\begin{bmatrix} n x_f \\ n y_f \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x f r_{11} + C_x r_{31} & K_x f r_{12} + C_x r_{32} & K_x f r_{13} + C_x r_{33} & K_x f t_x + C_x t_z \\ K_y f r_{21} + C_y r_{31} & K_y f r_{22} + C_y r_{32} & K_y f r_{23} + C_y r_{33} & K_y f t_y + C_y t_z \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si  $\begin{cases} \bar{r}_1 = [r_{11} & r_{12} & r_{13}] \\ \bar{r}_2 = [r_{21} & r_{22} & r_{23}] \\ \bar{r}_3 = [r_{31} & r_{32} & r_{33}] \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} n x_f \\ n y_f \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x f \bar{r}_1 + C_x \bar{r}_3 & K_x f t_x + C_x t_z \\ K_y f \bar{r}_2 + C_y \bar{r}_3 & K_y f t_y + C_y t_z \\ \bar{r}_3 & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix}$

Relación matricial entre las coordenadas del mundo y las coordenadas laterales de la cámara (sin distorsión ).

Matriz de Proyección.

$$\begin{bmatrix} n x_f \\ n y_f \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x f \bar{r}_1 + C_x \bar{r}_3 & K_x f t_x + C_x t_z \\ K_y f \bar{r}_2 + C_y \bar{r}_3 & K_y f t_y + C_y t_z \\ \bar{r}_3 & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{m}_1 & m_{14} \\ \bar{m}_2 & m_{24} \\ \bar{m}_3 & m_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si  $\begin{cases} \bar{m}_1 = [m_{11} & m_{12} & m_{13}] \\ \bar{m}_2 = [m_{21} & m_{22} & m_{23}] \\ \bar{m}_3 = [m_{31} & m_{32} & m_{33}] \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} n x_f \\ n y_f \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix}$

- 🔗 Modelo de lentes: Pinhole, Delgada y Gruesa
- 🔗 Parámetros del Modelo de Captación
- 🔗 Sistemas de Coordenadas involucradas
- 📄 Proceso de Calibración

↗ **CALIBRACIÓN:** Determinación de los parámetros involucrados en el proceso de captación:

↗ Parámetros intrínsecos:

↔ Factores de escala:  $K_x, K_y$

↔ Distancia focal:  $f$

↔ Punto principal:  $C_x, C_y$

↔ Distorsión:  $D_x, D_y$

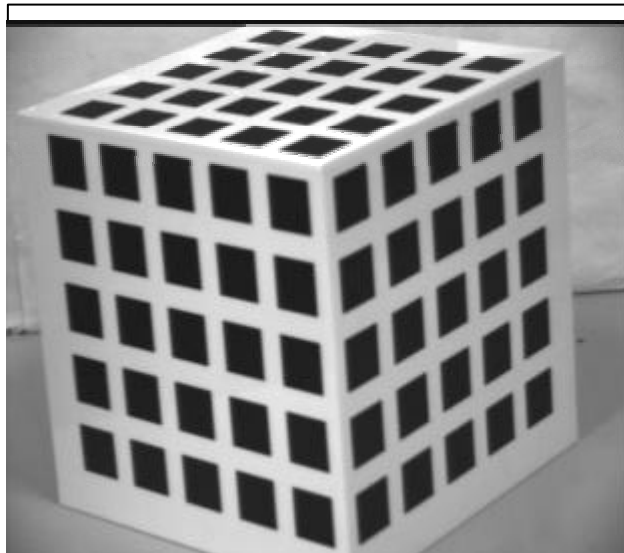
↗ Parámetros extrínsecos:

↔ Vector de traslación:  $T$

↔ Matriz de rotación:  $R$

↳ **Etapas del proceso de calibración**

- ↳ Ecuaciones del sistema: Modelo matemático
- ↳ Obtención de datos de campo :  
Proyección sobre la imagen de puntos 3D conocidos
- ↳ Determinación de los parámetros:  
Resolución de las ecuaciones con los datos de campo



Elemento de calibración

**MÉTODOS DE CALIBRACIÓN**

- ↯ Técnicas aplicadas a la Fotogrametría.
  - ↯ Son necesarios métodos de calibración muy exactos.
  - ↯ Se emplean ópticas profesionales sin problemas de distorsiones.
  - ↯ Conocimiento a priori de los parámetros intrínsecos.
- ↯ Técnicas aplicadas a la Robótica y Automatización.
  - ↯ Son necesarios métodos rápidos y autónomos.
  - ↯ Imágenes con menor resolución.
  - ↯ Se ven afectadas por muchos factores que de forma sistemática causan errores.

**MÉTODOS DE CALIBRACIÓN**

- ↯ Técnicas basadas en Modelos con significado físico
  - ↯ Aproximación clásica de la fotogrametría
  - ↯ Transformación Lineal Directa (DLT)
  - ↯ Restricción de Alineamiento Radial (RAC)
  - ↯ Punto de Desvanecimiento
- ↯ Técnicas basadas en Modelos matemáticos

Técnicas basadas en Modelos con significado físico.

↳ Aproximación clásica de la fotogrametría.

- ⇨ Tienen en cuenta las ecuaciones convencionales de colinealidad del modelo pinhole de cámaras.
- ⇨ Resuelve el problema planteado realizando una optimización no lineal, para ello son necesarios buenos datos iniciales.

↳ Transformación Lineal Directa (DLT)

- ⇨ Se realiza una calibración en dos pasos.
  - ☑ En primer lugar se calculan los elementos de la Matriz de Proyección.
  - ☑ A partir de ella se obtienen los parámetros intrínsecos y extrínsecos.

Técnicas basadas en modelos con significado físico.

↳ Restricción de Alineamiento Radial (RAC)

- ⇨ Incorpora únicamente la distorsión radial, manteniéndose la relación.  $\frac{X_u}{Y_u} = \frac{X_d}{Y_d}$
- ⇨ Se necesita conocer inicialmente una serie de parámetros del conjunto cámara/tarjeta.
- ⇨ El resto de los parámetros se obtiene de forma lineal.

↳ Punto de Desvanecimiento

- ⇨ Calcula separadamente los parámetros intrínsecos y los extrínsecos.
- ⇨ Mediante optimización no lineal se puede incorporar cualquier modelo de distorsión.

↖ Técnicas basadas en un modelo matemático.

⇨ No se tiene ningún significado físico de la cámara.

⇨ La idea básica es la relación entre un punto del espacio 3D y la proyección de ese punto en la imagen 2D.

$$X_{f1} = \frac{\sum_{0 \leq i+j \leq 3} c_{ij}^{(1)} x_{1w}^i y_{1w}^j}{\sum_{0 \leq i+j \leq 3} c_{ij}^{(3)} x_{1w}^i y_{1w}^j}$$

⇨ La distorsión se compensa mediante interpolación.

$$Y_{f1} = \frac{\sum_{0 \leq i+j \leq 3} c_{ij}^{(2)} x_{1w}^i y_{1w}^j}{\sum_{0 \leq i+j \leq 3} c_{ij}^{(3)} x_{1w}^i y_{1w}^j}$$

⇨ Como inconveniente destacar la poca utilidad cuando se desarrollan sistemas activos de visión.

Transformación Lineal Directa (DLT)

↖ Obtención de los elementos de la matriz de proyección.

⇨ Sin considerar las restricciones

⇨ Considerando restricciones

↖ Cálculo de los parámetros intrínsecos y extrínsecos a excepción de la distorsión.

↖ Cálculo de la distorsión (si se modela).

↖ Cálculo de otros errores sistemáticos.

$$\begin{bmatrix} n X_f \\ n Y_f \\ n \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{m}_1 & m_{14} \\ \bar{m}_2 & m_{24} \\ \bar{m}_3 & m_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformación Lineal Directa (DLT)

↳ Obtención de los elementos de la matriz de proyección

$$\begin{bmatrix} n X_f \\ n Y_f \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_f = \frac{m_{11}x_w + m_{12}y_w + m_{13}z_w + m_{14}}{m_{31}x_w + m_{32}y_w + m_{33}z_w + m_{34}} \\ Y_f = \frac{m_{21}x_w + m_{22}y_w + m_{23}z_w + m_{24}}{m_{31}x_w + m_{32}y_w + m_{33}z_w + m_{34}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_{31}x_w X_f + m_{32}y_w X_f + m_{33}z_w X_f + m_{34} X_f - m_{11}x_w - m_{12}y_w - m_{13}z_w - m_{14} = 0 \\ m_{31}x_w Y_f + m_{32}y_w Y_f + m_{33}z_w Y_f + m_{34} Y_f - m_{21}x_w - m_{22}y_w - m_{23}z_w - m_{24} = 0 \end{cases}$$

Sistema  $A\bar{m} = 0 \Rightarrow$  Solución Trivial  $\bar{m} = 0$

Transformación Lineal Directa (DLT)

↳ Calculo de la Matriz de Proyección sin considerar las restricciones.

$$\frac{1}{m_{34}} M = \begin{pmatrix} \frac{m_{11}}{m_{34}} & \frac{m_{12}}{m_{34}} & \frac{m_{13}}{m_{34}} & \frac{m_{14}}{m_{34}} \\ \frac{m_{21}}{m_{34}} & \frac{m_{22}}{m_{34}} & \frac{m_{23}}{m_{34}} & \frac{m_{24}}{m_{34}} \\ \frac{m_{31}}{m_{34}} & \frac{m_{32}}{m_{34}} & \frac{m_{33}}{m_{34}} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow L = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \\ L_5 & L_6 & L_7 & L_8 \\ L_9 & L_{10} & L_{11} & 1 \end{bmatrix}$$

$$X_f = \frac{x_w L_1 + y_w L_2 + z_w L_3 + L_4}{x_w L_9 + y_w L_{10} + z_w L_{11} + 1}$$

$$Y_f = \frac{x_w L_5 + y_w L_6 + z_w L_7 + L_8}{x_w L_9 + y_w L_{10} + z_w L_{11} + 1}$$

Transformación Lineal Directa (DLT)

↪ Cálculo de la Matriz de Proyección sin considerar las restricciones. Con  $n$  puntos (conocidos  $x_{wi}, y_{wi}, z_{wi}, X_{fi}, Y_{fi}$ ) se obtiene un sistema con 11 incógnitas y  $2n$  ecuaciones

$$\begin{pmatrix} x_{wi} & y_{wi} & z_{wi} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_{wi}X_{fi} & -y_{wi}X_{fi} & -z_{wi}X_{fi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{wi} & y_{wi} & z_{wi} & 1 & -x_{wi}Y_{fi} & -y_{wi}Y_{fi} & -z_{wi}Y_{fi} \\ & & & & & \cdot & & & & & \\ & & & & & \cdot & & & & & \\ & & & & & \cdot & & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \\ L_6 \\ L_7 \\ L_8 \\ L_9 \\ L_{10} \\ L_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{fi} \\ Y_{fi} \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

Transformación Lineal Directa (DLT)

↪ A partir de los parámetros  $L$  y considerando el significado físico de la matriz  $M$  se obtienen sus elementos.

$$M = \begin{pmatrix} \frac{L_1}{\sqrt{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2}} & \frac{L_2}{\sqrt{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2}} & \frac{L_3}{\sqrt{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2}} & \frac{L_4}{\sqrt{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2}} \\ \frac{L_5}{\sqrt{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2}} & \frac{L_6}{\sqrt{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2}} & \frac{L_7}{\sqrt{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2}} & \frac{L_8}{\sqrt{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2}} \\ \frac{L_9}{\sqrt{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2}} & \frac{L_{10}}{\sqrt{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2}} & \frac{L_{11}}{\sqrt{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2}} & 1 \end{pmatrix}$$

## Transformación Lineal Directa (DLT)

↖ Cálculo de la matriz de perspectiva considerando las restricciones a que está sujeta.

$$\begin{pmatrix} nXf \\ nYf \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{m}_1 & m_{14} \\ \bar{m}_2 & m_{24} \\ \bar{m}_3 & m_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

sujeto a las restricciones

$$\|\bar{m}_3\| = 1$$

$$(\bar{m}_1 \wedge \bar{m}_3) \cdot (\bar{m}_2 \wedge \bar{m}_3) = 0$$

- ↖ Al emplear la segunda restricción se tiene que resolver un sistema no lineal que es algo que se pretende evitar con este método.

## Transformación Lineal Directa (DLT)

- ↖ Se utiliza exclusivamente la primera restricción.
- ↖ Se resuelve el problema de optimización dividiendo el conjunto de variables en dos, las que están sujetas a restricción y las que no, y empleando las técnicas de multiplicadores de Lagrange.

$$\min_{y,z} \|Cy + Dz\|^2 \text{ sujeto a } \|z\|^2 = 1$$

$$\min_{y,z} R = \|Cy + Dz\|^2 + \mathbf{I} \cdot (1 - \|z\|^2)$$

Transformación Lineal Directa (DLT)

↳ Cálculo de los parámetros intrínsecos y extrínsecos.

$$M = \begin{pmatrix} fK_x \bar{r}_1 + C_x \bar{r}_3 & fK_x t_x + C_x t_z \\ fK_y \bar{r}_2 + C_y \bar{r}_3 & fK_y t_y + C_y t_z \\ \bar{r}_3 & t_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{m}_1 & m_{14} \\ \bar{m}_2 & m_{24} \\ \bar{m}_3 & m_{34} \end{pmatrix}$$

⇔ Cálculo inmediato de  $r_3$  y de  $t_z$

⇔ Coordenadas del Punto Principal

$$\bar{m}_1 \cdot \bar{m}_3^T = (fK_x \bar{r}_1 + C_x \bar{r}_3) \cdot \bar{r}_3^T = fK_x \bar{r}_1 \cdot \bar{r}_3^T + C_x \bar{r}_3 \cdot \bar{r}_3^T = C_x$$

$$\bar{m}_2 \cdot \bar{m}_3^T = (fK_y \bar{r}_2 + C_y \bar{r}_3) \cdot \bar{r}_3^T = fK_y \bar{r}_2 \cdot \bar{r}_3^T + C_y \bar{r}_3 \cdot \bar{r}_3^T = C_y$$

Transformación Lineal Directa (DLT)

↳ Cálculo de los parámetros intrínsecos y extrínsecos.

⇔ Cálculo de las distancias focales en x e y.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \bar{m}_1 \cdot \bar{m}_1^T - \left[ \bar{m}_1 \cdot \bar{m}_3^T \right]^2 &= (fK_x \bar{r}_1 + C_x \bar{r}_3) \cdot (fK_x \bar{r}_1 + C_x \bar{r}_3)^T - \left[ (fK_x \bar{r}_1 + C_x \bar{r}_3) \cdot \bar{r}_3^T \right]^2 = \\ &= fK_x \bar{r}_1 \cdot fK_x \bar{r}_1^T + C_x \bar{r}_3 \cdot fK_x \bar{r}_1^T + fK_x \bar{r}_1 \cdot C_x \bar{r}_3^T + C_x \bar{r}_3 \cdot C_x \bar{r}_3^T - \left[ fK_x \bar{r}_1 \cdot \bar{r}_3^T - C_x \bar{r}_3 \cdot \bar{r}_3^T \right]^2 = \\ &= f^2 K_x^2 + C_x^2 - C_x^2 = f^2 K_x^2 = f_x^2 \Rightarrow f_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \bar{m}_2 \cdot \bar{m}_2^T - \left[ \bar{m}_2 \cdot \bar{m}_3^T \right]^2 &= (fK_y \bar{r}_2 + C_y \bar{r}_3) \cdot (fK_y \bar{r}_2 + C_y \bar{r}_3)^T - \left[ (fK_y \bar{r}_2 + C_y \bar{r}_3) \cdot \bar{r}_3^T \right]^2 = \\ &= fK_y \bar{r}_2 \cdot fK_y \bar{r}_2^T + C_y \bar{r}_3 \cdot fK_y \bar{r}_2^T + fK_y \bar{r}_2 \cdot C_y \bar{r}_3^T + C_y \bar{r}_3 \cdot C_y \bar{r}_3^T - \left[ fK_y \bar{r}_2 \cdot \bar{r}_3^T - C_y \bar{r}_3 \cdot \bar{r}_3^T \right]^2 = \\ &= f^2 K_y^2 + C_y^2 - C_y^2 = f^2 K_y^2 = f_y^2 \Rightarrow f_y \end{aligned}$$

Transformación Lineal Directa (DLT)

↳ Cálculo de los parámetros intrínsecos y extrínsecos.

⇐ Cálculo de los parámetros extrínsecos restantes.

$$\bar{m}_1 = fK_x \bar{r}_1 + C_x \bar{r}_3 \Rightarrow \bar{r}_1 = \frac{\bar{m}_1 - C_x \bar{r}_3}{fK_x}$$

$$\bar{m}_2 = fK_y \bar{r}_2 + C_y \bar{r}_3 \Rightarrow \bar{r}_2 = \frac{\bar{m}_2 - C_y \bar{r}_3}{fK_y}$$

$$m_{14} = fK_x t_x + C_x t_z \Rightarrow t_x = \frac{m_{14} - C_x t_z}{fK_x}$$

$$m_{24} = fK_y t_y + C_y t_z \Rightarrow t_y = \frac{m_{24} - C_y t_z}{fK_y}$$

Transformación Lineal Directa (DLT)

↳ Cálculo de la Distorsión

⇐ Un modelo más completo al utilizado hasta el momento es el siguiente.

$$X_{fsindistorsion} + D_x + dX_f + n_{X_f} = \frac{x_w m_{11} + y_w m_{12} + z_w m_{13} + m_{14}}{x_w m_{31} + y_w m_{32} + z_w m_{33} + m_{34}}$$

$$Y_{fsindistorsion} + D_y + dY_f + n_{Y_f} = \frac{x_w m_{21} + y_w m_{22} + z_w m_{23} + m_{24}}{x_w m_{31} + y_w m_{32} + z_w m_{33} + m_{34}}$$

⇐ Despreciando todos los errores salvo la distorsión.

$$X_f - X_{fsindistorsion} = D_x$$

$$Y_f - Y_{fsindistorsion} = D_y$$

## Transformación Lineal Directa (DLT)

↪ Cálculo de otros errores sistemáticos.

$$\begin{aligned}
 X_f - (X_{fsindistorsion} + D_x) &= p_0 + p_1 X_f + p_2 Y_f + p_3 X_f^2 \\
 &+ p_4 X_f Y_f + p_5 Y_f^2 + p_6 X_f^2 Y_f + p_7 X_f Y_f^2 + p_8 X_f^3 + p_9 Y_f^3 \\
 Y_f - (Y_{fsindistorsion} + D_y) &= q_0 + q_1 Y_f + q_2 X_f + q_3 Y_f^2 \\
 &+ q_4 X_f Y_f + q_5 X_f^2 + q_6 Y_f^2 X_f + q_7 Y_f X_f^2 + q_8 Y_f^3 + q_9 X_f^3
 \end{aligned}$$

↪ Es conveniente calcular en pasos distintos los parámetros intrínsecos y extrínsecos, los coeficientes de distorsión y los coeficientes de otros errores sistemáticos para evitar inestabilidades.

## Restricción de Alineamiento Radial (RAC). Método Tsai

↪ Emplea un modelo de distorsión que solamente tiene en cuenta la distorsión radial.

$$D_x = X_d (k_1 r^2 + k_2 r^4 + \dots)$$

$$D_y = Y_d (k_1 r^2 + k_2 r^4 + \dots)$$

↪ Al existir solamente distorsión Radial se obtiene

$$\frac{x_d}{y_d} = \frac{x_u}{y_u} = \frac{r_{11} x_w + r_{12} y_w + r_{13} z_w + t_x}{r_{21} x_w + r_{22} y_w + r_{23} z_w + t_y}$$

Restricción de Alineamiento Radial (RAC). Método Tsai

- ↖ Se supone conocido  $C_x, C_y, K_y$
- ↖ Determinación de  $|R|, t_x, t_y$ 
  - ↔ Cálculo de coordenadas centrales con distorsión
  - ↔ Cálculo de incógnitas intermedias ( $a_j$ )
  - ↔ Cálculo de  $|t_y|$
  - ↔ Determinación del signo de  $t_y$
  - ↔ Cálculo de  $S_x$
  - ↔ Cálculo de  $|R|, t_x$
- ↖ Determinación de  $f, k_1, t_z$ 
  - ↔ Aproximación inicial de  $f, t_z$
  - ↔ Cálculo iterativo de  $f, k_1, t_z$

Restricción de Alineamiento Radial (RAC). Método Tsai

↔ Cálculo de coordenadas centrales con distorsión

A partir de los puntos :  $(x_f^i, y_f^i)$

Se obtiene 
$$\begin{cases} \hat{x}_d^i = (x_f^i - C_x) = K_x x_d^i \\ \hat{y}_d^i = (y_f^i - C_y) = K_y y_d^i \end{cases}$$

Si se forma el cociente :

$$\frac{\hat{x}_d^i}{\hat{y}_d^i} = \frac{K_x x_d^i}{K_y y_d^i} = \frac{S_x x_u^i}{y_u^i}$$

con 
$$S_x = \frac{K_x}{K_y}$$

Restricción de Alineamiento Radial (RAC). Método Tsai

⇐Cálculo de incógnitas intermedias ( $a_j$ )

Sustituyendo en el cociente

$$\frac{\hat{x}_d^i}{\hat{y}_d^i} = S_x \frac{x_u^i}{y_u^i} = S_x \frac{r_{11}x_w^i + r_{12}y_w^i + r_{13}z_w^i + t_x}{r_{21}x_w^i + r_{22}y_w^i + r_{23}z_w^i + t_y}$$

Si  $t_y \neq 0$

$$\hat{x}_d^i + \underbrace{t_y^{-1}r_{21}x_w^i}_{a_4} + \underbrace{t_y^{-1}r_{22}y_w^i}_{a_5} + \underbrace{t_y^{-1}r_{23}z_w^i}_{a_6} =$$

$$\underbrace{t_y^{-1}S_x r_{11}x_w^i}_{a_1} \hat{y}_d^i + \underbrace{t_y^{-1}S_x r_{12}y_w^i}_{a_2} \hat{y}_d^i + \underbrace{t_y^{-1}S_x r_{13}z_w^i}_{a_3} \hat{y}_d^i + \underbrace{t_y^{-1}S_x t_x}_{a_7} \hat{y}_d^i$$

Restricción de Alineamiento Radial (RAC). Método Tsai

⇐Cálculo de incógnitas intermedias ( $a_j$ )

Se obtiene un sistema con  $n$  ecuaciones y 7 incógnitas

$$\hat{x}_d^i = a_1 x_w^i \hat{y}_d^i + a_2 y_w^i \hat{y}_d^i + a_3 z_w^i \hat{y}_d^i - a_4 x_w^i - a_5 y_w^i - a_6 z_w^i + a_7 \hat{y}_d^i$$

⇐Cálculo de  $|t_y|$

$$t_y = \frac{1}{\sqrt{a_4^2 + a_5^2 + a_6^2}}$$

⇐Determinación del signo de  $t_y$

Para un punto cualquiera (alejado del centro de la imagen) se calcula su proyección sin distorsión, ensayando con el valor positivo y el valor negativo

Restricción de Alineamiento Radial (RAC). Método Tsai

⇔Cálculo de  $S_x$      $S_x = \sqrt{t_y^2 (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}$

⇔Cálculo de  $|R|$ ,  $t_x$

$$\begin{aligned} r_{11} &= a_1 \frac{t_y}{S_x} & r_{12} &= a_2 \frac{t_y}{S_x} & r_{13} &= a_3 \frac{t_y}{S_x} \\ r_{21} &= a_4 t_y & r_{22} &= a_5 t_y & r_{23} &= a_6 t_y \\ r_{31} &= \sqrt{1 - r_{11}^2 - r_{21}^2} & r_{32} &= \sqrt{1 - r_{12}^2 - r_{22}^2} & r_{33} &= \sqrt{1 - r_{13}^2 - r_{23}^2} \\ t_x &= a_7 \frac{t_y}{S_x} \end{aligned}$$

Restricción de Alineamiento Radial (RAC). Método Tsai

↖ Determinación de  $f$ ,  $k_1$ ,  $t_z$

⇔Aproximación inicial de  $f$ ,  $t_z$

☑ Se obtiene  $f$ ,  $t_z$  con distorsión nula, mediante mínimos cuadrados

⇔Cálculo iterativo de  $f$ ,  $k_1$ ,  $t_z$

☑ Optimización no lineal del sistema

$$\hat{x}_d^i = K_x k_1 \left[ (\hat{x}_d^i)^2 + (\hat{y}_d^i)^2 \right] + K_x f \frac{r_{11} x_w^i + r_{12} y_w^i + r_{13} z_w^i + t_x}{r_{31} x_w^i + r_{32} y_w^i + r_{33} z_w^i + t_z}$$

$$\hat{y}_d^i = K_y k_1 \left[ (\hat{x}_d^i)^2 + (\hat{y}_d^i)^2 \right] + K_y f \frac{r_{21} x_w^i + r_{22} y_w^i + r_{23} z_w^i + t_x}{r_{31} x_w^i + r_{32} y_w^i + r_{33} z_w^i + t_z}$$

El proceso de calibración produce parámetros poco robustos, con alto grado de inestabilidad

- ↖ Causas posibles
  - ↖ Modelo matemático incompleto
  - ↖ Errores en la adquisición de los datos
  - ↖ Mal comportamiento de los algoritmos de calibración
- ↖ Consecuencia
  - ↖ Mala precisión en las aplicaciones de visión tridimensional

Restricción de Alineamiento Radial (RAC). Método Tsai

- ↖ Emplea un modelo de distorsión que solamente tiene en cuenta la distorsión radial.

$$D_x = X_d(k_1 r^2 + k_2 r^4 + \dots)$$

$$D_y = Y_d(k_1 r^2 + k_2 r^4 + \dots)$$

- ↖ Al existir solamente distorsión Radial se obtiene

$$\left. \begin{array}{l} \frac{X_u}{Y_u} = \frac{x}{y} \\ \frac{X_u}{Y_u} = \frac{X_d}{Y_d} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{X_d}{Y_d} = \frac{x}{y} \rightarrow \frac{X_d}{Y_d} = \frac{r_{11}x_w + r_{12}y_w + r_{13}z_w + t_x}{r_{21}x_w + r_{22}y_w + r_{23}z_w + t_y}$$

Restricción de Alineamiento Radial (RAC). Método Tsai

➤ Poniendo la expresión anterior en función de las coordenadas en píxeles del plano de la imagen.

$$\left. \begin{aligned} X_d &= S_x^{-1} \cdot X = S_x^{-1} d'_x (X_f - C_x) \\ Y_d &= Y = d'_y (Y_f - C_y) \\ d'_x &= \frac{d_x N_{cx}}{N_{fx}} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{S_x^{-1} X}{Y} = \frac{r_{11} x_w + r_{12} y_w + r_{13} z_w + t_x}{r_{21} x_w + r_{22} y_w + r_{23} z_w + t_y}$$

➤ Dividiendo ahora por  $t_y$  queda la expresión que será necesario desarrollar.

$$\frac{S_x^{-1} X}{Y} = \frac{r_{11} x_w + r_{12} y_w + r_{13} z_w + t_x}{r_{21} x_w + r_{22} y_w + r_{23} z_w + t_y} \rightarrow \frac{S_x^{-1} X}{Y} = \frac{r_{11} t_y^{-1} x_w + r_{12} t_y^{-1} y_w + r_{13} t_y^{-1} z_w + t_x t_y^{-1}}{r_{21} t_y^{-1} x_w + r_{22} t_y^{-1} y_w + r_{23} t_y^{-1} z_w + 1}$$

Restricción de Alineamiento Radial (RAC). Método Tsai

➤ Calibración coplanar de cámaras.

⇐ Suponiendo conocido a priori el factor de incertidumbre de escala pueden calcularse los valores intermedios  $a_i$

$$\left( \begin{array}{cccc} Y_{di} x_{wi} & Y_{di} y_{wi} & Y_{di} & - X_{di} x_{wi} & - X_{di} y_{wi} \end{array} \right) \begin{pmatrix} r_{11} t_y^{-1} \\ r_{12} t_y^{-1} \\ t_x t_y^{-1} \\ r_{21} t_y^{-1} \\ r_{22} t_y^{-1} \end{pmatrix} = X_{di}$$

$$\left( \begin{array}{cccc} Y_{di} x_{wi} & Y_{di} y_{wi} & Y_{di} & - X_{di} x_{wi} & - X_{di} y_{wi} \end{array} \right) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = X_{di}$$

Restricción de Alineamiento Radial (RAC). Método Tsai

↔ Cálculo de  $t_y$

$$t_y^2 = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4D^2}}{2D^2}$$

$$S = a_1^2 + a_2^2 + a_4^2 + a_5^2 \quad D = a_1 a_5 - a_2 a_4$$

↔ Cálculo de la matriz de rotación  $R$  y de  $t_x$ , el resto de los elementos de  $R$ , se obtienen aplicando las propiedades de las matrices de rotación.

$$r_{11} = (t_y^{-1} r_{11}) t_y$$

$$r_{12} = (t_y^{-1} r_{12}) t_y$$

$$r_{21} = (t_y^{-1} r_{21}) t_y$$

$$r_{22} = (t_y^{-1} r_{22}) t_y$$

$$t_x = (t_y^{-1} t_x) t_y$$

Restricción de Alineamiento Radial (RAC). Método Tsai

↔ Cálculo de la distancia focal, coeficiente de distorsión y  $t_z$

$$\left. \begin{aligned} X_{di} &= f \frac{r_{11}x_w + r_{12}y_w + t_x}{r_{31}x_w + r_{32}y_w + t_z} \\ Y_{di} &= f \frac{r_{21}x_{wi} + r_{22}y_{wi} + t_y}{r_{31}x_{wi} + r_{32}y_{wi} + t_z} \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\begin{cases} (r_{11}x_{wi} + r_{12}y_{wi} + t_x)f - X_{di}t_z = (r_{31}x_{wi} + r_{32}y_{wi})X_{di} \\ (r_{21}x_{wi} + r_{22}y_{wi} + t_y)f - Y_{di}t_z = (r_{31}x_{wi} + r_{32}y_{wi})Y_{di} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} (r_{11}x_{wi} + r_{12}y_{wi} + t_x) & -X_{di} \\ (r_{21}x_{wi} + r_{22}y_{wi} + t_y) & -Y_{di} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ t_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_{31}x_{wi} + r_{32}y_{wi})X_{di} \\ (r_{31}x_{wi} + r_{32}y_{wi})Y_{di} \end{pmatrix}$$

Restricción de Alineamiento Radial (RAC). Método Tsai

↩ Calibración de cámaras con un conjunto de puntos no coplanares.

$$\begin{pmatrix} Y_{x_w} & Y_{y_w} & Y_{z_w} & Y_d & -X_{x_w} & -X_{y_w} & -X_{z_w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11}t_y^{-1}s_x \\ r_{12}t_y^{-1}s_x \\ r_{13}t_y^{-1}s_x \\ t_x t_y^{-1}s_x \\ r_{21}t_y^{-1} \\ r_{22}t_y^{-1} \\ r_{23}t_y^{-1} \end{pmatrix} = X$$

$$\begin{pmatrix} Y_{x_w} & Y_{y_w} & Y_{z_w} & Y_d & -X_{x_w} & -X_{y_w} & -X_{z_w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{pmatrix} = X$$

Restricción de Alineamiento Radial (RAC). Método Tsai

↔ Cálculo de  $t_y$        $a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 = \frac{1}{t_y^2}$

↔ Determinación de  $s_x$        $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \frac{s_x^2}{t_y^2}$

↔ Cálculo de la matriz de Rotación y de  $t_x$

$$\begin{aligned} r_{11} &= a_1 \cdot \frac{t_y}{s_x} & r_{12} &= a_2 \cdot \frac{t_y}{s_x} & r_{13} &= a_3 \cdot \frac{t_y}{s_x} \\ r_{21} &= a_5 \cdot t_y & r_{22} &= a_6 \cdot t_y & r_{23} &= a_7 \cdot t_y \\ t_x &= a_4 \cdot t_y \end{aligned}$$

## Restricción de Alineamiento Radial (RAC). Método Tsai

⇔ Cálculo de la distancia focal, coeficiente de distorsión y  $t_z$

$$\left. \begin{aligned} X_{di} &= f \frac{r_{11}x_{wi} + r_{12}y_{wi} + r_{13}z_{wi} + t_x}{r_{31}x_{wi} + r_{32}y_{wi} + r_{33}z_{wi} + t_z} \\ Y_{di} &= f \frac{r_{21}x_{wi} + r_{22}y_{wi} + r_{23}z_{wi} + t_y}{r_{31}x_{wi} + r_{32}y_{wi} + r_{33}z_{wi} + t_z} \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\begin{cases} (r_{11}x_{wi} + r_{12}y_{wi} + r_{13}z_{wi} + t_x)f - X_{di}t_z = (r_{31}x_{wi} + r_{32}y_{wi} + r_{33}z_{wi})X_{di} \\ (r_{21}x_{wi} + r_{22}y_{wi} + r_{23}z_{wi} + t_y)f - Y_{di}t_z = (r_{31}x_{wi} + r_{32}y_{wi} + r_{33}z_{wi})Y_{di} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} (r_{11}x_{wi} + r_{12}y_{wi} + r_{13}z_{wi} + t_x) & -X_{di} \\ (r_{21}x_{wi} + r_{22}y_{wi} + r_{23}z_{wi} + t_y) & -Y_{di} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ t_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_{31}x_{wi} + r_{32}y_{wi} + r_{33}z_{wi})X_{di} \\ (r_{31}x_{wi} + r_{32}y_{wi} + r_{33}z_{wi})Y_{di} \end{pmatrix}$$

El proceso de calibración produce parámetros poco robustos, con alto grado de inestabilidad

↖ Causas posibles

- ↖ Modelo matemático incompleto
- ↖ Errores en la adquisición de los datos
- ↖ Mal comportamiento de los algoritmos de calibración

↖ Consecuencia

- ↖ Mala precisión en las aplicaciones de visión tridimensional