

VISIÓN 3D

Calibración Proyectiva de un par Estéreo



Ingeniería de Sistemas y Automática

Universidad Miguel Hernández

Tabla de Contenidos

- **Calibración Proyectiva**
 - Matriz Fundamental
 - Matriz Esencial
 - Algoritmo RANSAC

Calibración Estereoscópica

- Calibración Proyectiva: Conocer la matriz F fundamental: se obtiene directamente los epipolos y la homografía entre las rectas epipolares
- Calibración Afín: Se conoce la matriz F fundamental y la homografía entre puntos en el infinito H_{∞}
- Calibración Euclídea: Se conocen los parámetros intrínsecos y extrínsecos involucrados en la captación

Calibración Proyectiva

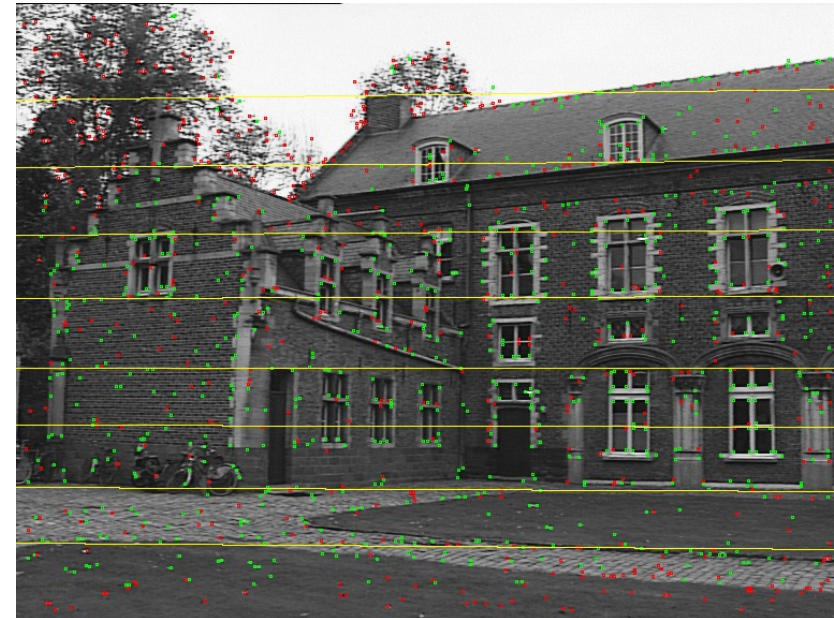
- Estimación de la **Matriz Fundamental** a partir de un conjunto de puntos correspondientes en dos imágenes

$$\tilde{m}'^T_i F \tilde{m}_i = 0$$

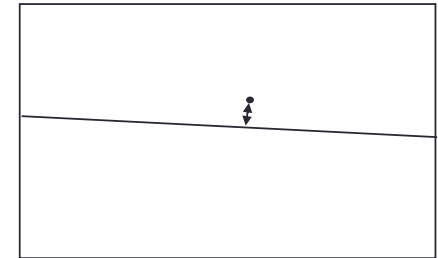
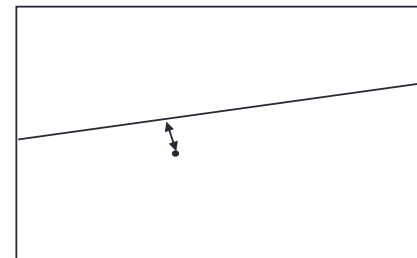
- Estimación de la matriz fundamental
 - Algoritmo de 8 puntos
 - Algoritmo de 7 puntos
 - Ajuste de epipolos (rango de F)
 - Normalización

Calibración Matriz Fundamental

- Error de estimación



$$d^2 = d(m'_i, Fm_i)^2 + d(m_i, F^T m'_i)^2$$



Calibración Matriz Fundamental

$$\tilde{m}'_i^T F \tilde{m}_i = 0 \quad \tilde{m}' = [x' \ y' \ 1]^T, \quad \tilde{m} = [x \ y \ 1]^T$$

$$x'x f_{11} + x'y f_{12} + x' f_{13} + y'x f_{21} + y'y f_{22} + y' f_{23} + x f_{31} + y f_{32} + f_{33} = 0$$

$$\begin{bmatrix} x'_1 x_1 & x'_1 y_1 & x'_1 & y'_1 x_1 & y'_1 y_1 & y'_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x'_n x_n & x'_n y_n & x'_n & y'_n x_n & y'_n y_n & y'_n & x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \mathbf{f} = 0$$

$$\mathbf{f} = [f_{11} \ f_{12} \ f_{13} \ f_{21} \ f_{22} \ f_{23} \ f_{31} \ f_{32} \ f_{33}]^T$$

$$A_{xy} \mathbf{f} = 0$$

Solución mínimos cuadrados:

$$\min_{\mathbf{f}} \left[(\mathbf{A}_{xy} \mathbf{f})^2 \right]$$

$$SVD(A_{xy}) \rightarrow A_{xy} = UDV^T \Rightarrow \mathbf{f} = v_9 \\ \|\mathbf{f}\| = 1$$

No impone que F sea singular

Calibración Matriz Fundamental

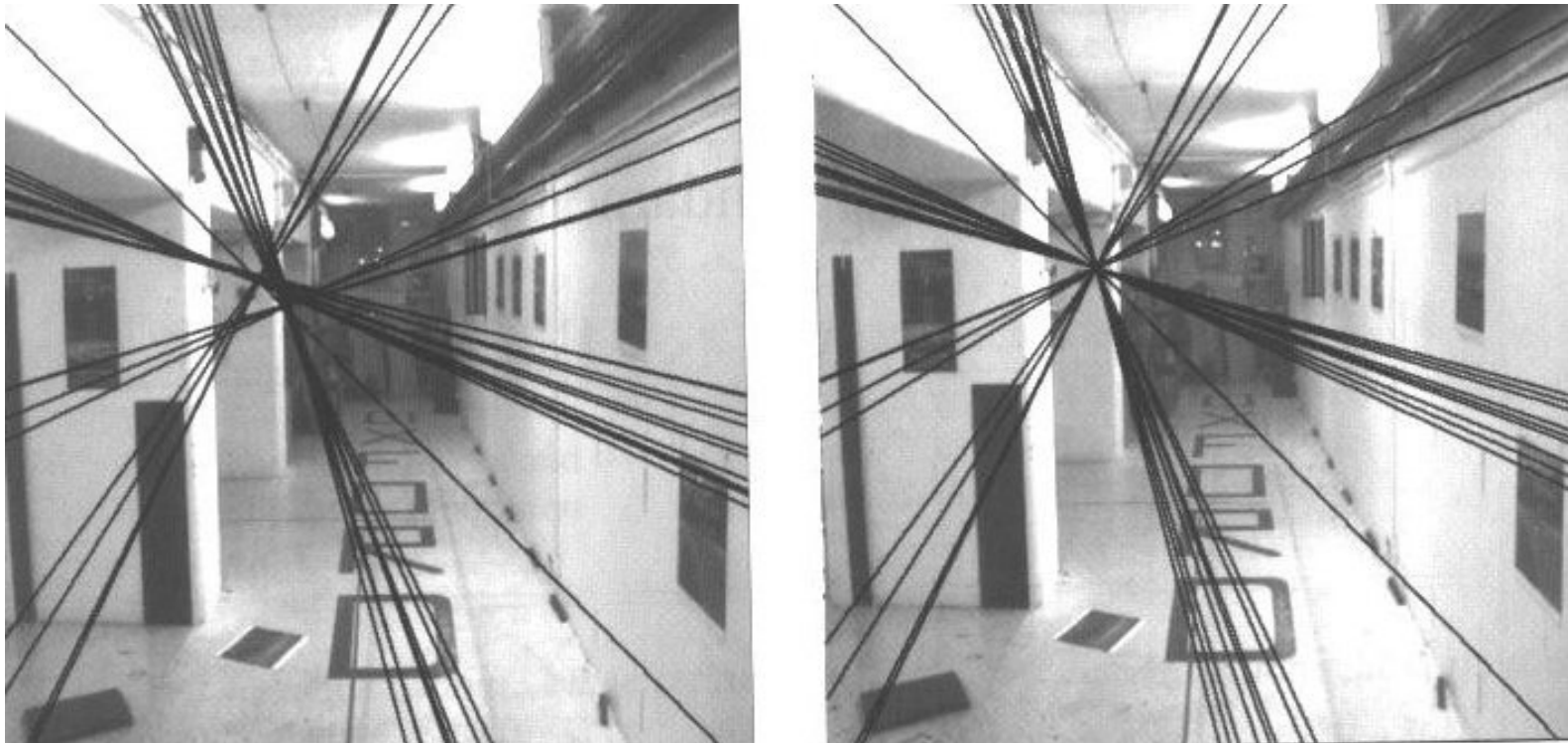
- Imposición de restricciones a F :
 - La matriz F debe ser singular pero el algoritmo de mínimos cuadrados no impone esta restricción
 - Solución:
 - Calcular la descomposición **SVD**(F) e imponer que el menor valor singular es cero.

$$F = UDV^T \longrightarrow F^* = UD^*V^T, \quad |F^*| = 0$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \rightarrow D^* = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calibración Matriz Fundamental

- Ajuste de Rango de F



Calibración Matriz Fundamental

- **Normalización:**
$$\begin{bmatrix} x'_1 x_1 & x'_1 y_1 & x'_1 & y'_1 x_1 & y'_1 y_1 & y'_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x'_n x_n & x'_n y_n & x'_n & y'_n x_n & y'_n y_n & y'_n & x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \mathbf{f} = 0$$
 - La condición de la matriz A_{xy} depende de los valores absolutos de x, y :
 - Puede haber filas con valores muy elevados y otras con valores muy pequeños.
 - Esto produce que la estimación sea muy sensible al ruido
 - Solución: Normalizar las coordenadas

Normalización: Transformar las coordenadas de imagen: $\hat{m}_i = T m_i$, $\hat{m}'_i = T' m'_i$

donde T y T' son transformaciones lineales (traslación y escalado)

- Traslación: los centroides de los puntos $\hat{m}_i$, $\hat{m}'_i$ están en $(0,0)$

- Escalado: la distancia media de los puntos al origen es $\sqrt{2}$

$$T = \begin{bmatrix} 1/\sigma_x & 0 & -\mu_x/\sigma_x \\ 0 & 1/\sigma_y & -\mu_y/\sigma_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T' = \begin{bmatrix} 1/\sigma'_x & 0 & -\mu'_x/\sigma'_x \\ 0 & 1/\sigma'_y & -\mu'_y/\sigma'_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alternativa:
$$T = T' = \begin{bmatrix} 2/n_c & 0 & -1 \\ 0 & 2/n_f & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Algoritmo 8 puntos normalizado

- Dadas $n \geq 8$ correspondencias de puntos en la imagen:

$$m_i \leftrightarrow m'_i \quad \tilde{m}'_i^T F \tilde{m}_i = 0$$

- (i) **Normalización:** calcular las transformaciones T, T' (centroide en (0,0) y distancia media $\sqrt{2}$), y aplicarlas a cada una de las parejas de puntos $(m_i, m'_i) \rightarrow (\hat{m}_i, \hat{m}'_i)$ $\hat{m}_i = T m_i, \hat{m}'_i = T' m'_i$
- (ii) **Calcular la matriz fundamental** $\hat{F}'$ con las correspondencias $(\hat{m}_i, \hat{m}'_i)$ a partir del menor valor singular de la matriz A_{xy} (último vector singular $\hat{v}_n$) $SVD(A_{xy})$
- (iii) **Imponer la singularidad de F:** Reemplazar $\hat{F}'$ por $\hat{F} = U D^* V^T$ tal que $|\hat{F}| = 0$ a partir de la descomposición $SVD(\hat{F}')$.
- (iv) **Desnormalizar:** calcular $F = T'^T \hat{F} T$ correspondiente a las coordenadas originales.

Algoritmo 7 puntos normalizado

- Dadas $n=7$ correspondencias de puntos en la imagen:
 - El espacio nulo de A_{xy} será de dimensión 2 $(f_1, f_2) \rightarrow (F_1, F_2)$

$$A_{xy} \mathbf{f} = 0$$

- La solución se obtiene imponiendo la singularidad de F

$$\det(\alpha F_1 + (1 - \alpha)F_2) = 0$$

- Es una ecuación cúbica en $\alpha \Rightarrow$ (1 o 3 soluciones reales)

$$F = \alpha F_1 + (1 - \alpha)F_2$$

- Se aplicaría el proceso de normalización y desnormalización indicado anteriormente

Otros métodos

- Minimización algebraica para imponer la singularidad de F:
 - Utiliza la distancia de Mahalanobis en lugar de la distancia cuadrática
- Minimizar la Distancia Geométrica

$$d = \sum_i (d(m_i, \hat{m}_i) + d(m_i', \hat{m}_i'))$$

$m_i \leftrightarrow m_i'$ correspondencias

$\hat{m}_i \leftrightarrow \hat{m}_i'$ correspondencias “*verdaderas*” estimadas

- Algoritmo no lineal, se parte de la estimación de mínimos cuadrados
- Requiere estimar P, P' a partir de F, para calcular las coordenadas “*verdaderas*” (Reconstrucción 3D Proyectiva)
- A partir de la reconstrucción proyectiva (Coordenadas 3D) se estima las proyecciones:

$$\hat{m}_i \leftrightarrow \hat{m}_i'$$

Matriz Esencial

- Cuando las cámaras están calibradas (A, A') (6 gdl)

$$\tilde{q}'_i E \tilde{q}_i = 0$$

$$\tilde{q}_i = A^{-1} \tilde{m}$$

$$\tilde{q}'_i = A'^{-1} \tilde{m}'$$

- El procedimiento es similar al cálculo de F variando solo el ajuste de la condiciones de E
- Calcular la descomposición **SVD**(E) e imponer que el menor valor singular es cero y los otros dos son iguales.

$$E = UDV^T$$

→

$$E^* = UD^*V^T, \quad |E^*| = 0$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \rightarrow D^* = \begin{bmatrix} (\lambda_1 + \lambda_2)/2 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_1 + \lambda_2)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tabla de Contenidos

- **Calibración Proyectiva**
 - Matriz Fundamental
 - Matriz Esencial
 - Algoritmo RANSAC

Objetivos

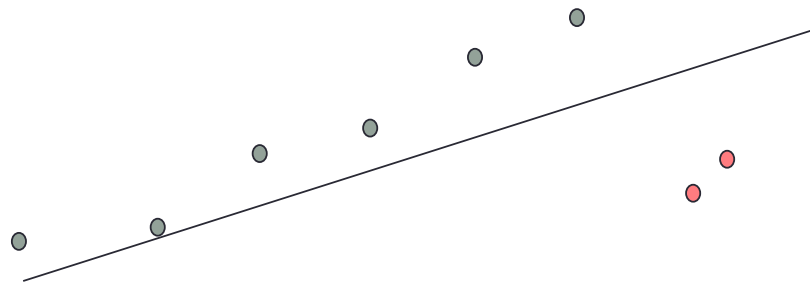
- Estimación de la **Homografía/Correlación** entre imágenes:
 - Los datos (medidas) contienen errores (dist. Gaussiana)
 - El problema de correspondencia es complejo $\Rightarrow$ falsas correspondencias (no siguen una dist. Gaussiana)
 - No se precisa un filtrado previo de las correspondencias
 - Integra en un solo proceso la estimación de H / F y el filtrado de correspondencias incorrectas (valores atípicos, “*outliers*”)
- **RANSAC**: **RAN**dom **SA**mples **C**onsensus
 - Trata de separar las falsas correspondencias (‘*outliers*’) de las correspondencias correctas (‘*inliers*’) que permita calcular de forma óptima H / F
 - La velocidad de convergencia depende del número de medidas.
 - Explosión combinatoria. Limitar en la medida de lo posible el número de datos de la escena (los más ‘*relevantes*’)
 - Aplicaciones: ajuste curvas, transformada de Hough, Homografías, matriz Fundamental, POSE

Ejemplo: ajuste de una recta

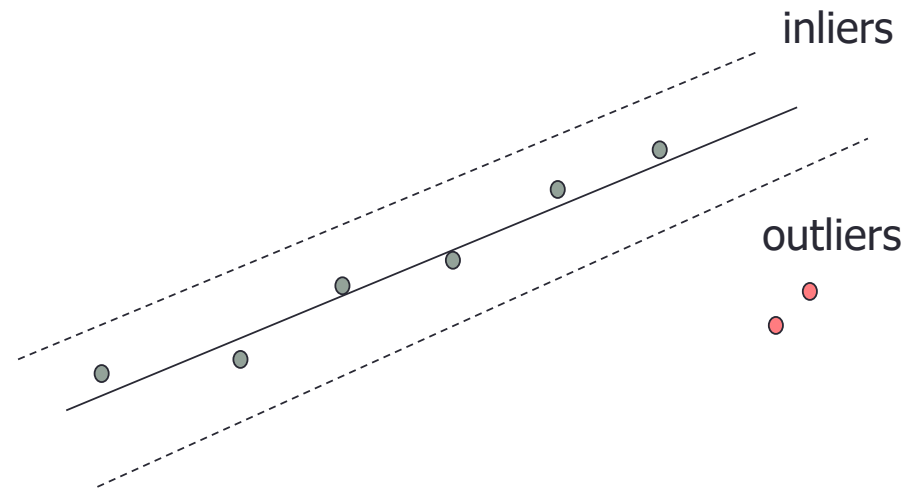
- Estimación de una recta:
 - Mínimos cuadrados

$$\begin{bmatrix} x_i & y_i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \bar{0}$$

$$SVD \left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \right) = UDV^T \Rightarrow [a \quad b \quad c] = v_n^T$$

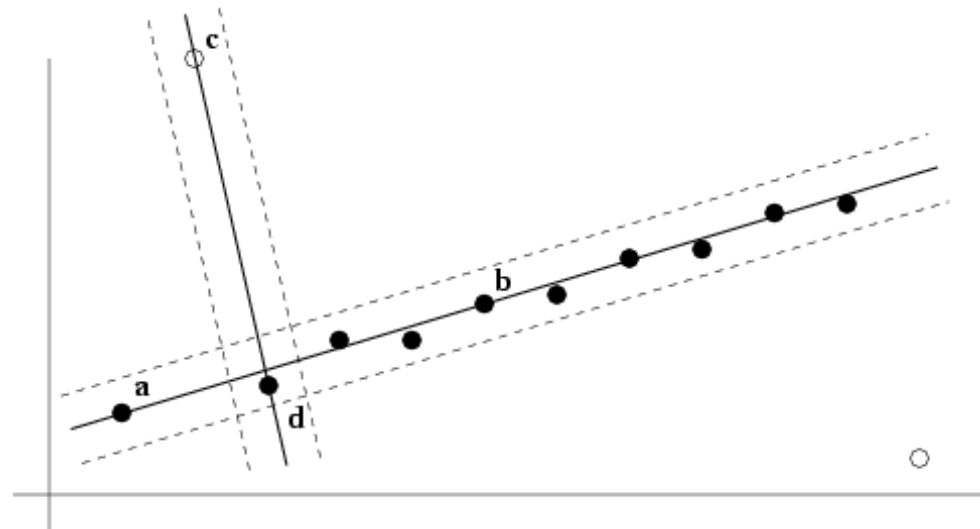


Estimación
considerando solo
los “*inliers*”



Ejemplo: ajuste de una recta

- RANSAC: Estimación con mínimo conjunto de datos
 - Ejemplo: dos puntos (subconjunto s)
 - Selección aleatoria de los puntos
 - Comprobar el consenso (verosimilitud) de dicha selección con el resto de puntos de S
 - Se asume que la mayoría de los datos son '**buenos**'



RANSAC: algoritmo

- Objetivo
 - Ajuste robusto de un modelo a un conjunto de datos $\mathbf{S}$ que contiene errores '*outliers*'
- Algoritmo:

- (i) Seleccionar aleatoriamente una muestra $\mathbf{s}$ de puntos del conjunto total $\mathbf{S}$ y calcular el modelo con este subconjunto
 - (ii) Determinar el subconjunto de puntos $\mathbf{S}_i$ que están dentro de un umbral t de distancia al modelo. El subconjunto $\mathbf{S}_i$ es el conjunto **consenso** y define los '*inliers*' de $\mathbf{S}$.
 - (iii) Si el conjunto $\mathbf{S}_i$ es mayor que un umbral T , volver a estimar el modelo utilizando todos los puntos de $\mathbf{S}_i$ y terminar.
 - (iv) Si el tamaño de $\mathbf{S}_i$ es menor que T , seleccionar un nuevo subconjunto y repetir el paso anterior.
 - (v) Después de N intentos seleccionar el subconjunto $\mathbf{S}_i$ con mayor consenso, volviendo a estimar el modelo utilizando todos los puntos del subconjunto $\mathbf{S}_i$

RANSAC: algoritmo

- Parámetros:
 - **s**: número de datos empleados en calcular el modelo (conocido)
 - **n**: número total de datos (conocido)
 - **d**: función de distancia puntos-modelo (elegido)
 - **e**: probabilidad de 'outliers' (estimado)
 - **p**: Probabilidad de que el algoritmo seleccione sólo "inliers". Es la probabilidad de que produzca un resultado útil (elegido)

- **t**: umbral distancia punto consenso (calculado/elegido)
- **T**: número de puntos que deben cumplir el consenso para finalizar el algoritmo (calculado)
- **N**: número de iteraciones necesarias (calculado)

RANSAC: umbral de 'inliers' (distancia t)

- Escoger t de forma que la probabilidad de 'inliers' ($1-e$) es p.e. 0.95
 - Se suele escoger empíricamente
 - Si el ruido de las medidas se puede ajustar a una gaussiana de media cero y desviación típica σ entonces $d_{\perp}^2$ sigue una distribución χ_m^2

m : *codimensión* del modelo (distancia)

Codimensión	Modelo	T^2
1	línea, F	$3.84\sigma^2$
2	H, P	$5.99\sigma^2$
3	T	$7.81\sigma^2$

- Uso de la mediana de las distancias (no precisa de umbrales predefinidos-> **LMEDS** (*Least median of Squares*))

RANSAC: umbral de consenso (T)

- Escoger el tamaño aceptable del conjunto como el número de 'inliers' estimado en el conjunto total
- Siendo
 - e : la probabilidad de errores (*outliers*)
 - n : tamaño del conjunto total S

$$T = (1 - e) \cdot n$$

- El valor de e (probabilidad de outliers) se puede calcular adaptativamente en cada iteración del algoritmo.

$$e^{(i)} = 1 - \frac{\text{size}(S_i)}{n}$$

RANSAC: número máx. de muestras

- Escoger **N** de forma que, con probabilidad p , al menos una muestra aleatoria está libre de 'outliers'.
(eje. $p = 0.99$)
- Siendo e la probabilidad de errores (outliers)
 - Prob. de que exista algún 'outlier' en s : $1 - (1 - e)^s$
 - Prob. de que exista algún 'outlier' en s en N iteraciones: $1 - p$

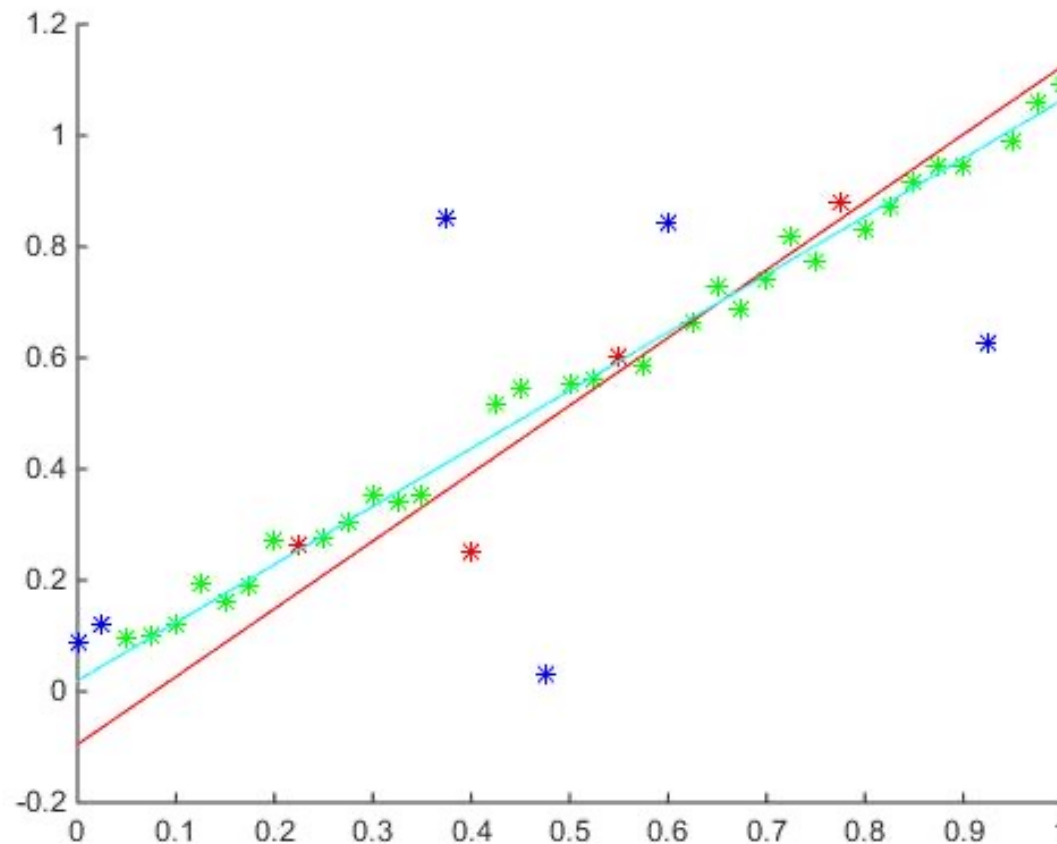
$$(1 - (1 - e)^s)^N = 1 - p$$

$$N = \log(1 - p) / \log(1 - (1 - e)^s)$$

s	Proporción de outliers e						
	5%	10%	20%	25%	30%	40%	50%
2	2	3	5	6	7	11	17
3	3	4	7	9	11	19	35
4	3	5	9	13	17	34	72
5	4	6	12	17	26	57	146
6	4	7	16	24	37	97	293
7	4	8	20	33	54	163	588
8	5	9	26	44	78	272	1177

RANSAC (Ejemplo)

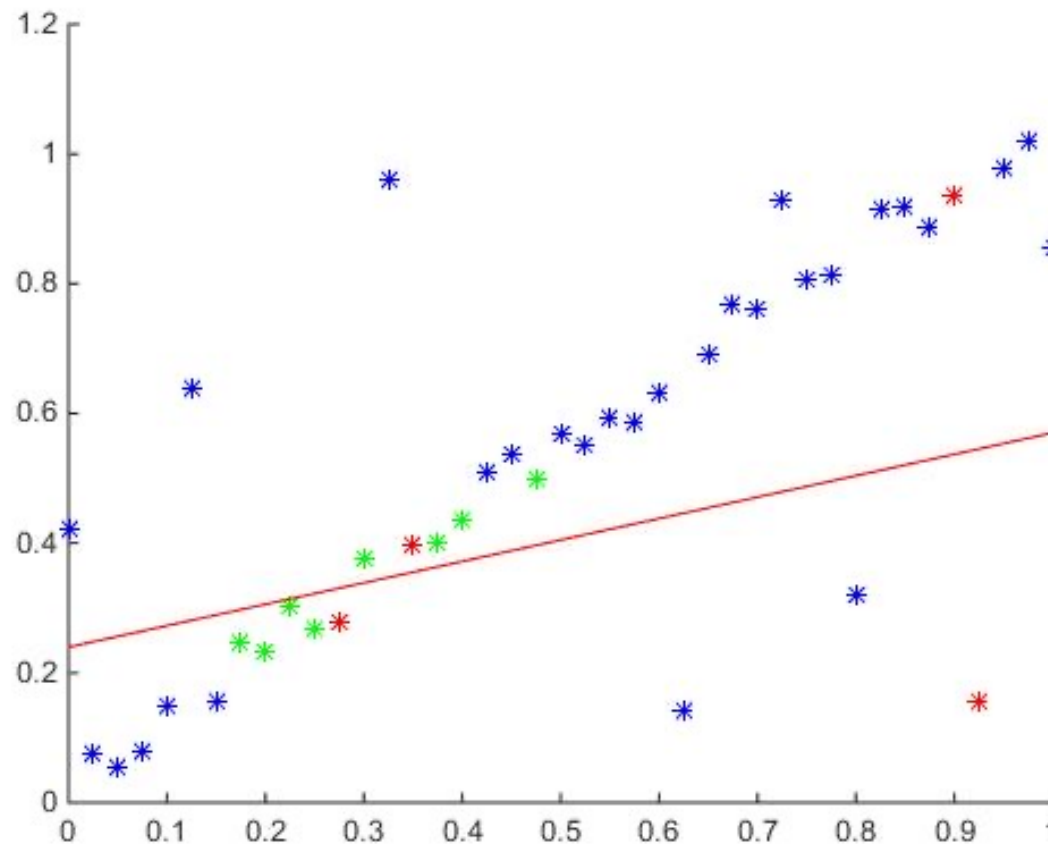
- Ejemplo ajuste recta. $e=0.2$; $s=4$; $n=50$; $T=40$ (80%) ; $N=9$; $t=0.1$
- Puntos rojos (elegido); Puntos verdes (cumplen el consenso) ; Puntos azules (no cumplen el consenso) ; Línea roja (primera estimación) ; Línea cyan (segunda estimación, con todos puntos consenso)



- Porcentaje puntos correctos: 85%
- Primera estimación, media distancia puntos consenso: 0.0372
- Segunda estimación, media distancia puntos consenso: 0.0184

RANSAC (Ejemplo)

- Ejemplo ajuste recta. $e=0.2$; $s=4$; $n=50$; $T=40$ (80%) ; $N=9$; $t=0.1$
- Puntos rojos (elegido); Puntos verdes (cumplen el consenso) ; Puntos azules (no cumplen el consenso) ; Línea roja (primera estimación) ; Línea cyan (segunda estimación, con todos puntos consenso)



- Porcentaje puntos correctos: 24%
- Primera estimación, media distancia puntos consenso: 0.0503

RANSAC: aplicaciones

- Estimación de Homografías entre planos proyectivos:

$$\tilde{m}'_j \cong H \tilde{m}_i \quad \begin{bmatrix} \lambda \hat{x}' \\ \lambda \hat{y}' \\ \lambda \end{bmatrix} = H \tilde{m}_i$$

- 4 puntos (**s**)

- Distancia: $d^2 = \|\tilde{m}'_j - \lambda^{-1}(H\tilde{m}_i)\|^2$

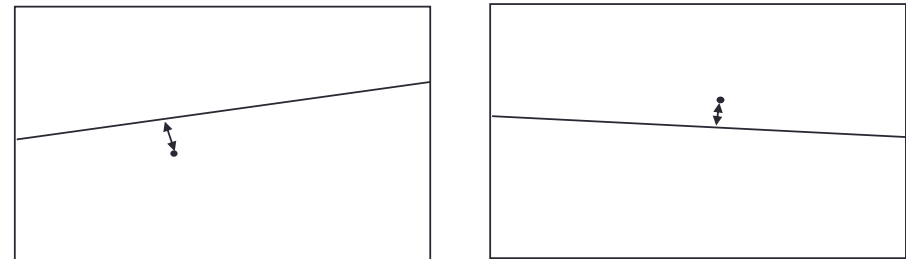
- Estimación de la matriz fundamental

- 7/8 puntos

$$\tilde{m}'_j{}^T F \tilde{m}_i = 0$$

- Distancia línea epipolar:

$$d^2 = d(\tilde{m}'_i, F\tilde{m}_i)^2 + d(\tilde{m}_i, F^T\tilde{m}'_i)^2$$



$$d(\tilde{m}_i, F^T \tilde{m}'_i) = \frac{\tilde{m}_i^T \cdot \tilde{l}}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}$$

$$\tilde{l} \cong F^T \tilde{m}'_i = [l_1, l_2, l_3]$$

$$d(\tilde{m}'_i, F\tilde{m}_i) = \frac{\tilde{m}'_i{}^T \cdot \tilde{l}'}{\sqrt{l_1'^2 + l_2'^2}}$$

$$\tilde{l}' \cong F\tilde{m}_i = [l_1', l_2', l_3']$$

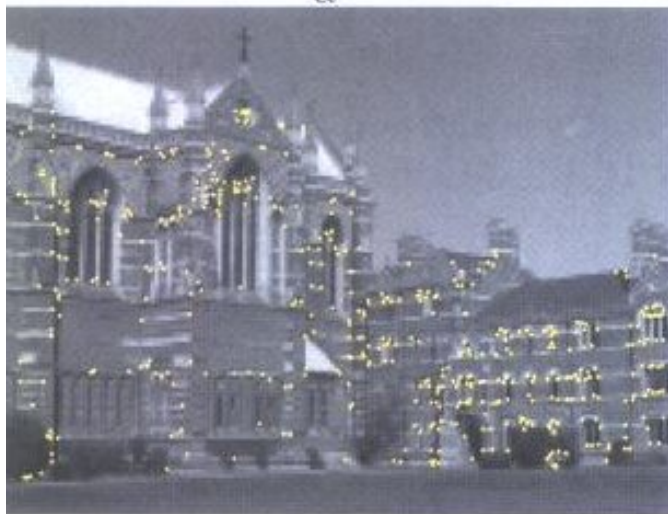
Ejemplo: cálculo de F



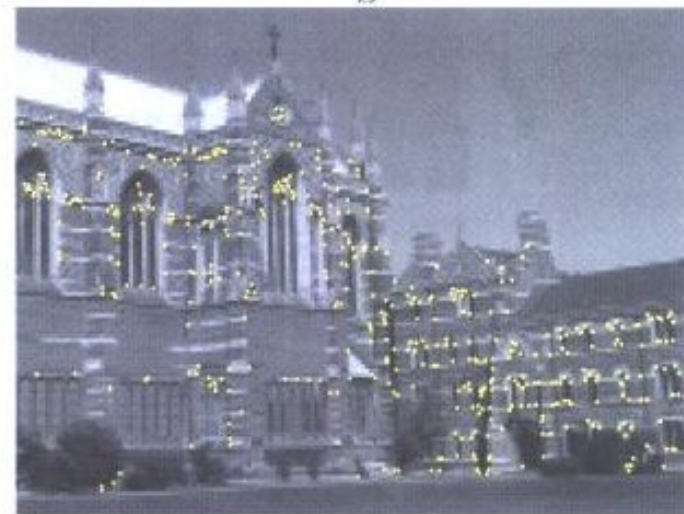
a



b



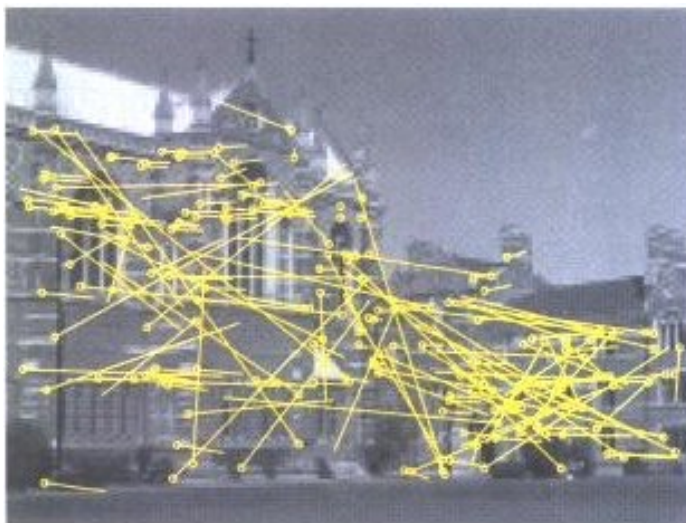
c



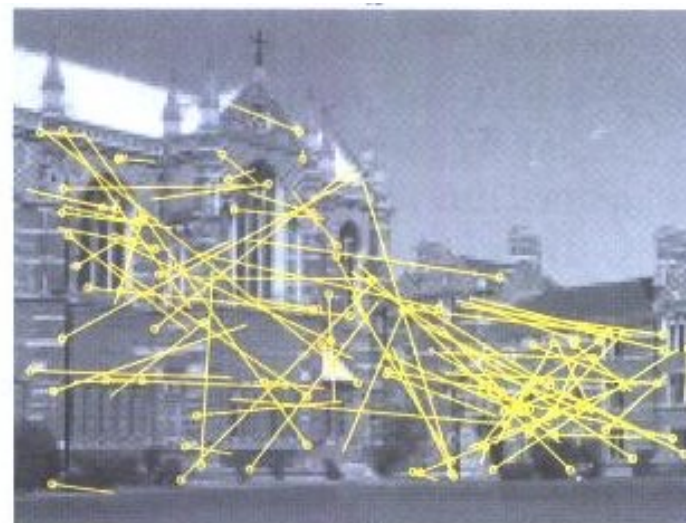
d

*“Multiple View Geometry in Computer Vision” R. Hartley and A. Zisserman
Cambridge University Press, March 2004.*

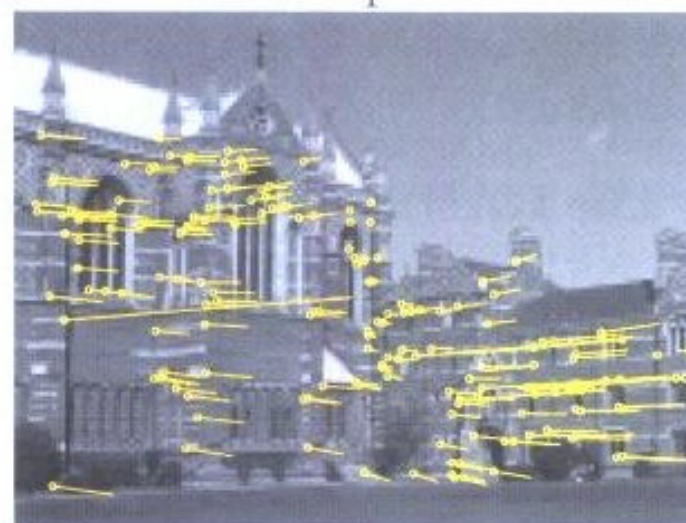
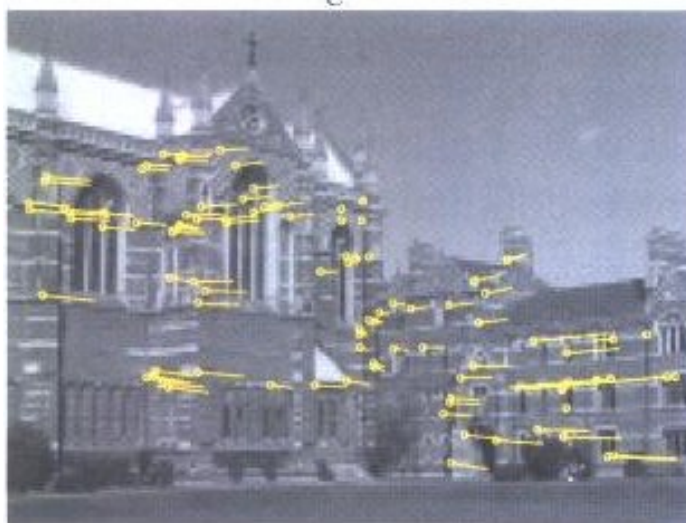
Ejemplo: cálculo de F



e



f



Resumen

- Modelo Proyectivo de un par estéreo de cámaras
- Homografías entre diferentes planos proyectivos
- Calibración Proyectiva $\rightarrow$ Matriz Fundamental/Esencial
- Siguiendo pasos :
 - Correspondencia
 - Reconstrucción 3D