

VISIÓN 3D

Estructura a partir del Movimiento:
Optical Flow



Ingeniería de Sistemas y Automática

Universidad Miguel Hernández

Tabla de Contenidos

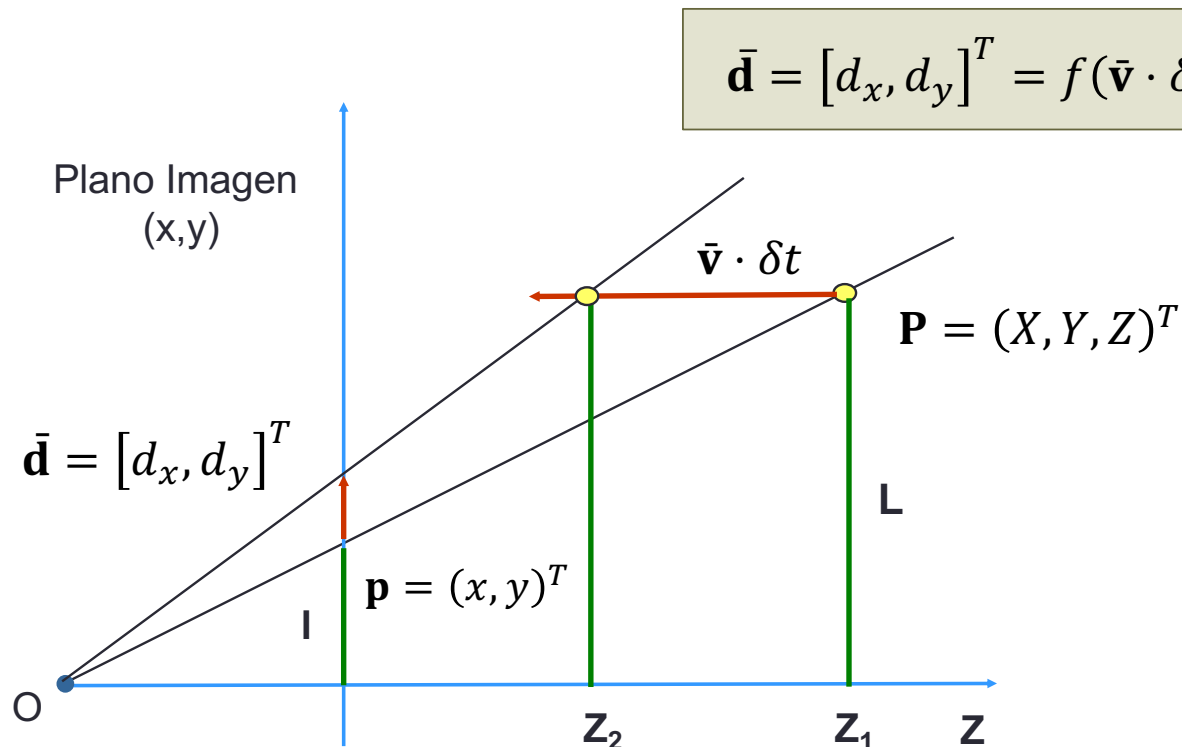
- **Introducción**
- El campo de movimiento (“Motion-Field”)
- Flujo óptico
- Estimación del campo de movimiento
- Reconstrucción 3D

Introducción

- Datos de entrada: **Secuencias de Imágenes en diferentes instantes de tiempo**
- ¿Qué información se puede obtener de los cambios que hay en una secuencia de imágenes tomadas en diferentes instantes de tiempo?
- Suponiendo iluminación constante, los cambios en la imágenes pueden ser producidos por el movimiento relativo entre cámara y escena:
 - Movimiento de la cámara frente a una escena estática
 - Movimiento de objetos de la escena frente a una cámara estacionaria
 - Movimiento de cámara y objetos de la escena respecto a una referencia externa

Importancia del Movimiento visual

- Razones para introducir variable tiempo al procesamiento de imágenes:
 - Movimiento Aparente de los objetos en la imagen $\rightarrow$ entender la estructura de los objetos y su movimiento en el espacio 3D
 - Sistemas visuales biológicos utilizan el movimiento visual para inferir propiedades del espacio 3D con un pequeño conocimiento a priori del mismo (tiempo de colisión)
- Ejemplo :



$$\bar{\mathbf{d}} = [d_x, d_y]^T = f(\bar{\mathbf{v}} \cdot \delta t) = f'(Z_2 - Z_1)$$

Problema del análisis del movimiento

- **Correspondencia:** ¿qué elementos entre diferentes imágenes de la secuencia corresponden a la misma primitiva 3D? (**Campo de Movimiento**)
 - Métodos de resolución del problema de correspondencia :
 - **Métodos diferenciales:** medidas densas, calculadas para cada punto de la imagen. Secuencia de muestreo de imágenes alta. Flujo Óptico
 - **Métodos de correspondencia de características:** medidas dispersas, calculadas sólo para un conjunto de puntos de la imagen. Filtro de Kalman. Utilizan el flujo óptico como estimación inicial.
- **Reconstrucción:** supone obtener los mapas de velocidad de los objetos en el escena 3D

Problema del análisis del movimiento

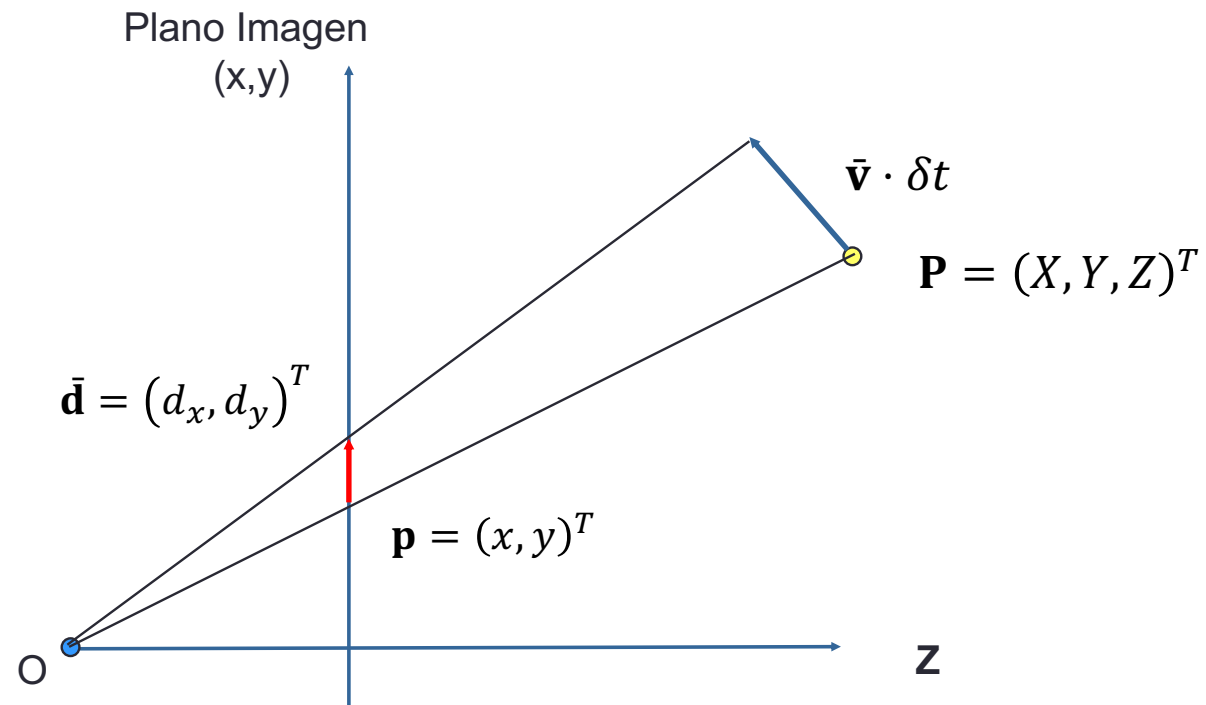
- Restricción : solo hay un movimiento rígido relativo entre la cámara y la escena observada, y las condiciones de iluminación no cambian.
 - Ejemplo:
 - SI: vistas de un edificio por un observador en movimiento
 - NO: secuencias de fútbol, tráfico,..
 - NO: objetos deformables.
- Varios objetos se mueven. Aparece el problema de la Segmentación.
 - ¿Cuáles son las regiones de la imagen que corresponden a objetos diferentes moviéndose?
 - Planteamientos:
 - Segmentar → Correspondencia
 - Correspondencia → Segmentar.

Tabla de Contenidos

- Introducción
- El campo de movimiento (“Motion-Field”)
- Flujo óptico
- Estimación del campo de movimiento
- Reconstrucción 3D

El campo de movimiento

- Campo de movimiento “Motion Field” :
 - Definición : Es el campo de vectores de velocidades 2D de los puntos de la imagen, inducido por el movimiento relativo entre la cámara y la escena observada.
 - Se puede entender como la proyección del campo de velocidades 3D en el plano de la imagen.



El campo de movimiento

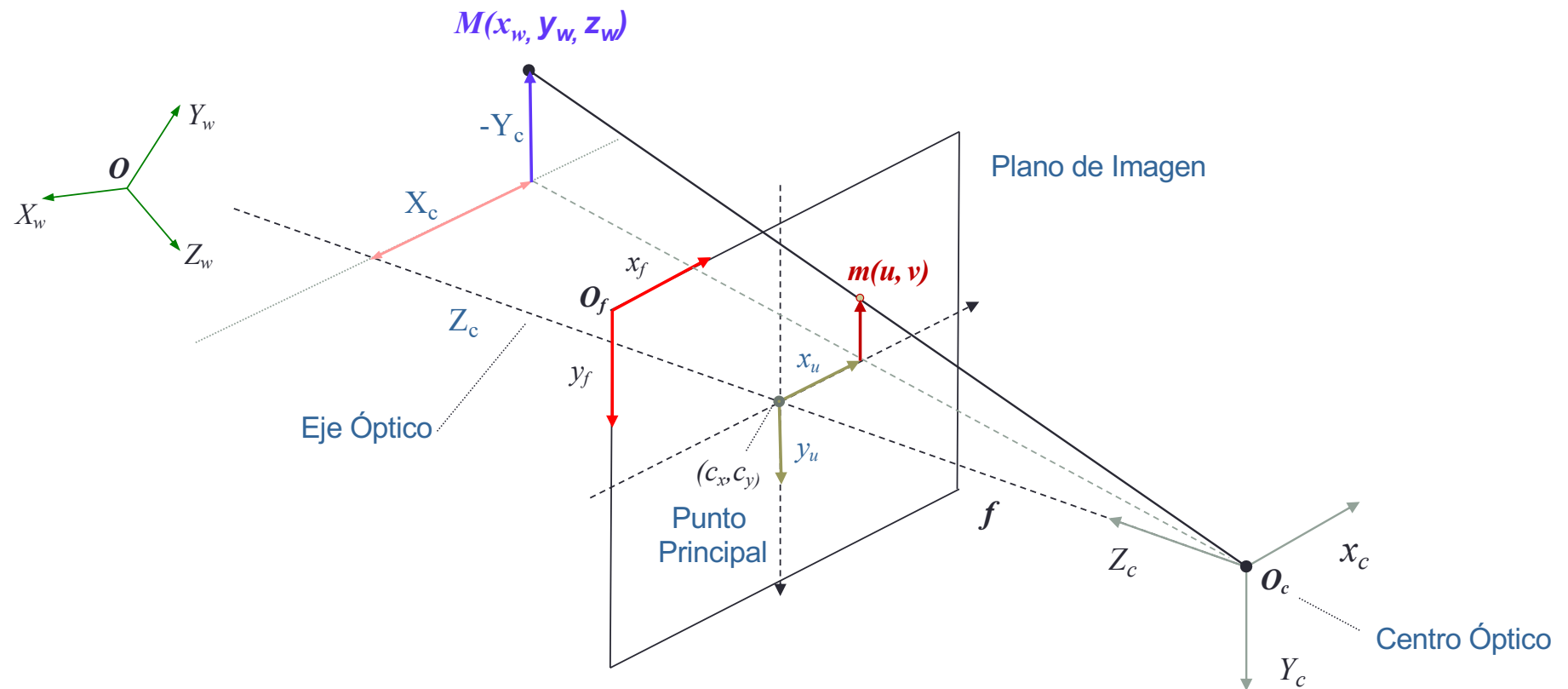
- Ejemplo:



Video

El campo de movimiento

- Las coordenadas de imagen las consideraremos respecto al S.R. centrado en el centro óptico (punto principal).
- Consideraremos los parámetros intrínsecos conocidos



El campo de movimiento

- Ecuaciones de proyección sin considerar distorsión:
 - Coordenadas normalizadas:

$$\tilde{m} \cong A [I \ 0] \tilde{M}_c \Rightarrow \tilde{p} = A^{-1} \tilde{m} \cong [I \ 0] \tilde{M}_c$$

$$\begin{bmatrix} n \ x \\ n \ y \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} x &= \frac{X_c}{Z_c} \\ y &= \frac{Y_c}{Z_c} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \bar{p}(t) &= \frac{\bar{P}(t)}{Z_c} \\ \bar{p} &= [x, y, 1]^T \\ \bar{P} &= [X_c, Y_c, Z_c]^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{p}(t) &= \frac{\bar{P}(t)}{\bar{P}(t) \cdot \bar{k}} \\ \bar{k} &= [0, 0, 1]^T \end{aligned}$$

El campo de movimiento

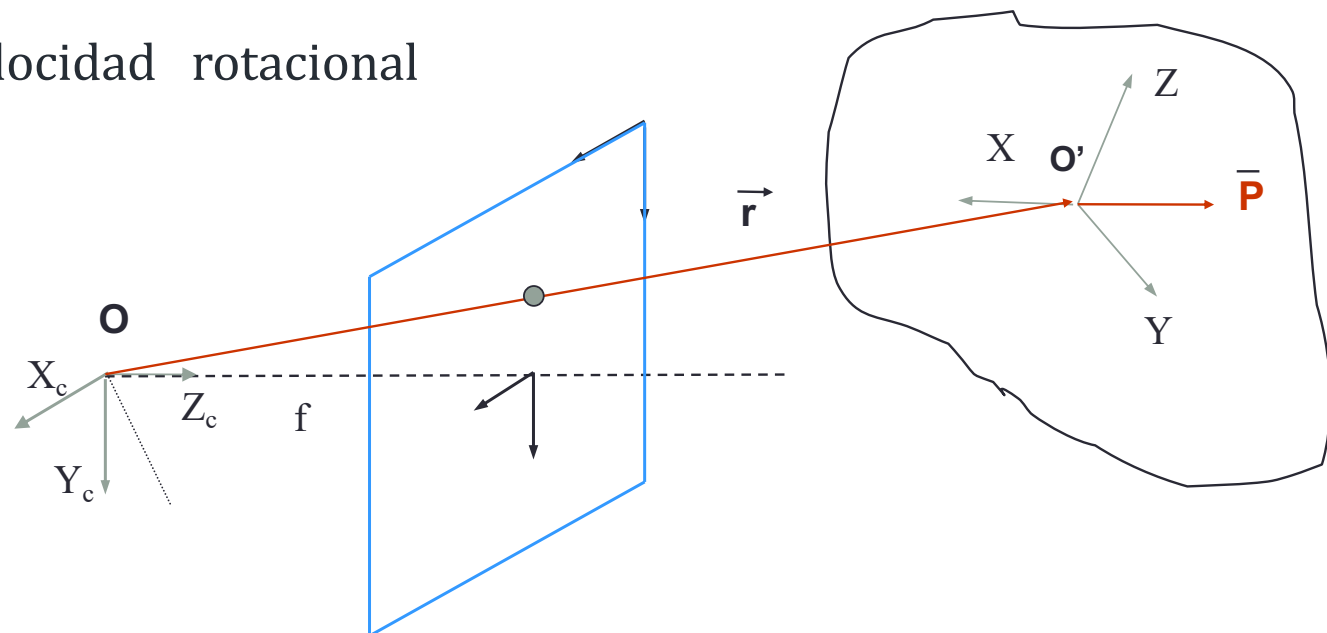
- El movimiento relativo entre el punto **P** y la cámara lo descomponemos en una traslación y una rotación:
 - Cinemática de un sólido rígido:

$$\bar{V} = -\frac{d\overline{OP}(t)}{dt} = -\bar{T} - \bar{\omega} \times \overline{O'P}$$

$$\begin{aligned} V_x &= -T_x - \omega_y Z + \omega_z Y \\ V_y &= -T_y - \omega_z X + \omega_x Z \\ V_z &= -T_z - \omega_x Y + \omega_y X \end{aligned}$$

$\bar{T}$: velocidad traslacional

$\bar{\omega}$: velocidad rotacional



El campo de movimiento

- Motion field: derivando respecto al tiempo:

$$\bar{v}(t) = \frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{P}}{\bar{Z}} \right) = \frac{Z\bar{V} - V_z\bar{P}}{Z^2}$$



de forma más compacta

$$\bar{v}(t) = \frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{(\bar{P} \cdot \bar{k}) \bar{V} - (\bar{V} \cdot \bar{k}) \bar{P}}{(\bar{P} \cdot \bar{k})^2}$$

$$\bar{v}(t) = \frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{1}{Z(t)^2} (\bar{P}(t) \times \bar{V}(t)) \times \bar{k}$$

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = (\bar{a} \cdot \bar{c}) \bar{b} - (\bar{b} \cdot \bar{c}) \bar{a}$$

El campo de movimiento

- Tomando componentes :

$$v_x = \frac{T_z x - T_x}{Z} - \omega_y + \omega_z y + \omega_x x y - \omega_y x^2$$

$$v_y = \frac{T_z y - T_y}{Z} + \omega_x - \omega_z x - \omega_y x y + \omega_x y^2$$

- Dos componentes: que dependen de la traslación y la rotación respectivamente

$$v_x^T = \frac{T_z x - T_x}{Z}$$

$$v_x^\omega = -\omega_y f + \omega_z y + \omega_x x y - \omega_y x^2$$

$$v_y^T = \frac{T_z y - T_y}{Z}$$

$$v_y^\omega = \omega_x f - \omega_z x - \omega_y x y + \omega_x y^2$$

El campo de movimiento

- La componente del campo de movimiento en dirección del eje óptico es cero

$$\bar{v} = [v_x, v_y]^T \Rightarrow \bar{v} = [v_x, v_y, 0]^T \quad \bar{p} = [x, y, 1]^T$$

- De las ecuaciones anteriores obtenemos que $\bar{\omega}$ (vel. angular) queda desacoplada de Z (profundidad)
 - La parte del campo de movimiento que depende de la velocidad angular no tiene implícita información sobre la profundidad

$$v_x^T = \frac{T_z x - T_x}{Z} \quad v_y^T = \frac{T_z y - T_y}{Z}$$

El campo de movimiento

- CASOS : Traslación Pura ($\bar{\omega} = 0$)

- T_z distinto de cero.

$$v_x^T = \frac{T_z x - T_x}{Z} \quad v_y^T = \frac{T_z y - T_y}{Z}$$

- Llamamos

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{p}_0 = [x_0, y_0]^T \text{ Punto de Fuga} \\ x_0 = \frac{T_x}{T_z} \quad y_0 = \frac{T_y}{T_z} \end{array} \right.$$



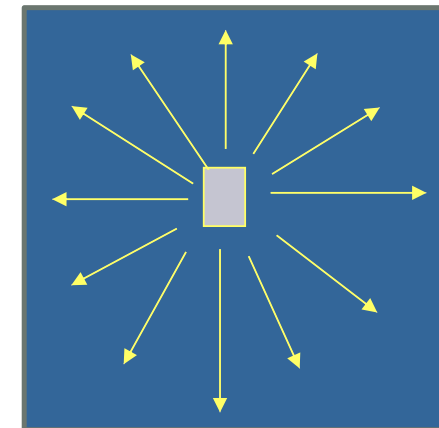
$$v_x^T = (x - x_0) \frac{T_z}{Z}$$

$$v_y^T = (y - y_0) \frac{T_z}{Z}$$

- El campo de movimiento de una traslación pura es **RADIAL**. Vectores en forma radial desde un punto de fuga $\bar{p}_0$

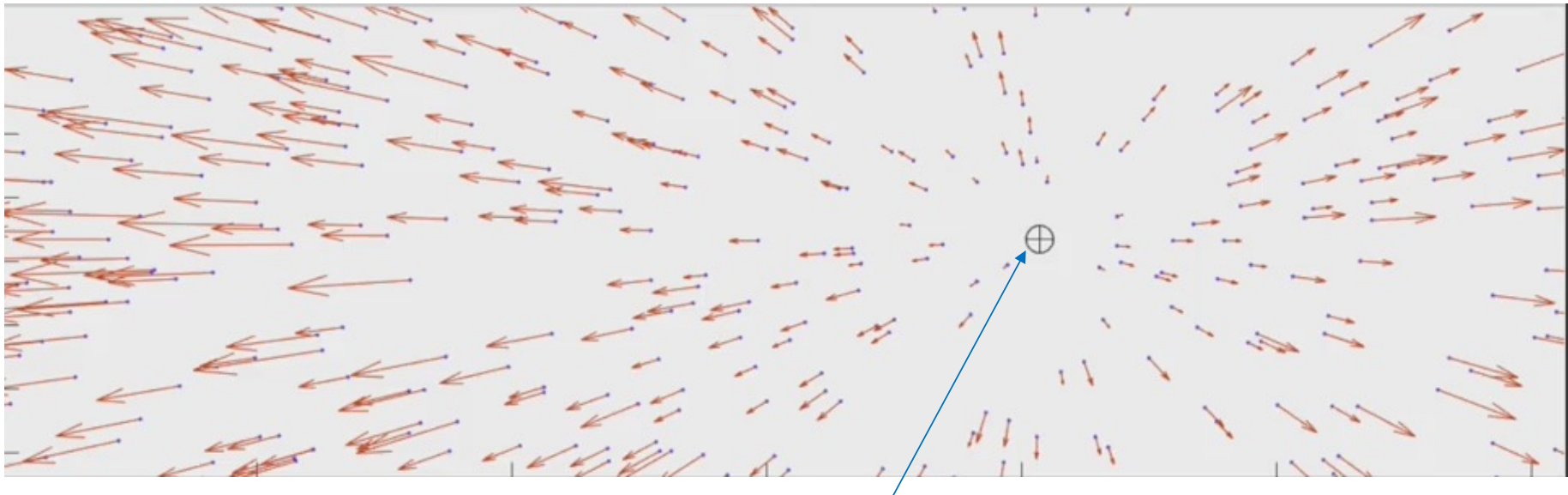
- Si $T_z < 0 \Rightarrow \bar{p}_0$ es el foco de expansión
- Si $T_z > 0 \Rightarrow \bar{p}_0$ es el foco de contracción

- $\bar{p}_0$ es la intersección del rayo paralelo al vector de traslación con el plano de la imagen



El campo de movimiento

- Traslación Pura ($\bar{\omega} = 0$)
 - La longitud de $\bar{v} = \bar{v}(p)$ es proporcional a la distancia entre $\bar{p}$ y $\bar{p}_0$ (punto de fuga), e inversamente proporcional a la profundidad del punto $\bar{P}$ en el espacio 3D



Punto de Fuga

$$v_x^T = (x - x_0) \frac{T_z}{Z}$$

$$v_y^T = (y - y_0) \frac{T_z}{Z}$$

$$\begin{cases} \bar{p}_0 = [x_0, y_0]^T \\ x_0 = \frac{T_x}{T_z} & y_0 = \frac{T_y}{T_z} \end{cases}$$

El campo de movimiento

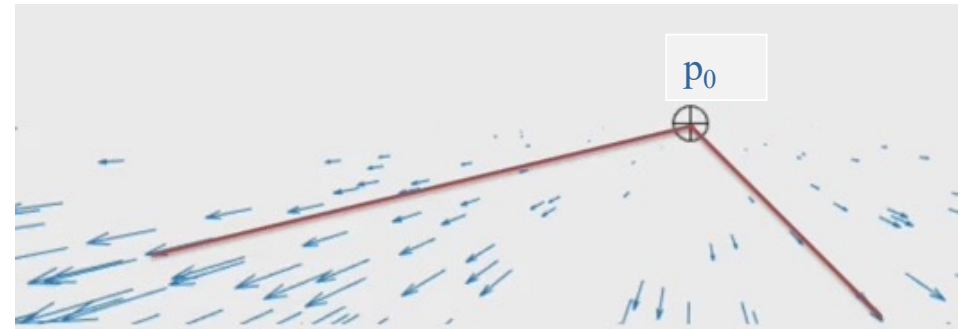
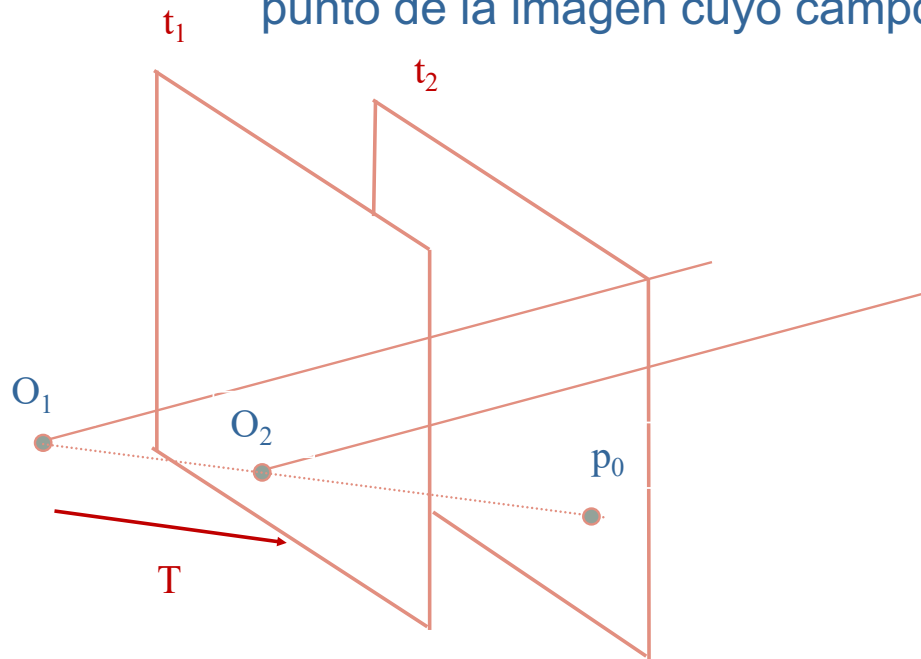
- Ejemplo:



Video

El campo de movimiento

- Epipolo instantáneo
 - Es posible localizar $\bar{p}_0$ sin un conocimiento apriori de los parámetros intrínsecos de la cámara.
 - Si movemos la cámara de O_1 a O_2 con una traslación pura, $\bar{p}_0$ será aquel punto de la imagen cuyo campo de movimiento sea nulo.



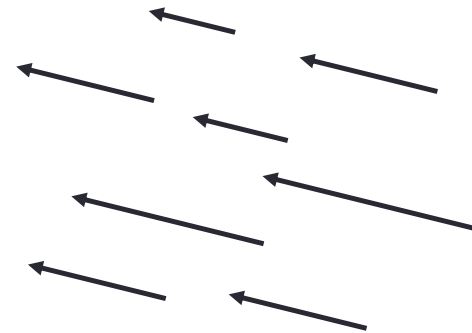
Epipolo Instantáneo

$$\begin{cases} \bar{p}_0 = [x_0, y_0]^T \\ x_0 = \frac{T_x}{T_z} & y_0 = \frac{T_y}{T_z} \end{cases}$$

El campo de movimiento

- Traslación Pura ($\bar{\omega} = 0$) $v_x^T = \frac{T_z x - T_x}{Z}$ $v_y^T = \frac{T_z y - T_y}{Z}$
- Si $T_z = 0$, todos los vectores del campo de movimiento son paralelos y sus longitudes son inversamente proporcionales a la profundidad.
- El epipolo instantáneo $\bar{p}_0$ está en el infinito

$$v_x^T = -\frac{T_x}{Z} \quad v_y^T = -\frac{T_y}{Z}$$



El campo de movimiento

- Traslación Pura ($\bar{\omega} = 0$)
 - **Tiempo de colisión** a partir del flujo óptico (*motion field*)
 - A partir del flujo óptico y el epipolo instantáneo $\bar{p}_0$ podemos calcular el tiempo de colisión (usado por aves e insectos para determinar la velocidad de vuelo)

$$v_x^T = (x - x_0) \frac{T_z}{Z}$$

$$v_y^T = (y - y_0) \frac{T_z}{Z}$$

$$\bar{v}^T = \frac{T_z}{Z} \begin{bmatrix} (x - x_0) \\ (y - y_0) \end{bmatrix}$$

$$TTC(segundos) = \frac{Z}{T_z} = \frac{\|\bar{p} - \bar{p}_0\|}{\|\bar{v}^T\|}$$

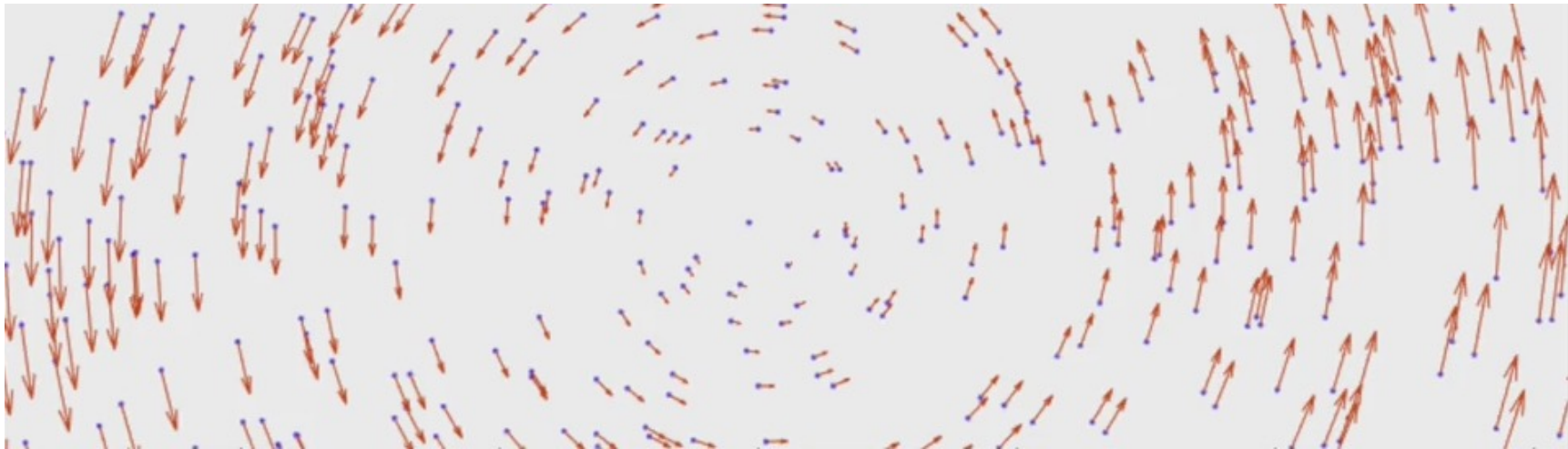
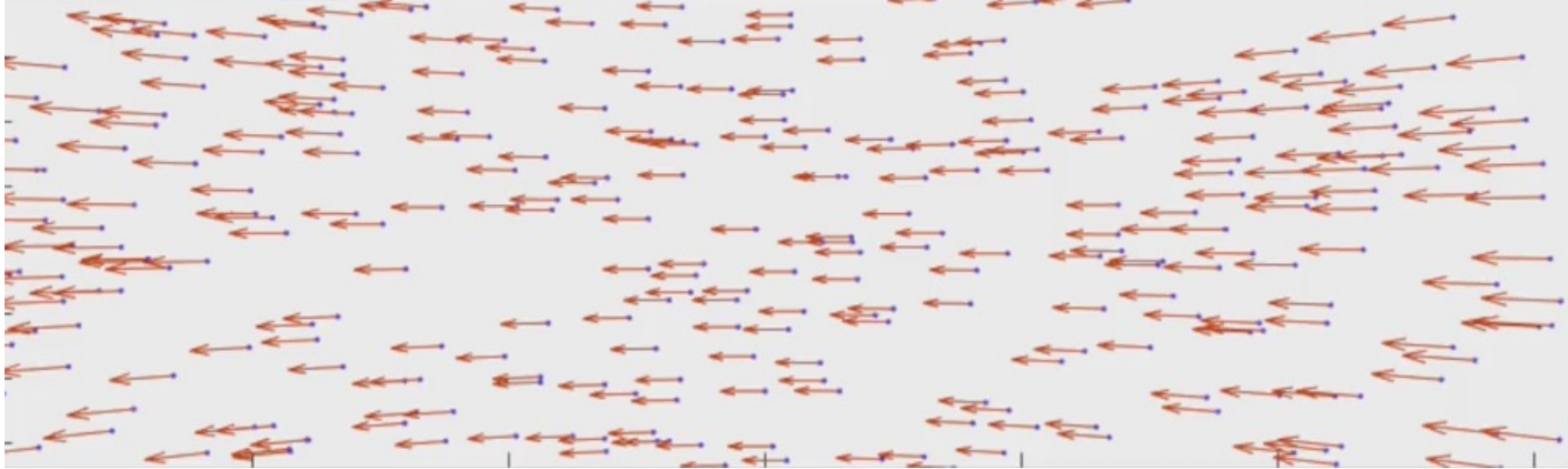
$$\bar{p} = [x, y]^T$$

$$\bar{p}_0 = [x_0, y_0]^T$$

Para puntos a la misma distancia del punto de fuga, el tiempo de colisión es inversamente proporcional a la longitud del flujo óptico

El campo de movimiento

- Rotación pura ($\bar{T} = 0$)



$$v_x = -\omega_y + \omega_z y + \omega_x xy - \omega_y x^2$$

$$v_y = \omega_x - \omega_z x - \omega_y xy + \omega_x y^2$$

El campo de movimiento

- Ejemplo:



Video

El campo de movimiento

- Movimiento de un plano
 - Observamos una superficie plana

$$\begin{aligned} \bar{n}^T \cdot \bar{P} &= d \\ \bar{n}^T &= [n_x, n_y, n_z] \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \bar{p} = \frac{\bar{P}}{Z} \quad \longrightarrow \quad (n_x x + n_y y + n_z) \cdot Z = d$$

- $\bar{n}$ $\rightarrow$ Normal al plano
- d $\rightarrow$ distancia del plano al centro de proyección.
- La superficie plana tiene un movimiento $(\bar{T}, \bar{\omega})$
- Despejando Z y sustituyendo en la ecuación general del campo de movimiento:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{T_z x - T_x}{Z} - \omega_y + \omega_z y + \omega_x x y - \omega_y x^2 \\ v_y &= \frac{T_z y - T_y}{Z} + \omega_x - \omega_z x - \omega_y x y + \omega_x y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{1}{d} (a_1 x^2 + a_2 x y + a_3 x + a_4 y + a_5) \\ v_y &= \frac{1}{d} (a_1 x y + a_2 y^2 + a_6 y + a_7 x + a_8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= -d \omega_y + T_z n_x & a_2 &= d \omega_x + T_z n_y \\ a_3 &= T_z n_z - T_x n_x & a_4 &= d \omega_z - T_x n_y \\ a_5 &= -d \omega_y - T_x n_z & a_6 &= T_z n_z - T_y n_y \\ a_7 &= -d \omega_z - T_y n_x & a_8 &= d \omega_x - T_y n_z \end{aligned}$$

El campo de movimiento

- Movimiento de un plano
- Conclusiones :
 - El campo de movimiento de una superficie plana, es un polinomio cuadrático en coordenadas de la imagen
 - Debido a la simetría espacial de los coeficientes del polinomio, el mismo campo de velocidades puede ser producido por diferentes superficies planares bajo diferentes movimientos en el espacio
 - Para recuperar el movimiento en el espacio, no podemos basarnos en puntos coplanares.

El campo de movimiento

- Problema de Apertura:
 - La imagen es una proyección limitada de la escena. No siempre proporciona suficiente información acerca del movimiento global de un objeto

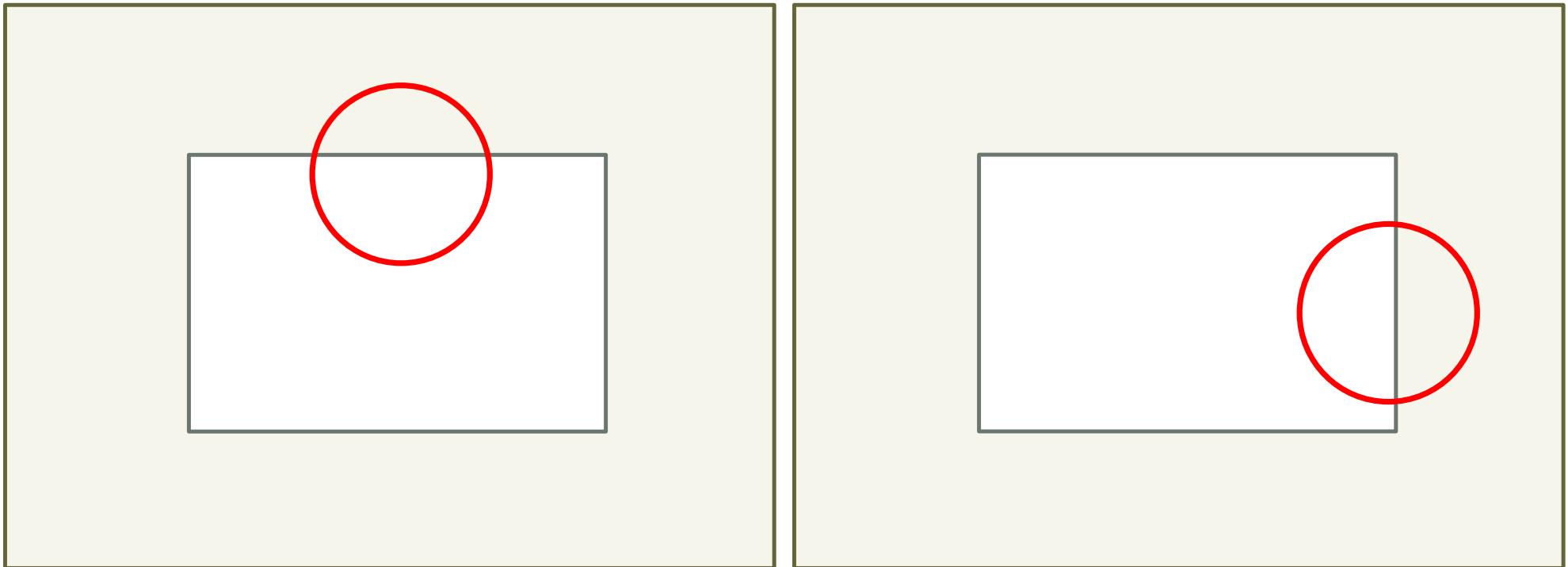


Tabla de Contenidos

- Introducción
- El campo de movimiento (“Motion-Field”)
- **Flujo óptico**
- Estimación del campo de movimiento
- Reconstrucción 3D

Flujo Óptico

- Se quiere estimar el campo de movimiento en secuencias de imágenes, a partir de las variaciones espaciales y temporales de Intensidad de la imagen

- Ecuación de continuidad de Intensidad de la imagen
 - **E** (Intensidad aparente de la imagen) permanece constante
 $dE/dt = 0$

$$E(x(t), y(t), t) \Rightarrow \frac{dE(x(t), y(t), t)}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial E}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

$$(\nabla E)^T \cdot \bar{v} + E_t = 0 \quad \text{donde } E_t = \frac{dE}{dt}$$

- Problema de apertura: “La componente del campo de movimiento en la dirección ortogonal al gradiente espacial de la imagen, no está restringida por la ecuación de continuidad de intensidad de la imagen”

Flujo Óptico

- Flujo Óptico es un vector $\bar{v}$ sujeto a la restricción anterior (ecuación continuidad de intensidad), y se define como el movimiento aparente del patrón de intensidad de la imagen.
- Formalmente expresa que un punto de un objeto en movimiento se proyectará en puntos diferentes de la imagen en instantes diferentes, pero la intensidad irradiada es la misma en ambos puntos proyectados.

$$\nabla_x E \cdot v_x + \nabla_y E \cdot v_y + \nabla_t E = 0$$

$$I_1(x, y) = I_2(x + d_x, y + d_y)$$

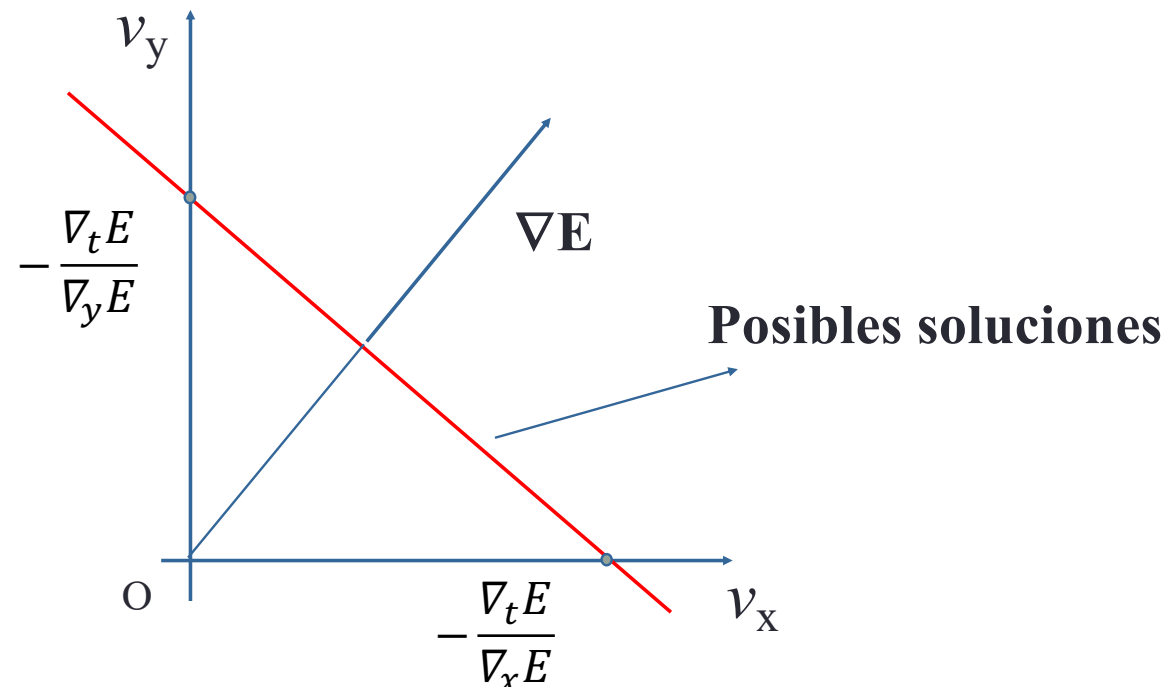
$$(d_x, d_y) = \bar{v}(x, y) \cdot \delta t$$

Flujo Óptico

- Solución de la ecuación de Continuidad de Intensidad:

$$\nabla_x E \cdot v_x + \nabla_y E \cdot v_y + \nabla_t E = 0$$

- Recta en el espacio de velocidades
- Solución ambigua debido al problema de apertura
- Es necesario imponer restricciones



Flujo Óptico

- Flujo Óptico y Campo de movimiento
 - El flujo óptico es una buena aproximación al campo de movimiento
 - Se puede calcular a partir de las secuencias de imágenes.
 - La aproximación es buena con las siguientes suposiciones:
 - Superficies Lambertianas (tiene el mismo brillo en todas las direcciones)
 - Fuente de luz puntual en el infinito
 - Sin distorsión fotométrica
 - El error de esta aproximación es:
 - Pequeño en los puntos con un gradiente espacial alto
 - Cero solo para el movimiento traslacional o para cualquier movimiento rígido tal que la dirección de iluminación sea paralela a la velocidad angular

Flujo Óptico

- El flujo óptico corresponde (aproximadamente) a la proyección del campo de movimiento sobre el vector gradiente de la imagen.

$$\nabla_x E \cdot v_x + \nabla_y E \cdot v_y + \nabla_t E = 0$$

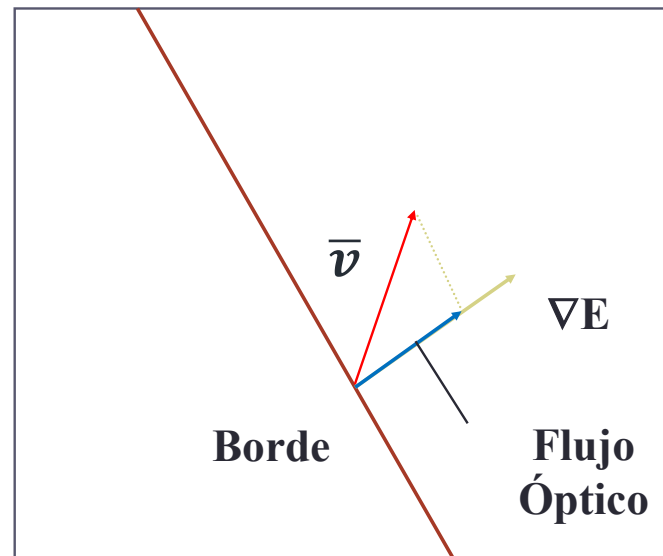


Tabla de Contenidos

- Introducción
- El campo de movimiento (“Motion-Field”)
- Flujo óptico
- Estimación del campo de movimiento
 - Técnicas diferenciales
 - Técnicas de correspondencia
 - Filtro de Kalman
- Reconstrucción 3D

Estimación del campo de movimiento

- Técnicas :
 - Técnicas diferenciales: basadas en las variaciones temporales y espaciales de la Intensidad de la imagen en todos sus puntos $\Rightarrow$ **Flujo Óptico**
 - Lucas-Kanade
 - Horn-Schunck
 - Farneback
 - Técnicas de correspondencia: determinan la disparidad entre características de secuencias de imágenes. Pueden utilizar dos o más imágenes (filtro de Kalman). Utilizan el flujo óptico como estimación inicial de la disparidad.

Estimación del campo de movimiento

- **Técnicas diferenciales:** (Lucas-Kanade)
 - Estimar el flujo óptico por mínimos cuadrados (restricción de uniformidad local)
- Razones:
 - No iterativos, menos propenso que los iterativos a posibles discontinuidades
 - No utilizan derivadas de orden superior a uno, menos sensibles al ruido
- Suposiciones:
 - La ecuación de continuidad de intensidad de la imagen es una buena aproximación de la componente normal del campo de movimiento.
 - El campo de movimiento se aproximará por un campo de vectores constantes dentro de una pequeña región **Q** del campo de la imagen.

Técnicas diferenciales (Lucas-Kanade)

- Algoritmo para el calculo del flujo óptico (localmente constante)
 - Región típica 5x5(**Q**), minimiza la función:

$$\min_{\bar{v}} \psi(\bar{v}) ; \quad \psi(\bar{v}) = \sum_{p_i \in Q} [(\nabla E)^T \cdot \bar{v} + E_t]^2$$

$$A_{N^2 \times 2} = \begin{bmatrix} \nabla E(\bar{p}_1) \\ \nabla E(\bar{p}_2) \\ \vdots \\ \nabla E(\bar{p}_{N \times N}) \end{bmatrix} ; b_{N^2} = \begin{bmatrix} -E_t(\bar{p}_1) \\ -E_t(\bar{p}_2) \\ \vdots \\ -E_t(\bar{p}_{N \times N}) \end{bmatrix}$$

$$A \bar{v} = b$$

N: tamaño de la ventana
de integración Q

- Por mínimos cuadrados

$$\text{Sol: } \bar{v} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

$\bar{v} =$ flujo optico en el centro de la región Q

- Se evalúa para todos los puntos de la imagen

$$A^T A = \begin{bmatrix} \sum (\nabla_x E)^2 & \sum \nabla_x E \cdot \nabla_y E \\ \sum \nabla_x E \cdot \nabla_y E & \sum (\nabla_y E)^2 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} -\sum \nabla_x E \cdot E_t \\ -\sum \nabla_y E \cdot E_t \end{bmatrix}$$

Técnicas diferenciales (Lucas-Kanade)

- Mejora del algoritmo:
 - Se comete un error al considerar que el flujo óptico en la región Q es constante e igual al del punto central, el error se incrementa con la distancia del pixel al punto central. Introducimos una matriz de pesos $W(N^2 \times N^2)$ simétrica

$$\bar{v}_w = (A^T W^2 A)^{-1} A^T W^2 b$$

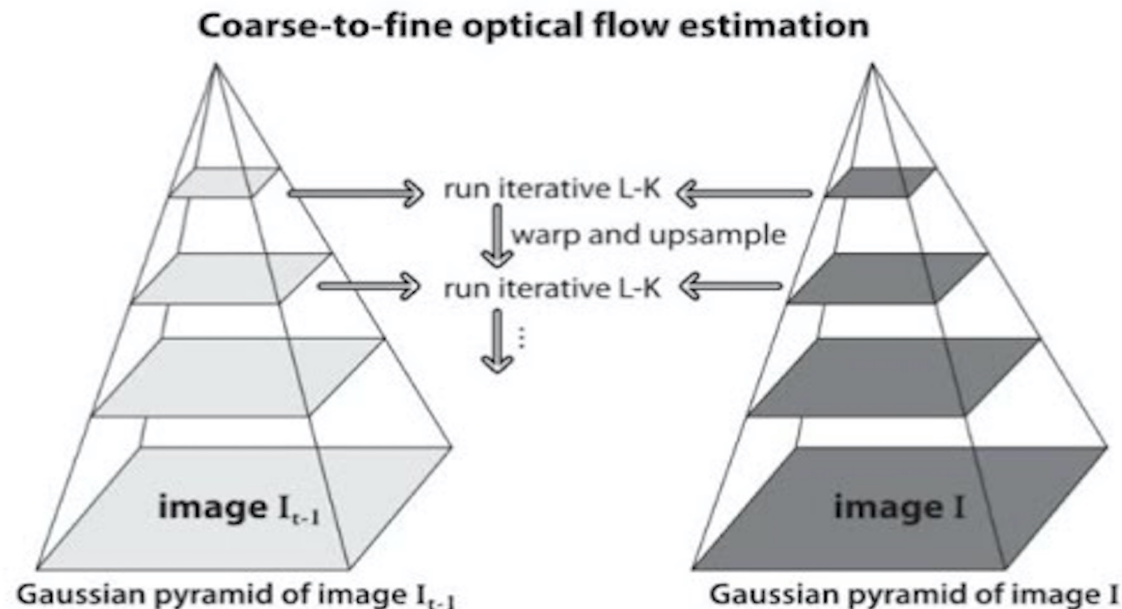
- Puntos de la imagen donde falla el algoritmo
 - Cuando la matriz (2x2) $A^T A$ es singular en la región Q
 - Gradientes espaciales en Q nulos o paralelos (colineales).
 - En este caso el problema de apertura no tiene solución.

$$A^T A = \begin{bmatrix} \sum (\nabla_x E)^2 & \sum \nabla_x E \cdot \nabla_y E \\ \sum \nabla_x E \cdot \nabla_y E & \sum (\nabla_y E)^2 \end{bmatrix}$$

- Solución: calcular el flujo óptico solo en aquellos puntos en los que los valores propios $A^T A$ son significativos (Shi y Tomasi)

Técnicas diferenciales (Lucas-Kanade)

- Limitaciones:
 - El algoritmo funciona solamente con valores del flujo óptico pequeños (entorno de vecindad del pixel)
 - Cuando existen desplazamientos elevados (objetos muy cercanos o a alta velocidad) es necesario utilizar una pirámide gaussiana de escalas.
 - Cuando nos movemos hacia arriba en la pirámide (mayor escala) los pequeños movimientos son filtrados, y los valores elevados de flujo óptico se convierten en pequeños movimientos.
 - De este modo, podemos calcular el Flujo Óptico a diferentes escalas



Técnicas diferenciales (Horn-Schunck)

- **Técnicas diferenciales:** (Horn-Schunck)
 - Método Iterativo: en lugar de suponer que el flujo óptico es constante en cada región Q, impone una restricción de suavidad que expresa la continuidad de las superficies de un objeto rígido.
- Características :
 - Iterativo: problemas de convergencia, problemas de discontinuidades
- Suposiciones
 - La ecuación de continuidad de intensidad de la imagen es una buena aproximación de la componente normal del campo de movimiento.
 - El flujo óptico varía suavemente en las superficies de un sólido rígido.

Técnicas diferenciales (Horn-Schunck)

- Cálculo del flujo óptico: restricción de suavidad del FO.
 - La restricción de suavidad del flujo óptico expresa la continuidad de las superficies de un objeto rígido.

$$\min_{\bar{v}} (\Gamma_C(\bar{v})); \quad \Gamma_C(\bar{v}) = \Gamma_S(\bar{v}) + \lambda \Gamma_H(\bar{v})$$

$$\bar{v} = [v_x(x, y, t), v_y(x, y, t)]^T$$



Restricción Suavidad



Restricción Continuidad
de Intensidad

$$\Gamma_S(\bar{v}) = \iint_{\Omega} [\|\nabla_x \bar{v}\|^2 + \|\nabla_y \bar{v}\|^2] dx dy$$

$$\Gamma_H(\bar{v}) = \iint_{\Omega} [(\nabla E)^T \bar{v} + E_t]^2 dx dy$$

Ω : entorno de vecindad

$$\nabla_x \bar{v} = \left[\frac{\partial v_x}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} \right]^T$$

$$\nabla_y \bar{v} = \left[\frac{\partial v_x}{\partial y}, \frac{\partial v_y}{\partial y} \right]^T$$

Técnicas diferenciales (Horn-Schunck)

- Solución para imágenes discretas:

$$\Gamma_S(i, j) = \frac{1}{4} \left[(v_{x_{i+1,j}} - v_{x_{i,j}})^2 + (v_{x_{i,j+1}} - v_{x_{i,j}})^2 + (v_{y_{i+1,j}} - v_{y_{i,j}})^2 + (v_{y_{i,j+1}} - v_{y_{i,j}})^2 \right]$$

$$\Gamma_H(i, j) = \left[\nabla_x E(i, j, t) \cdot v_{x_{i,j}} + \nabla_y E(i, j, t) \cdot v_{y_{i,j}} + E_t(i, j, t) \right]^2$$

$$\Gamma_C(i, j) = \sum_{\Omega} (\Gamma_S(i, j) + \lambda \Gamma_H(i, j))$$

Minimizar



$$\begin{cases} \frac{\partial \Gamma_C}{\partial v_{x_{i,j}}}(i, j) = 0 \\ \frac{\partial \Gamma_C}{\partial v_{y_{i,j}}}(i, j) = 0 \end{cases}$$

Restricción Suavidad

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_S}{\partial v_{x_{i,j}}}(i, j) &= 2 (v_{x_{i,j}} - \hat{v}_{x_{i,j}}) \\ \frac{\partial \Gamma_S}{\partial v_{y_{i,j}}}(i, j) &= 2 (v_{y_{i,j}} - \hat{v}_{y_{i,j}}) \end{aligned}$$



Minimiza las diferencias
respecto al valor promedio
en el entorno de vecindad

Técnicas diferenciales (Horn-Schunck)

- Solución:

$$\Gamma_C(i,j) = \sum_{\Omega} (\Gamma_S(i,j) + \lambda \Gamma_H(i,j))$$

Minimizar

$$\begin{cases} \frac{\partial \Gamma_C}{\partial v_{x_{i,j}}}(i,j) = 0 \\ \frac{\partial \Gamma_C}{\partial v_{y_{i,j}}}(i,j) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_C}{\partial v_{x_{i,j}}}(i,j) &= 2 (v_{x_{i,j}} - \hat{v}_{x_{i,j}}) + 2\lambda \left[\nabla_x E(i,j,t) \cdot v_{x_{i,j}} + \nabla_y E(i,j,t) \cdot v_{y_{i,j}} + E_t(i,j,t) \right] \nabla_x E(i,j,t) = 0 \\ \frac{\partial \Gamma_C}{\partial v_{y_{i,j}}}(i,j) &= 2 (v_{y_{i,j}} - \hat{v}_{y_{i,j}}) + 2\lambda \left[\nabla_x E(i,j,t) \cdot v_{x_{i,j}} + \nabla_y E(i,j,t) \cdot v_{y_{i,j}} + E_t(i,j,t) \right] \nabla_y E(i,j,t) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{x_{i,j}} &= \frac{1}{1 + \lambda (\nabla_x E^2 + \nabla_y E^2)} \cdot \left[(1 + \lambda \nabla_y E^2) \cdot \hat{v}_{x_{i,j}} - \lambda \nabla_x E (\nabla_t E + \nabla_y E \cdot \hat{v}_{y_{i,j}}) \right] \\ v_{y_{i,j}} &= \frac{1}{1 + \lambda (\nabla_x E^2 + \nabla_y E^2)} \cdot \left[(1 + \lambda \nabla_x E^2) \cdot \hat{v}_{y_{i,j}} - \lambda \nabla_y E (\nabla_t E + \nabla_x E \cdot \hat{v}_{x_{i,j}}) \right] \end{aligned}$$

Los valores del flujo óptico $\vec{v}$ en la posición (i,j) dependen de los valores de $\vec{v}$ en su vecindad

Técnicas diferenciales (Horn-Schunck)

- Solución iterativa:
 - Los valores del flujo óptico $\vec{v}$ en la posición (i,j) dependen de los valores de $\vec{v}$ en su vecindad
 - Partimos de unos valores iniciales:

Iteración

$$\begin{array}{lcl}
 v^0_{x_{i,j}} = 0 & & \\
 v^0_{y_{i,j}} = 0 & \longrightarrow &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 v^{n+1}_{x_{i,j}} = v^n_{x_{i,j}} - \frac{\nabla_x E \cdot \hat{v}^n_{x_{i,j}} + \nabla_y E \cdot \hat{v}^n_{y_{i,j}} + \nabla_t E}{1 + \lambda (\nabla_x E^2 + \nabla_y E^2)} \lambda \nabla_x E \\
 v^{n+1}_{y_{i,j}} = v^n_{y_{i,j}} - \frac{\nabla_x E \cdot \hat{v}^n_{x_{i,j}} + \nabla_y E \cdot \hat{v}^n_{y_{i,j}} + \nabla_t E}{1 + \lambda (\nabla_x E^2 + \nabla_y E^2)} \lambda \nabla_y E
 \end{array}$$

- Problemas:
 - Discontinuidades de objetos $\rightarrow$ discontinuidad en el flujo óptico

Ejemplo



Técnicas diferenciales (Farneback)

- **Técnicas diferenciales:** (Farneback)
 - Método Iterativo: resuelve el problema de apertura mediante una interpolación polinómica en un entorno de vecindad Q , tanto de la intensidad como del flujo óptico
- Características :
 - Iterativo
 - Realiza una interpolación polinómica cuadrática del entorno de vecindad Q en los dos frames (*transformada de expansión polinomial*)
 - Estima como se transforma la superficie polinómica ante traslación.
- Suposiciones
 - La ecuación de continuidad de intensidad de la imagen se impone como la invarianza del polinomio local entorno a cada punto.
 - La intensidad aparente se puede aproximar por una ecuación cuadrática desplazada.

Técnicas diferenciales (Farneback)

- Cálculo del flujo óptico: algoritmo de Farneback
 - Expansión Polinomial: aproximación polinómica del entorno Q de la intensidad de la imagen en cada punto:

$$f(\bar{p}) \sim \bar{p}^T \mathbf{A} \bar{p} + \mathbf{b}^T \bar{p} + c = r_1 + r_2 x + r_3 y + r_4 x^2 + r_5 y^2 + r_6 xy$$

$$\bar{p} = [x, y]^T \quad c = r_1; \quad \mathbf{b}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} r_4 & r_6/2 \\ r_6/2 & r_5 \end{bmatrix}$$

- Ajuste de los parámetros r_i mediante mínimos cuadrados ponderados:

$$\min_{\mathbf{r}} \psi(\mathbf{r}) ; \quad \psi(\mathbf{r}) = \sum_{p_i \in Q} w(\bar{p}_i) \cdot [E(\bar{p}_i) - f(\bar{p}_i, \mathbf{r})]^2$$

- Los pesos w_i tienen dos componentes:
 - certidumbre (**'certainty'**): intensidad de los pixels vecinos (contorno imagen)
 - aplicabilidad (**'applicability'**): posición relativa en el entorno Q (radial)
- Estimación del desplazamiento: Estima como se transforma la superficie polinómica ante traslación entre dos frames en el mismo punto:

$$f_1(\bar{p}) \rightarrow f_2(\bar{p}) = f_1(\bar{p} - \bar{d}) = \bar{p}^T \mathbf{A}_2 \bar{p} + \mathbf{b}_2^T \bar{p} + c_2$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 ; \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_1 - 2\mathbf{A}_1 \cdot \bar{d} ; \quad c_2 = \bar{d}^T \mathbf{A}_1 \bar{d} - \mathbf{b}_1^T \cdot \bar{d} + c_1$$

$$\bar{d} = -\frac{1}{2} \mathbf{A}_1^{-1} (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)$$

Técnicas diferenciales (Farneback)

- Cálculo del flujo óptico: algoritmo de Farneback
 - Estimación del desplazamiento : calculamos la aproximación polinómica local en el entorno Q de cada punto de la imagen en dos frames consecutivos. Esta debe ser constante salvo un desplazamiento (continuidad de intensidad):

$$f_1(\bar{p}) = \bar{p}^T \mathbf{A}_1 \bar{p} + \mathbf{b}_1^T \bar{p} + c_1$$

$$f_2(\bar{p}) = f_1(\bar{p} - \bar{d})$$

$$f_2(\bar{p}) = \bar{p}^T \mathbf{A}_2 \bar{p} + \mathbf{b}_2^T \bar{p} + c_2$$

$$\mathbf{A}_2(\bar{p}) \approx \mathbf{A}_1(\bar{p}) \Rightarrow \mathbf{A}(\bar{p}) = \frac{\mathbf{A}_1(\bar{p}) + \mathbf{A}_2(\bar{p})}{2} \quad \Delta \mathbf{b}(\bar{p}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{b}_2(\bar{p}) - \mathbf{b}_1(\bar{p}))$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_1 - 2\mathbf{A}_1 \cdot \bar{d} \Rightarrow \mathbf{A}(\bar{p}) \cdot \bar{d}(\bar{p}) = \Delta \mathbf{b}(\bar{p})$$

$$\min_{\bar{d}} \sum_{\Delta p \in Q} w(\Delta p) \cdot \|\mathbf{A}(\bar{p} + \Delta p) \cdot \bar{d}(\bar{p}) - \Delta \mathbf{b}(\bar{p} + \Delta p)\|^2$$

$$\bar{d}(\bar{p}) = \left(\sum_{p_i \in Q} w_i \cdot \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i \right)^{-1} \cdot \sum_{p_i \in Q} w_i \cdot \mathbf{A}_i^T \Delta \mathbf{b}_i$$

Flujo Óptico

Técnicas diferenciales (Farneback)

- Cálculo del flujo óptico: algoritmo de Farneback
 - Algoritmo iterativo:

- Modela el desplazamiento $\bar{\mathbf{d}}(\bar{\mathbf{p}})$ (flujo óptico) como un polinomio cuadrático

$$\bar{\mathbf{d}}(\bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{S}(\bar{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{a} \quad \mathbf{S}(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & x^2 & xy \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & y^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7 \ a_8]^T$$

$$\mathbf{a} = \left(\sum_{p_i \in Q} w_i \cdot \mathbf{s}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i \mathbf{s}_i \right)^{-1} \cdot \sum_{p_i \in Q} w_i \cdot \mathbf{s}_i^T \mathbf{A}_i^T \Delta \mathbf{b}_i$$

- Incorpora conocimiento a priori: la expansión polinómica sólo es válida localmente (pequeños desplazamientos). Se comparan los dos polinomios en puntos distintos a partir de una predicción previa $\hat{\bar{\mathbf{p}}}$
Permite estimar desplazamientos mayores

$$\mathbf{A}(\bar{\mathbf{p}}) = \frac{\mathbf{A}_1(\bar{\mathbf{p}}) + \mathbf{A}_2(\hat{\bar{\mathbf{p}}})}{2}$$

$$\Delta \mathbf{b}(\bar{\mathbf{p}}) = -\frac{1}{2} \left(\mathbf{b}_2(\hat{\bar{\mathbf{p}}}) - \mathbf{b}_1(\bar{\mathbf{p}}) \right) + \mathbf{A}(\bar{\mathbf{p}}) \cdot \hat{\bar{\mathbf{d}}}(\bar{\mathbf{p}})$$

Tabla de Contenidos

- Introducción
- El campo de movimiento (“Motion-Field”)
- Flujo óptico
- Estimación del campo de movimiento
 - Técnicas diferenciales
 - Técnicas de correspondencia
 - Filtro de Kalman
- Reconstrucción 3D

Estimación del campo de movimiento

- Técnicas de Correspondencia (Basadas en características)
 - Estiman el campo de movimiento solamente en puntos característicos.
 - Se realiza una correspondencia de estos puntos entre las sucesivas imágenes.
 - La correspondencia es guiada mediante una estimación del flujo óptico.
- Dos métodos :
 - Método de dos imágenes consecutivas
 - Método de múltiples imágenes consecutivas

Técnicas de Correspondencia

- Método de dos imágenes : “*Feature Matching*” “*Lucas-Kanade*”
 - Emparejar puntos característicos entre las imágenes de la secuencia
 - Calculamos $A^T A$ sobre pequeñas regiones de la imagen: las **características** son los centros de aquellas regiones para las cuales el más pequeño de los valores propios de $A^T A$ es mayor que un umbral.
 - Calcular el desplazamiento de los puntos característicos mediante la iteración del algoritmo visto anteriormente $\Rightarrow$ Estimando con ello el flujo óptico

$$A_{N^2 \times 2} = \begin{bmatrix} \nabla E(\bar{p}_1) \\ \nabla E(\bar{p}_2) \\ \vdots \\ \nabla E(\bar{p}_{N \times N}) \end{bmatrix} ; b_{N^2} = \begin{bmatrix} -E_t(\bar{p}_1) \\ -E_t(\bar{p}_2) \\ \vdots \\ -E_t(\bar{p}_{N \times N}) \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} \sum (\nabla_x E)^2 & \sum \nabla_x E \cdot \nabla_y E \\ \sum \nabla_x E \cdot \nabla_y E & \sum (\nabla_y E)^2 \end{bmatrix}$$

$$A \bar{v} = b$$

$$\bar{v} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

$$\bar{d} = \bar{v} \cdot \delta t$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} -\sum \nabla_x E \cdot E_t \\ -\sum \nabla_y E \cdot E_t \end{bmatrix}$$

“Generalized Image Matching by the Method of Differences” B. D. Lucas
9th IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (1984)

“Good Features to Track” J. Shi and C. Tomasi
9th IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (1994)

Algoritmo Feature_Point_Matching

- Datos Entrada:
 - Dos imágenes consecutivas I_1, I_2
 - Un conjunto de puntos correspondientes en las dos imágenes
- Sean :
 - Q_1, Q_2, Q' tres regiones de la imagen ($N \times N$)
 - T un número real positivo fijado (umbral).
 - $\mathbf{d}$ desplazamiento desconocido entre I_1 e I_2 de un punto característico $\bar{p}$, centrado en Q_1
- Para todos los puntos $\bar{p}$:
 - 1.- Poner $\mathbf{d} = 0$ y centrar Q_1 en $\bar{p}$
 - 2.- Estimar el desplazamiento $\mathbf{d}_0 = \bar{v} \cdot \delta t$ de $\bar{p}$, centrado en Q_1 , mediante el flujo óptico:

$$\bar{v} = (A^T A)^{-1} A^T b \quad \mathbf{d} = \mathbf{d} + \mathbf{d}_0$$
 - 3.- Q' es la región obtenida de desplazar Q_1 un $\mathbf{d}_0$. Calcular $\mathbf{S}$, la suma de las diferencias cuadradas entre Q' y la correspondiente región Q_2 en I_2 .
 - 4.- Si $\mathbf{S} > T$, $Q_1 = Q'$ y volver al paso 1 y continuar con el resto de características; sino terminar

La salida es una estimación de $\mathbf{d}$ para todos los puntos característicos

Algoritmo Feature_Point_Matching

- Esquema del algoritmo:

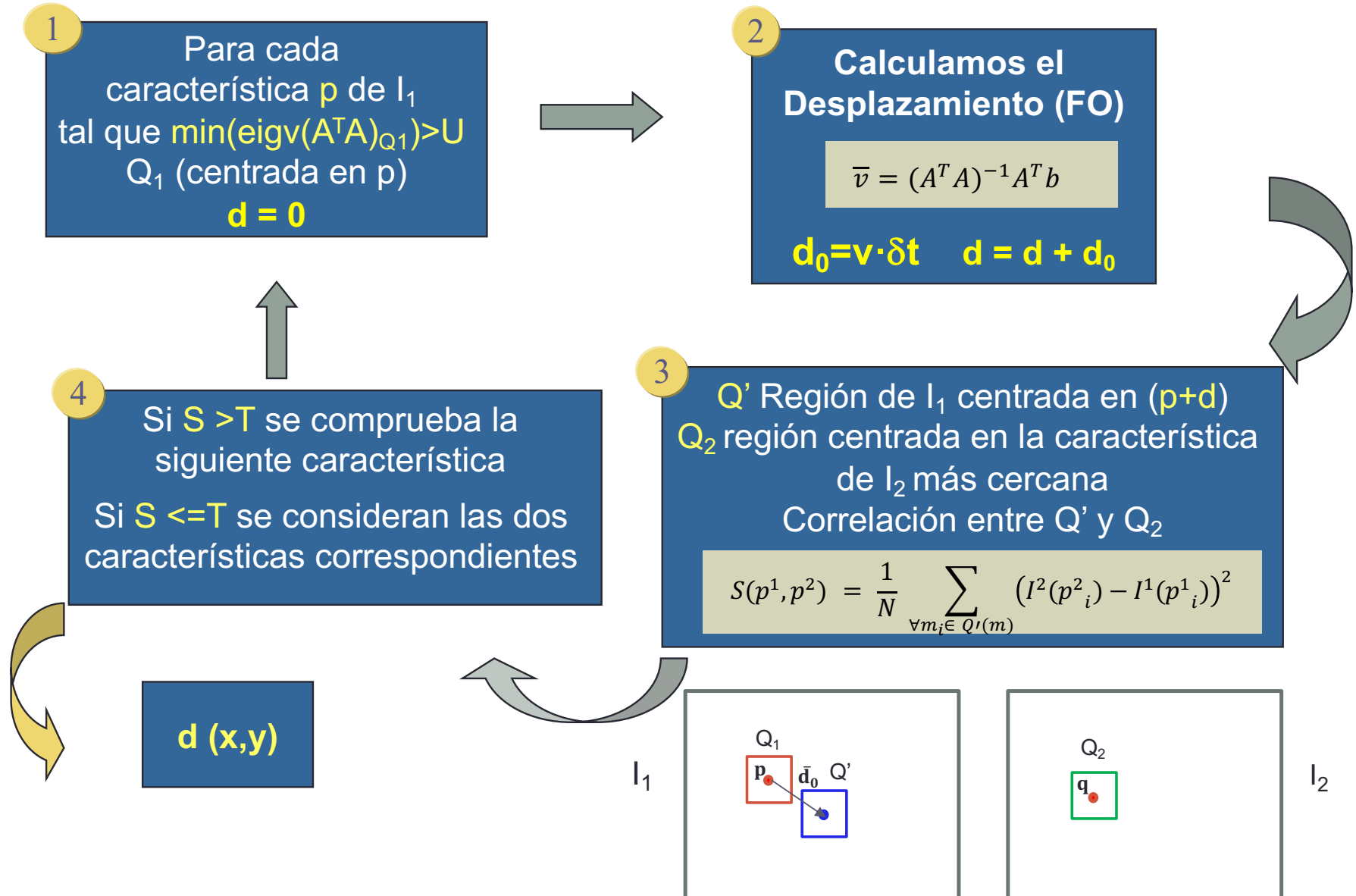


Tabla de Contenidos

- Introducción
- El campo de movimiento (“Motion-Field”)
- Flujo óptico
- Estimación del campo de movimiento
 - Técnicas diferenciales
 - Técnicas de correspondencia
 - Filtro de Kalman
- Reconstrucción 3D

Técnicas de Correspondencia

- Métodos de varias imágenes (“*Multiple-Frame*”)
 - “*Si el movimiento de la escena observada es continuo, como sucede en la mayoría de los casos, se debería poder hacer predicciones sobre el movimiento de los puntos de la imagen, en base a sus trayectorias previas*”
 - Se utilizan las disparidades calculadas entre I_{i-1} y I_{i-2} , I_{i-3} , I_{i-4} , ..etc para predecir las disparidades entre I_{i-1} y I_i antes de observar I_i
 - Están basados en el **Filtro de Kalman**.

Métodos Multiple-Frame

• Filtro de Kalman

- Punto característico $\bar{p}_k = [x_k, y_k]^T$ en la Imagen en t_k , con velocidad $\bar{v}_k = [v_{x,k}, v_{y,k}]^T \Rightarrow$ vector de estado $\mathbf{x} = [x_k, y_k, v_{x,k}, v_{y,k}]^T$
- Modelo del sistema del filtro de Kalman:

Modelo del Sistema/Proceso

$$\left. \begin{aligned} p_k &= p_{k-1} + v_{k-1} + \xi_{k-1} \\ v_k &= v_{k-1} + \eta_{k-1} \end{aligned} \right\}$$



Ecuación del Sistema/Proceso

$$\mathbf{x}_k = \Phi_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \omega_{k-1}$$

Estado

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} p_k \\ v_k \end{bmatrix}$$

Matriz de Transición

$$\Phi_{k-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ruido del Sistema/Proceso

$$\omega_{k-1} = \begin{bmatrix} \xi_{k-1} \\ \eta_{k-1} \end{bmatrix}$$

Ecuación de Medida

$$\mathbf{z}_k = H_k \mathbf{x}_k + \mu_k$$

Ruido de la medida: μ_k

$$\mathbf{z}_k = p_k + \mu_k$$



$$\mathbf{z}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_k \\ v_k \end{bmatrix} + \mu_k$$

Métodos Multiple-Frame

- Algoritmo Kalman_Tracking

- Las entradas en t_k , son las matrices de covarianza del ruido del sistema y de la medida en t_{k-1} , Q_{k-1} y R_{k-1} respectivamente, la matriz de estado invariante en el tiempo Φ , matriz de medidas invariante en el tiempo H , y la medida de la posición en el tiempo t_k , es z_k . Los valores de P_0 son inicializados con valores arbitrarios.

$$P'_k = \Phi_{k-1} P_{k-1} \Phi_{k-1}^T + Q_{k-1}$$

$$K_k = P'_k H_k^T (H_k P'_k H_k^T + R_k)^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \Phi_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + K_k (z_k - H_k \Phi_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1})$$

$$P_k = (I - K_k H_k) P'_k$$

Matrices de Covarianza:

Q_{k-1} : Cov. ruido del sistema
 R_{k-1} : Cov. ruido de la medida
 P'_k : Cov. error a priori
 P_k : Cov. estimación del error a posteriori

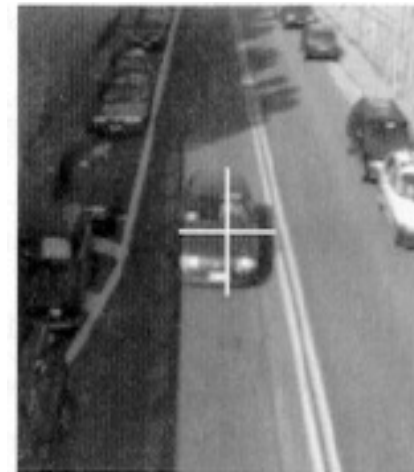
K_k : Matriz de ganancia del Filtro de Kalman

- La salida es la estimación optima de la posición y la velocidad en el tiempo t_k , $\hat{\mathbf{x}}_k$ y sus incertidumbres, dado por los elementos de la diagonal de P_k

Métodos Multiple-Frame

- Conclusiones :

- Integra las medidas del ruido con las predicciones del modelo para estimar el estado óptimo
- El filtro cuantifica la incertidumbre del estado estimado, como los elementos de la diagonal de la matriz de covarianza del estado. Esto permite al detector de características dimensionar automáticamente la región de la imagen a ser buscada para encontrar el punto característico en la próxima imagen. La región esta centrada en la mejor posición estimada y tan grande como la incertidumbre.



Métodos Multiple-Frame

- Problemas en la implementación de este algoritmo:
 - Información perdida : algunos puntos característicos se pueden perder en algún frame
 - El filtro de Kalman está basado en el conocimiento de los siguientes datos :
 - El modelo del sistema y su correspondiente matriz de covarianza Q_k
 - El modelo medido y la matriz de covarianza del ruido correspondiente, R_k
 - El estado del sistema inicial en t_0 , $\hat{x}_0$, y la matriz de covarianza del estado, P_0

Sin embargo muchas de estas cantidades son desconocidas.
- Se precisa un filtro de Kalman por cada punto característico

Tabla de Contenidos

- Introducción
- El campo de movimiento (“Motion-Field”)
- Flujo óptico
- Estimación del campo de movimiento
- **Reconstrucción 3D**

Reconstrucción 3D

- Suponiendo conocido el campo de movimiento (mapas de velocidades proyectados sobre la imagen) ¿qué podemos conocer acerca del movimiento 3D y localización de los objetos de la escena?
- Conocemos los desplazamientos de cada punto (o de ciertas características) de la imagen entre dos imágenes sucesivas.

$$\bar{d} = \bar{v} \cdot \delta t$$

- Sin ninguna restricción adicional el problema de reconstrucción no tiene solución única, por lo tanto debemos estudiar situaciones particulares:
 - Escena estática y cámara móvil rotando en torno a su centro de proyección (rotación desconocida)
 - Escena estática y cámara móvil con movimiento desconocido
 - Cámara fija calibrada y objeto móvil con movimiento conocido

Reconstrucción 3D

- Escena estática y cámara móvil rotando en torno a su centro de proyección (rotación desconocida)
 - Dado un conjunto de puntos correspondientes entre dos imágenes I_1 e I_2 tomadas en instantes t_1 y t_2
 - Podemos calcular la rotación efectuada por la cámara si disponemos de al menos 3 puntos correspondientes.
 - Existe una Homografía entre las dos vistas. $\tilde{m}^2 \cong H_\theta \cdot \tilde{m}^1$
- No podemos inferir nada acerca de la posición 3D de los puntos proyectados y por tanto de la superficie de los objetos

$$\left. \begin{array}{l} x^{(1)} = \frac{X^{C1}}{Z^{C1}} \\ y^{(1)} = \frac{Y^{C1}}{Z^{C1}} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x^{(2)} = \frac{r_{11}X^{C1} + r_{12}Y^{C1} + r_{13}Z^{C1}}{r_{31}X^{C1} + r_{32}Y^{C1} + r_{33}Z^{C1}} \\ y^{(2)} = \frac{r_{21}X^{C1} + r_{22}Y^{C1} + r_{23}Z^{C1}}{r_{31}X^{C1} + r_{32}Y^{C1} + r_{33}Z^{C1}} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x^{(2)} = \frac{r_{11}x^{(1)} + r_{12}y^{(1)} + r_{13}}{r_{31}x^{(1)} + r_{32}y^{(1)} + r_{33}} \\ y^{(2)} = \frac{r_{21}x^{(1)} + r_{22}y^{(1)} + r_{23}}{r_{31}x^{(1)} + r_{32}y^{(1)} + r_{33}} \end{array} \right\}$$

Coordenadas Normalizadas

$$\tilde{p}^{(1)} = A^{-1}\tilde{m} = [I \quad 0] \tilde{M}_{c1}$$

$$\tilde{p}^{(2)} = A^{-1}\tilde{m} = [R \quad t] \tilde{M}_{c1}$$

$[R]$

$$\det[R] = 1$$

$$R^T = R^{-1}$$

$$\tilde{H}_\theta \cong A R A^{-1}$$

Reconstrucción 3D

- Escena estática y cámara móvil con movimiento desconocido
 - Dado un conjunto de puntos correspondientes entre dos imágenes I_1 e I_2 tomadas en instantes t_1 y t_2
 - Podemos calcular la rotación y traslación efectuada y la posición de los puntos 3D si disponemos de al menos 11 puntos correspondientes

$$\left. \begin{aligned} x^{(2)} &= \frac{r_{11}X^{C1} + r_{12}Y^{C1} + r_{13}Z^{C1} + t_1}{r_{31}X^{C1} + r_{32}Y^{C1} + r_{33}Z^{C1} + t_3} \\ y^{(2)} &= \frac{r_{21}X^{C1} + r_{22}Y^{C1} + r_{23}Z^{C1} + t_2}{r_{31}X^{C1} + r_{32}Y^{C1} + r_{33}Z^{C1} + t_3} \end{aligned} \right\} \longrightarrow \left. \begin{aligned} x^{(2)} &= \frac{r_{11}x^{(1)} + r_{12}y^{(1)} + r_{13} + \frac{t_1}{Z^{C1}}}{r_{31}x^{(1)} + r_{32}y^{(1)} + r_{33} + \frac{t_3}{Z^{C1}}} \\ y^{(2)} &= \frac{r_{21}x^{(1)} + r_{22}y^{(1)} + r_{23} + \frac{t_2}{Z^{C1}}}{r_{31}x^{(1)} + r_{32}y^{(1)} + r_{33} + \frac{t_3}{Z^{C1}}} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x^{(1)} &= \frac{X^{C1}}{Z^{C1}} \\ y^{(1)} &= \frac{Y^{C1}}{Z^{C1}} \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} \phi_i \left([R], t, Z_i, \left\langle x_i^{(1)}, y_i^{(1)}, x_i^{(2)} \right\rangle \right) &= 0 \\ \Psi_i \left([R], t, Z_i, \left\langle x_i^{(1)}, y_i^{(1)}, y_i^{(2)} \right\rangle \right) &= 0 \end{aligned}$$



- Mismo problema que el de odometría visual visto en el tema previo. El optical flow nos permite disponer de mapas densos (salvo el factor de escala)

$$\tilde{q}^{(k)T} E \tilde{q}^{(1)} = 0$$

$$E \cong \left[{}^{(k)}t_{(k+1)} \right]_{[\Lambda]} \cdot {}^{(k)}R_{(k+1)}$$

Reconstrucción 3D

- Cámara fija calibrada y objeto móvil con movimiento conocido

$$\bar{M}^t = [X^t \quad Y^t \quad Z^t]^T$$

Coordenadas del punto 3D referidas al S.C. de cámara en el instante t

$$\bar{p}^t = \frac{\bar{M}^t}{Z^t}$$

Coordenadas normalizadas del punto proyectado sobre la imagen referidas al S.C. de cámara (3D) en el instante t

$$\bar{p} = [x, y, 1]^T$$

$$\tilde{p} = A^{-1} \tilde{m} \cong [I \quad 0] \tilde{M}_c$$

$$\mathbf{z}^t = \mathbf{H} \cdot \bar{p}^t + \mu_k$$

Medida de las coordenadas 2D proyectadas en la imagen (con ruido).

$$\mathbf{R}_\delta, \mathbf{T}_\delta$$

Rotación y traslación entre los instantes t y t+1 (conocido)

$$\bar{M}^{t+1} = \mathbf{R}_\delta \cdot \bar{M}^t + \mathbf{T}_\delta$$

Reconstrucción 3D

- Despejando M^{t+1} y M^t en las ecuaciones anteriores tenemos:

$$\mathbf{R}_\delta^T \bar{\mathbf{p}}^{t+1} \cdot \mathbf{Z}^{t+1} - \bar{\mathbf{p}}^t \cdot \mathbf{Z}^t = \mathbf{R}_\delta^T \mathbf{T}_\delta$$

con $\bar{\mathbf{p}}_i$: puntos misma profundidad (entorno vecindad)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_\delta^T \bar{\mathbf{p}}_1^{t+1} & -\bar{\mathbf{p}}_1^t \cdot \mathbf{Z}^t \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{R}_\delta^T \bar{\mathbf{p}}_n^{t+1} & -\bar{\mathbf{p}}_n^t \cdot \mathbf{Z}^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{Z}^t \\ \mathbf{Z}^{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\delta^T \mathbf{T}_\delta \\ \vdots \\ \mathbf{R}_\delta^T \mathbf{T}_\delta \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \bar{\mathbf{Z}} = b$$



Coordenadas del punto 3D referidas al S.C. de cámara en el instante t

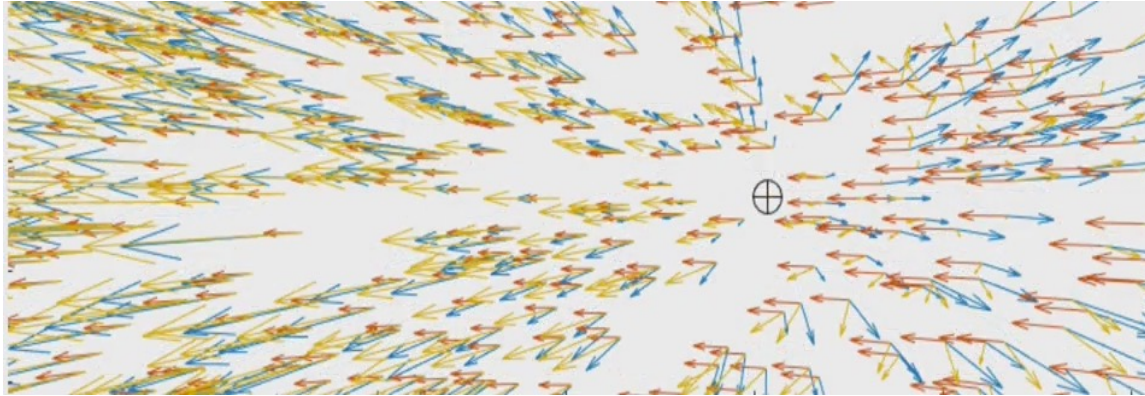
$$\bar{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}^t \\ \mathbf{Z}^{t+1} \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T b$$



$$\bar{\mathbf{M}}^t = \mathbf{Z}^t \cdot \bar{\mathbf{p}}^t$$

El campo de movimiento y Reconstrucción 3D

- Descomposición campo de movimiento



$$v_x = \frac{T_z x - T_x}{Z} - \omega_y + \omega_z y + \omega_x x y - \omega_y x^2$$

$$v_y = \frac{T_z y - T_y}{Z} + \omega_x - \omega_z x - \omega_y x y + \omega_x y^2$$

$$\bar{v} = \frac{1}{Z} \mathbf{F}_{2 \times 3}(x, y) \cdot \bar{T} + \mathbf{G}_{2 \times 3}(x, y) \cdot \bar{\omega}$$

A partir de un conjunto de puntos (n) podemos obtener un sistema de ecuaciones lineales:

$$\bar{v} = [\mathbf{F}_{2 \times 3}(x, y) \cdot \bar{T} \quad \mathbf{G}_{2 \times 3}(x, y)] \cdot \begin{bmatrix} 1/Z \\ \bar{\omega} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{bmatrix} = \Phi_{n \times (2n+3)}(\bar{T}) \cdot \begin{bmatrix} 1/Z_1 \\ 1/Z_2 \\ \vdots \\ 1/Z_n \\ \bar{\omega} \end{bmatrix}$$

$$\text{Incognitas} \rightarrow [\bar{T}, \bar{\omega}, Z_1, \dots, Z_n]$$

$$\arg \min_{\bar{T} \in S^2} \left\| \bar{v} - \Phi(\bar{T}) \cdot \Phi(\bar{T})^+ \bar{v} \right\|$$

- 1) Obtenemos el vector de traslación (velocidad)
- 2) Del sistema anterior calculamos la velocidad rotacional y la profundidad

Tabla de Contenidos

- Introducción
- El campo de movimiento (“Motion-Field”)
- Flujo óptico
- Estimación del campo de movimiento
- Reconstrucción 3D

.....Fin