

VISIÓN 3D

Modelo Proyectivo de un Par Estéreo Matriz Fundamental



Ingeniería de Sistemas y Automática

Universidad Miguel Hernández

Tabla de Contenidos

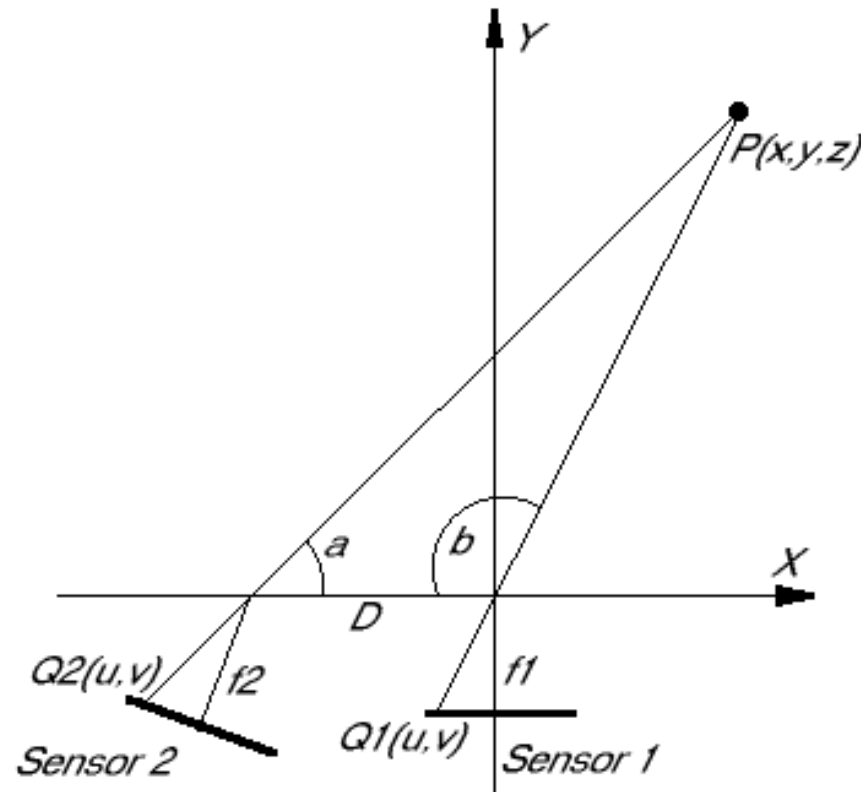
- **Introducción**
- Modelo Proyectivo Estéreo Binocular
- Homografía entre Planos Proyectivos
- Condición de Epipolaridad
- Matriz Fundamental

Introducción

- La visión 3D intenta estimar la información espacial del mundo por medio de un conjunto de imágenes tomadas desde diferentes puntos de vista.
 - *Disposición **Binocular*** (Pasiva)
 - *Disposición **Trinocular*** (Pasiva)
 - ***Secuencia de Imágenes*** (Activa)

Introducción

- Par Estereoscópico
 - La tercera dimensión es recuperada mediante triangulación a partir de la escena observada por dos o más captadores (**disparidad**)

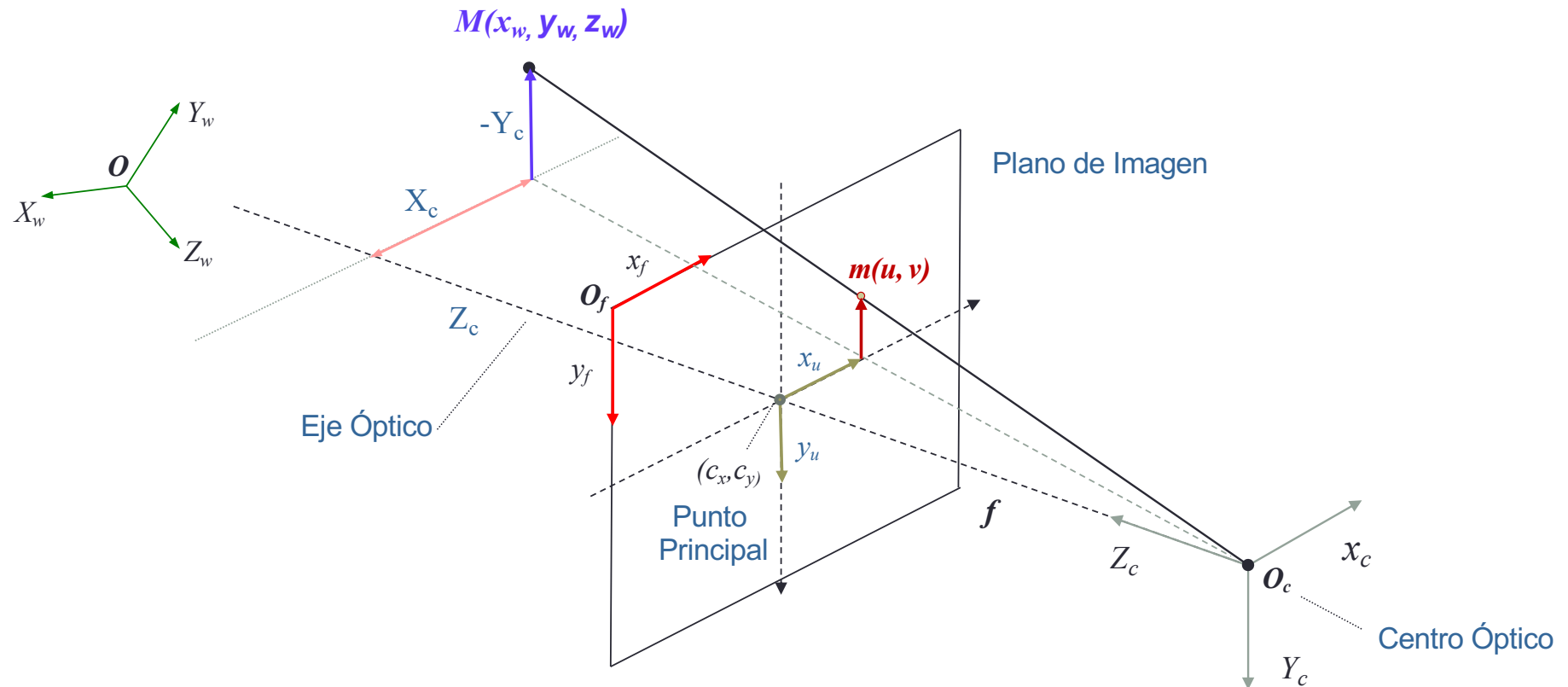


Introducción

- Problemas fundamentales en visión estéreo:
 - Calibración:
 - Obtención del modelo de proyección de ambas cámaras
 - Preprocesamiento:
 - Determinación de características en cada imagen.
 - Correspondencia:
 - ¿Qué elemento en la cámara izquierda corresponde con qué elemento en la cámara derecha?
 - Reconstrucción 3D:
 - Diferencia en la posición de los puntos correspondientes (disparidad).
 - Si la geometría del sistema estéreo es conocida, entonces podemos construir un mapa 3D de la escena (triangulación)

Introducción

- Modelo Proyectivo de una Cámara:



Introducción

- Modelo Proyectivo de una Cámara:

$$\tilde{m}_f = \tilde{A} \tilde{M}_c^w \tilde{M}_w \qquad \tilde{M}_c = \tilde{M}_c^w \tilde{M}_w$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ \text{3x3} & \text{3x1} \end{bmatrix} \qquad \tilde{M}_c^w = \begin{bmatrix} R_c^w & t_c^w \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

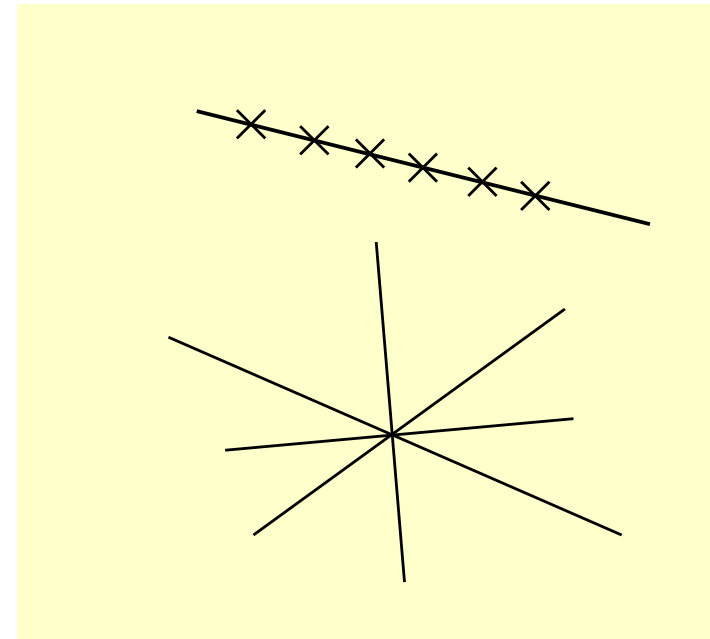
$$\tilde{m} \cong A [R_c^w \quad t_c^w] \tilde{M}$$

$$\tilde{m} \cong A R_c^w [I \quad -C] \tilde{M}$$

$$C = -R_c^{wT} t_c^w$$

Plano Proyectivo P^2

- Punto: $\tilde{x} \in P^2 \Rightarrow \tilde{x} \cong [x_1, x_2, x_3]^T$
- Recta: $\tilde{l} \in P^2 \Rightarrow \tilde{l} \cong [l_1, l_2, l_3]^T$
- Recta que pasa por un punto: $\tilde{l}^T \cdot \tilde{x} = 0$
- Dualidad entre puntos y rectas:
 - Conjunto de puntos que están en una recta
 - Conjunto de rectas que pasan por un punto

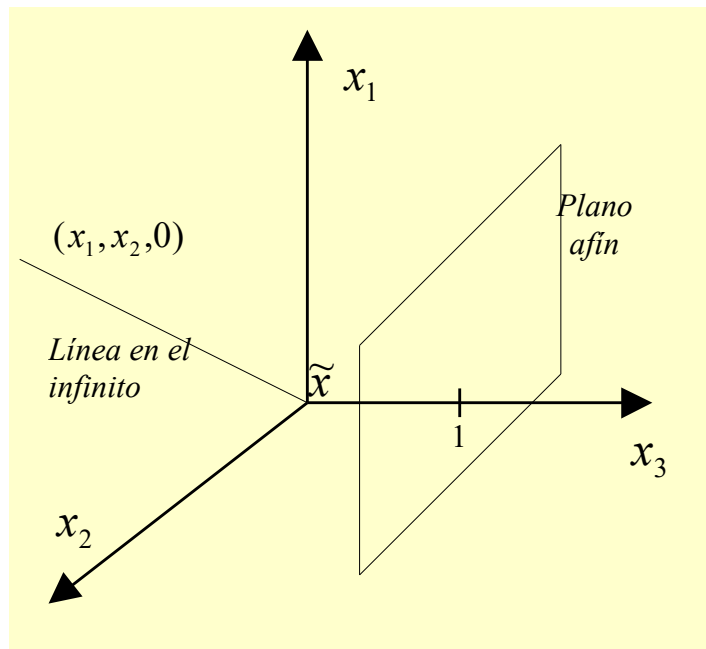


Plano Proyectivo P^2

- Plano Proyectivo P^2

$$\text{Si } x_3 \neq 0; \quad \tilde{x} \cong [x_1, x_2, x_3]^T \Rightarrow \tilde{x} \cong \left[\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1 \right]^T \cong [X_1, X_2, 1]^T$$

- Este conjunto de puntos define el plano Afín



Falta por considerar los puntos con $x_3=0$ que definen la recta del infinito.

Plano Proyectivo P^2

- Plano Proyectivo P^2

- Pertenencia de un punto a una recta en el plano proyectivo:

$$\tilde{l}^T \cdot \tilde{x} = 0 \Rightarrow l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 = 0$$

- Pertenencia de un punto a una recta en el plano afín:

$$l_1 X_1 + l_2 X_2 + l_3 = 0$$

- Distancia punto a una recta:

$$dist(\tilde{x}, \tilde{l}) = \frac{\tilde{l}^T \cdot \tilde{x}}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} \quad \vec{n} \cong [l_1 \quad l_2] \quad \text{Normal a la recta}$$

- Punto que pertenece a la recta que pasa por los puntos $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$

$$\tilde{x} \cong \alpha \tilde{x}_1 + \beta \tilde{x}_2 \quad \text{ó} \quad \tilde{x} \cong \gamma \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$$

$$\text{línea} \rightarrow \tilde{l} \cong \tilde{x}_1 \wedge \tilde{x}_2 \Rightarrow \tilde{l}^T \cdot \tilde{x} = 0$$

Plano Proyectivo P^2

- Producto Vectorial:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} \quad [\tilde{x}]_{\wedge} = \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{x}_3 & \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 & 0 & -\tilde{x}_1 \\ -\tilde{x}_2 & \tilde{x}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{l} \cong \tilde{x} \wedge \tilde{y} = [\tilde{x}]_{\wedge} \tilde{y}$$

Plano Proyectivo P^2

- Plano Proyectivo P^2

- Colineación en el plano proyectivo (Forma un grupo proyectivo):

$$\rho \tilde{y} = \tilde{A} \tilde{x} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Subgrupo Afín (Mantiene la recta en el infinito):

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{33}B_{2 \times 2} & a_{33}b_{2 \times 1} \\ 0_{1 \times 2} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Transformación de Similitud:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta \\ -\text{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + b_{2 \times 1}$$

rota (θ) Escala (c) Traslada (b)

- Transformación Euclídea: Transformación de Similitud con $c=1$

Plano Proyectivo P^2

- Correspondencia Homográfica u Homografía:

- Correspondencia uno a uno (lineal e invertible). Puede ser entre:

$$\tilde{m}' \cong \tilde{H} \tilde{m}$$

- Punto a punto
- Recta a recta
- Haz de rectas a haz de rectas

- Correlación:

- Transforma rectas en puntos y viceversa

$$\tilde{l} \cong \tilde{F} \tilde{x}$$

Tabla de Contenidos

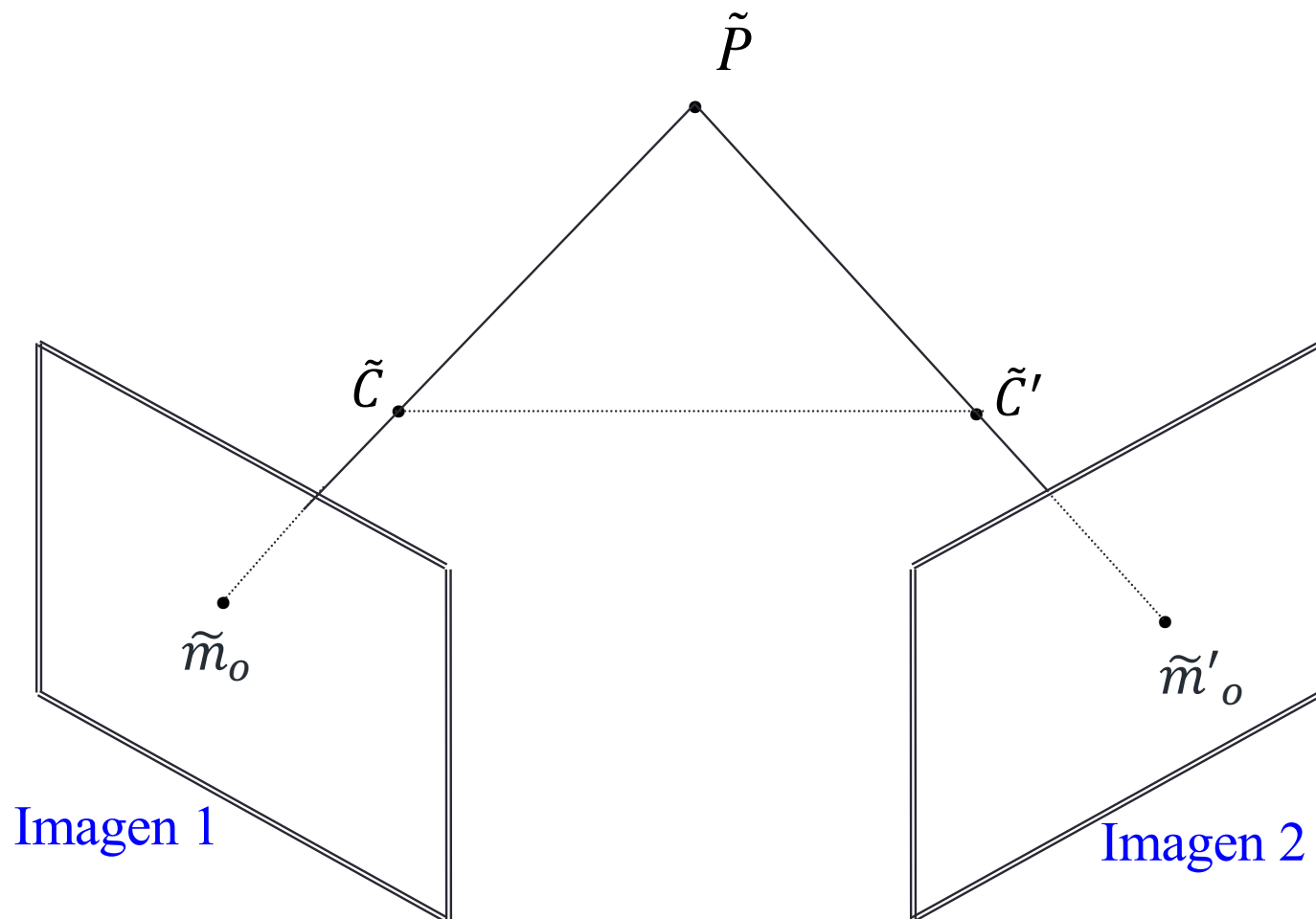
- Introducción
- **Modelo Proyectivo Estéreo Binocular**
 - Ejes Convergentes
 - Ejes Paralelos
- Homografía entre Planos Proyectivos
- Condición de Epipolaridad
- Matriz Fundamental

Disposición Binocular

- La disposición de los ejes ópticos puede ser:
 - *Ejes Convergentes*
 - *Ejes Paralelos*

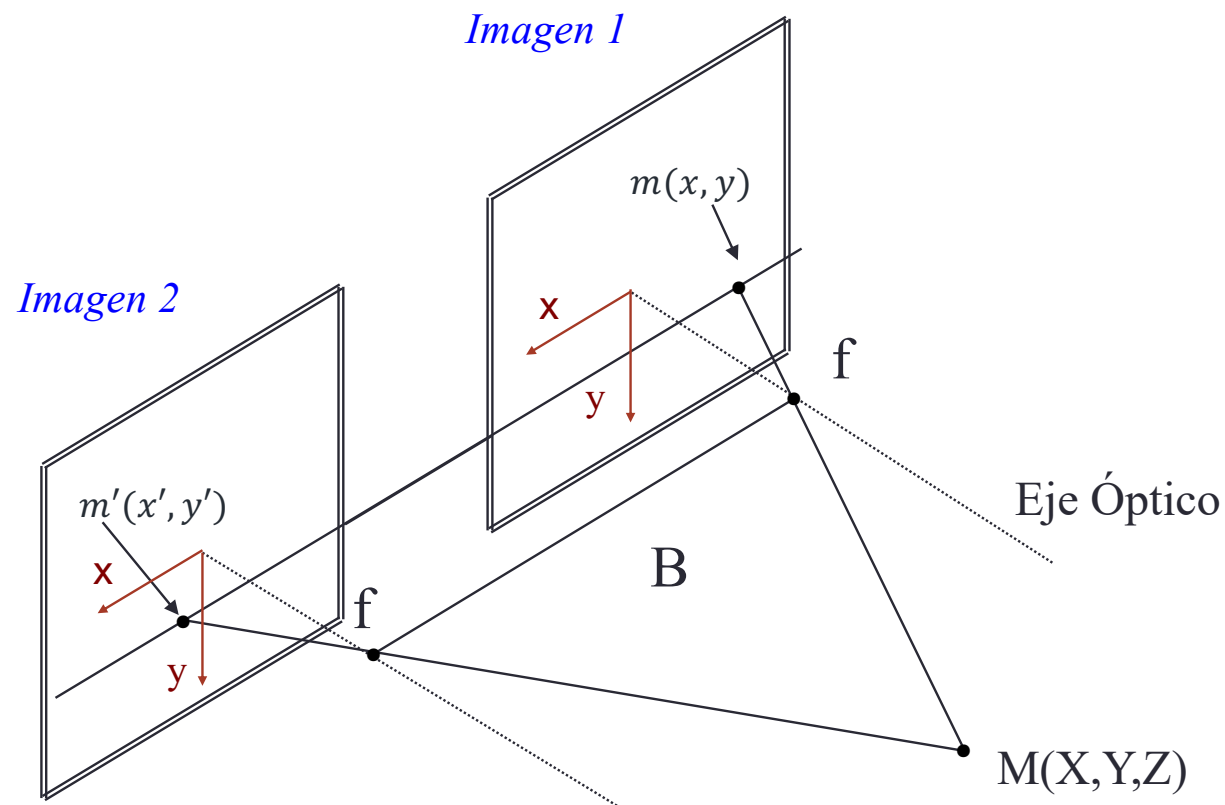
Disposición Binocular

- Ejes Convergentes
 - Facilita el proceso de correspondencia
 - Menos oclusiones



Disposición Binocular

- Ejes Alineados
 - Simplicidad en el modelo proyectivo y de reconstrucción
 - Mayor problema con oclusiones a distancias cercanas
 - Mayor dificultad de correspondencia (mayor disparidad)



Modelo Proyectivo Estéreo Binocular

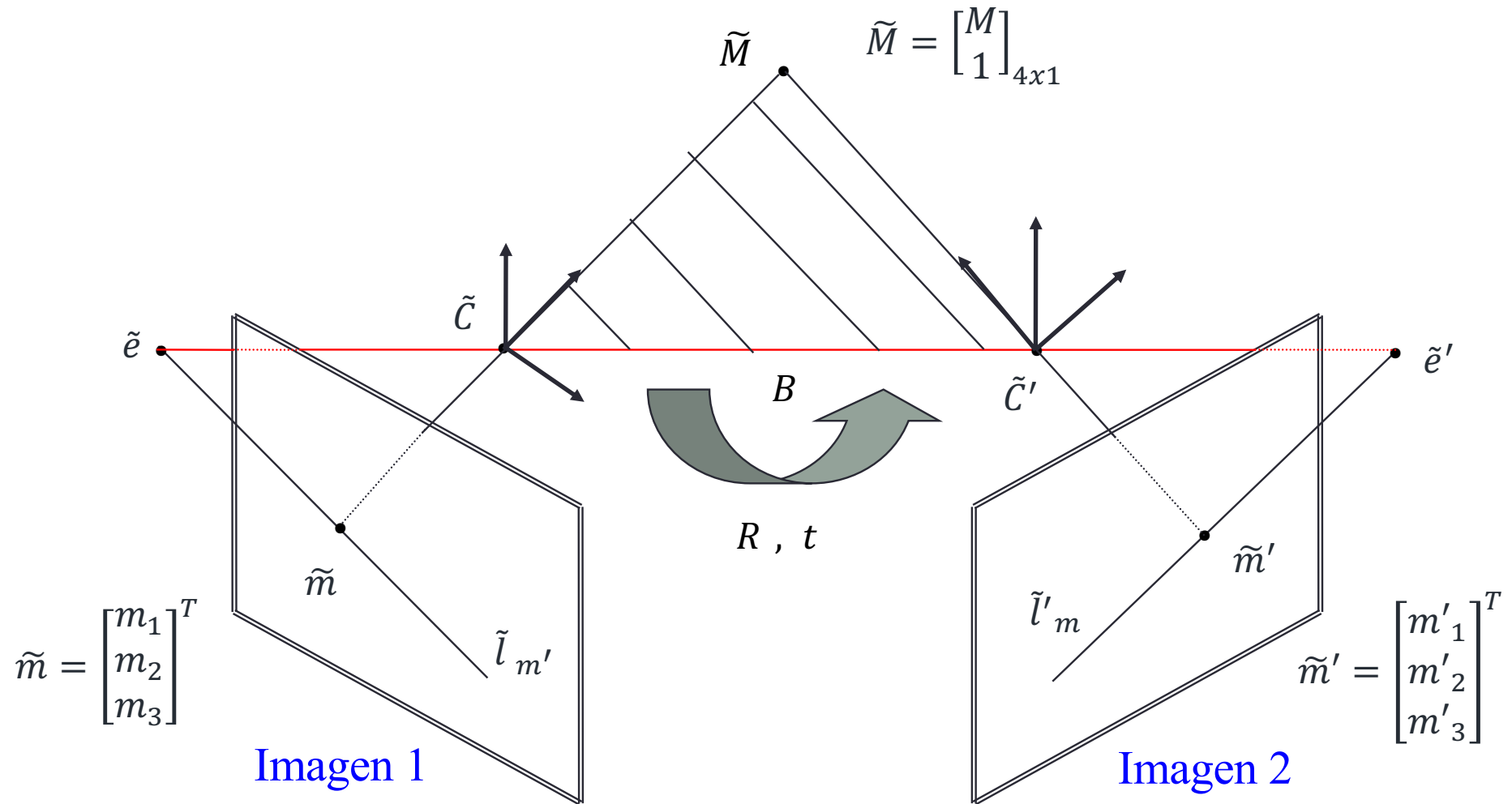
- La representación se puede realizar:
 - **En coordenadas del Mundo:** $\tilde{m} \cong \tilde{A} \tilde{M}_c^w \tilde{M}_w$
 - Presenta una excesiva dependencia del sistema de coordenadas del mundo, apareciendo términos que se cancelarán
 - Las características geométricas dependerán de los parámetros de cada cámara y de la disposición entre ellas, pero no de puntos del mundo y de su representación).
 - **En coordenadas de la Cámara:**

$$\tilde{m} \cong \tilde{A} \tilde{M}_c^w. \tilde{M}_w \cong \tilde{A} \tilde{M}_c$$

$$\text{con } \tilde{M}_c^w = I \quad \text{se define } \tilde{M}_{c'}^c = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Modelo Proyectivo Estéreo Binocular

- Disposición binocular de ejes convergentes

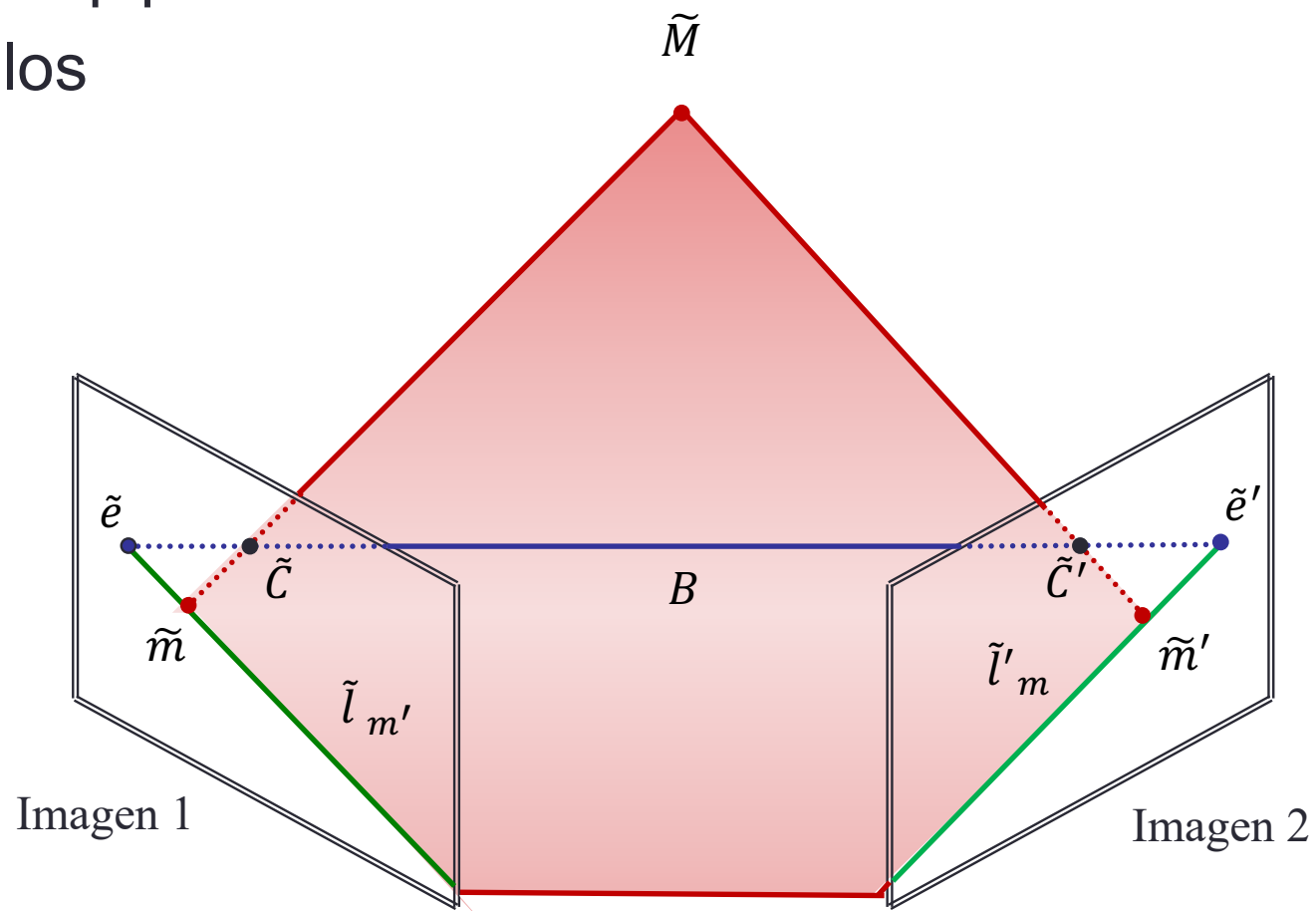


- Línea Base: $[\tilde{C}, \tilde{C}']$

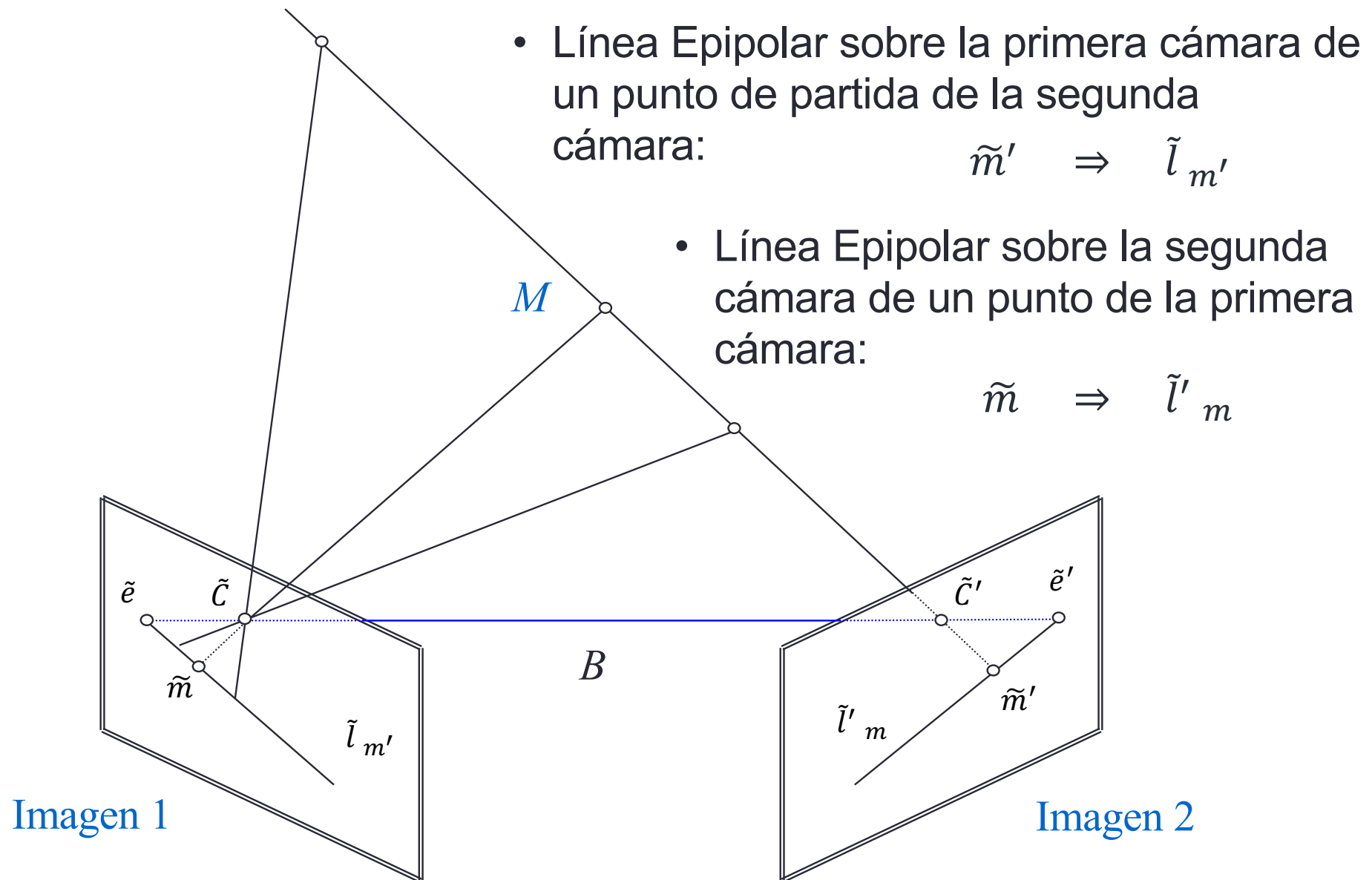
- Plano Epipolar: $[\tilde{M}, \tilde{C}, \tilde{C}']$

Modelo Proyectivo Estéreo Binocular

- Plano Epipolar
- Líneas epipolares
- Epipolos

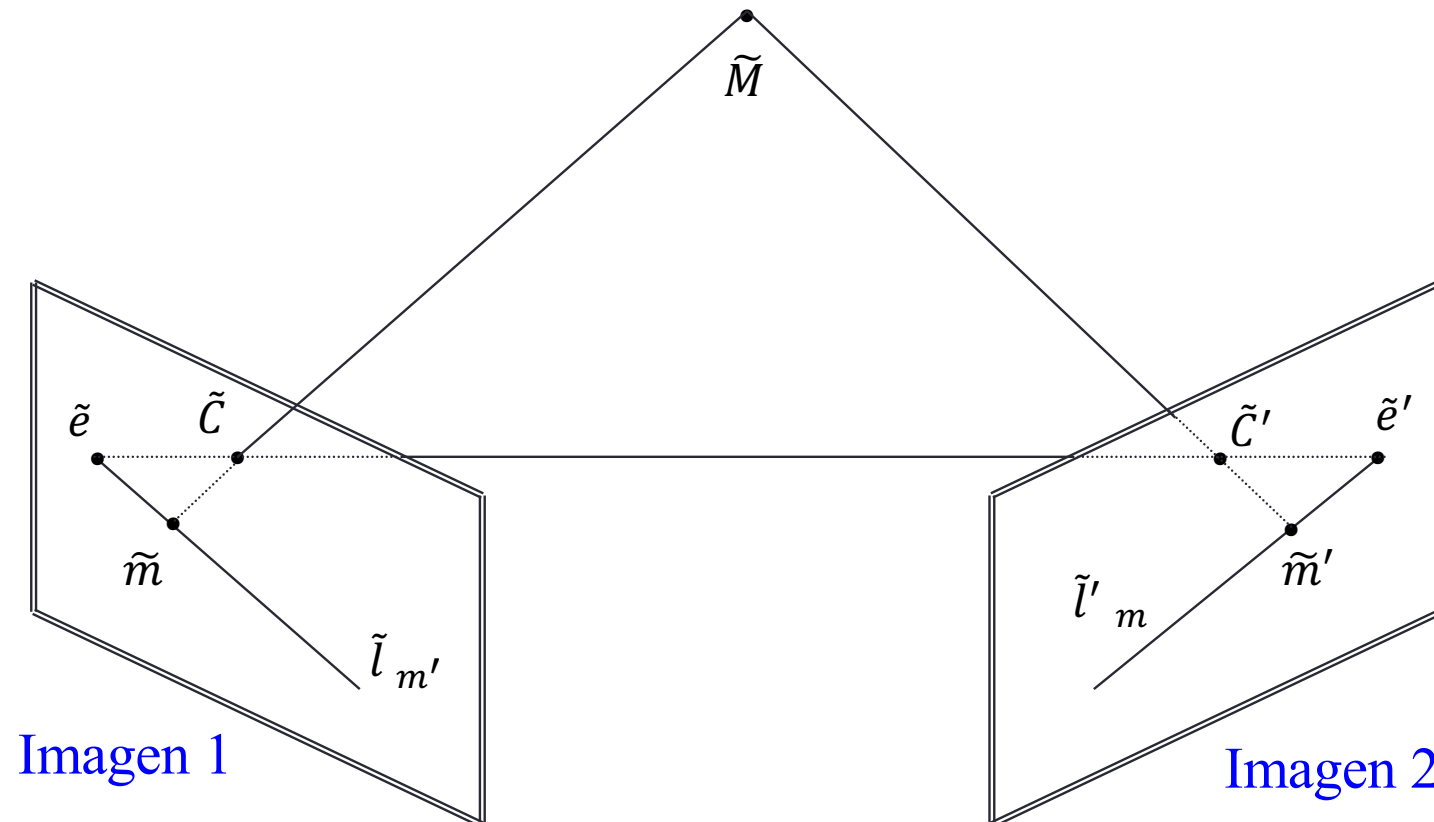


Modelo Proyectivo Estéreo Binocular



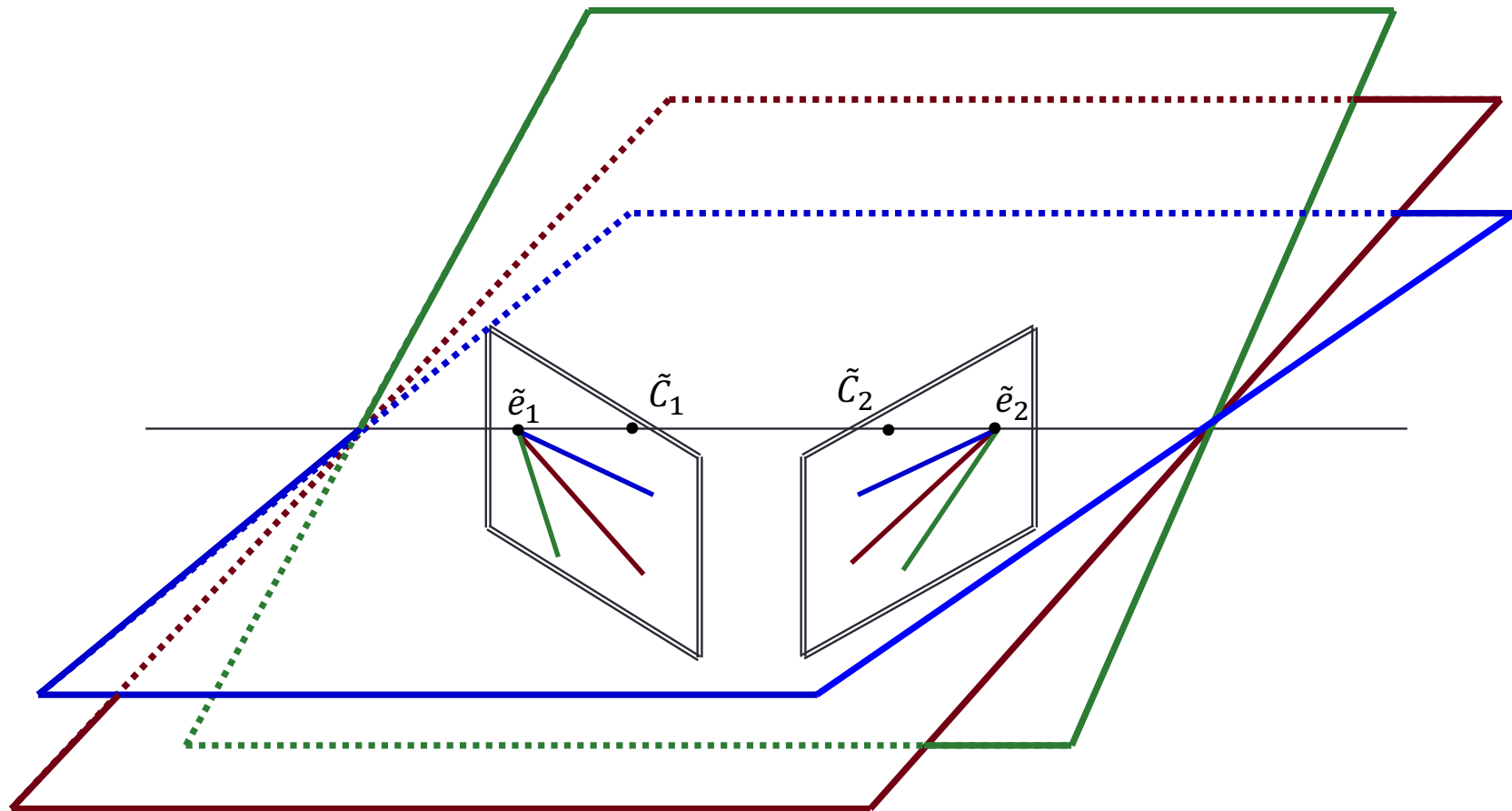
Modelo Proyectivo Estéreo Binocular

- Epipolos:
 - Punto de corte de todas las líneas epipolares $\forall \tilde{M}$
 - Proyección de $\tilde{C}'$ sobre la primera cámara $\tilde{l}_{m'} \Rightarrow \tilde{e}$
 - Proyección de $\tilde{C}$ sobre la segunda cámara $\tilde{l}'_m \Rightarrow \tilde{e}'$



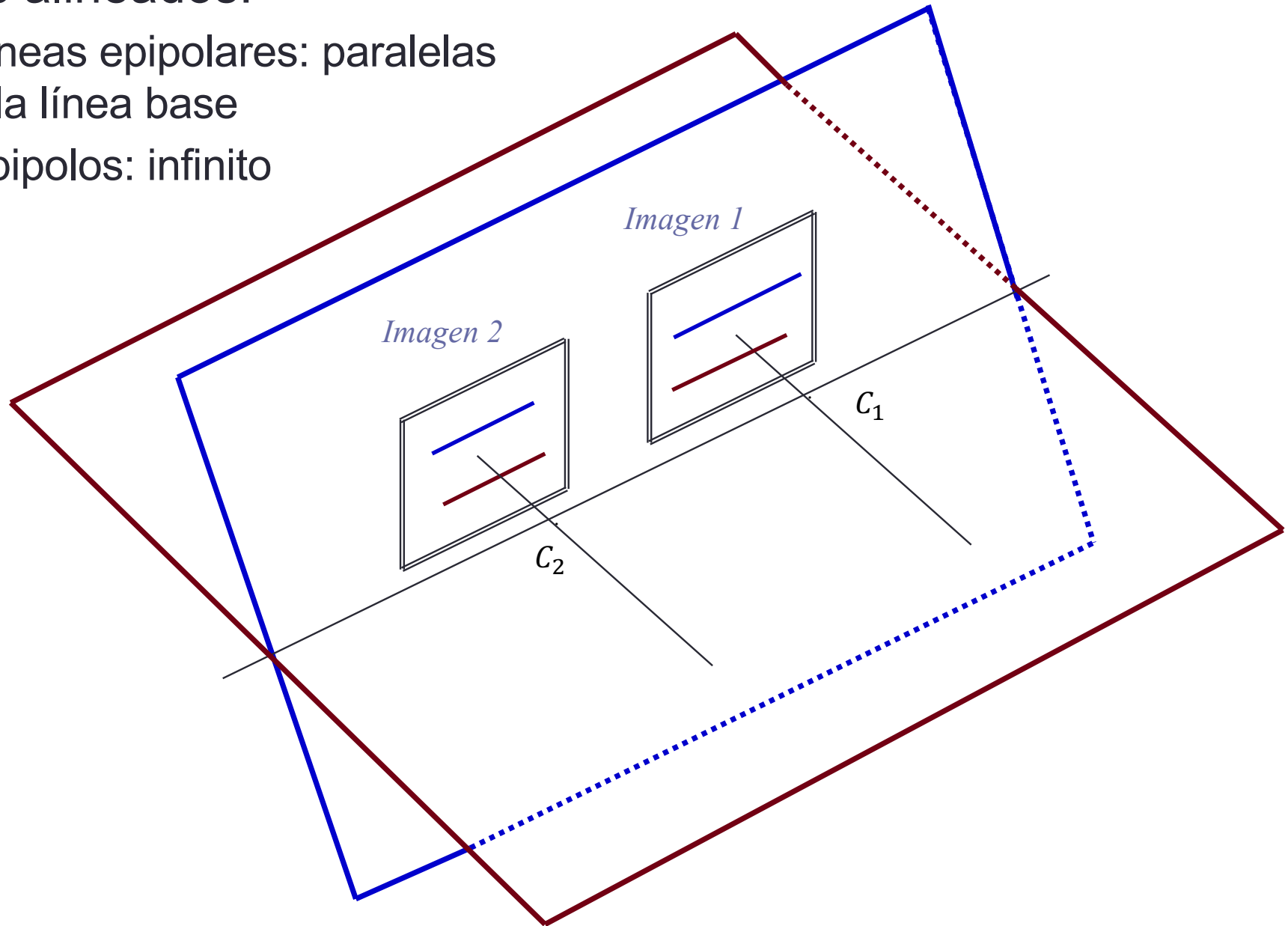
Haces de Planos Epipolares

- Ejes convergentes
 - Líneas epipolares: intersección planos epipolares sobre los planos de imagen



Haces de Planos Epipolares

- Ejes alineados:
 - Líneas epipolares: paralelas a la línea base
 - Epipolos: infinito



Modelo Proyectivo Estéreo (Coordenadas de la Cámara)

- Ecuaciones del modelo Proyectivo Estéreo:
 - Si se referencia las coordenadas al centro óptico de cada cámara, se cumplirá:

$$\tilde{m} = \tilde{m}_f \cong \tilde{A} \tilde{M}_c \quad ; \quad \tilde{m}' = \tilde{m}'_f \cong \tilde{A}' \tilde{M}_{c'}$$

$$\tilde{A} = A[I \quad 0] \quad ; \quad \tilde{A}' = A'[I \quad 0]$$

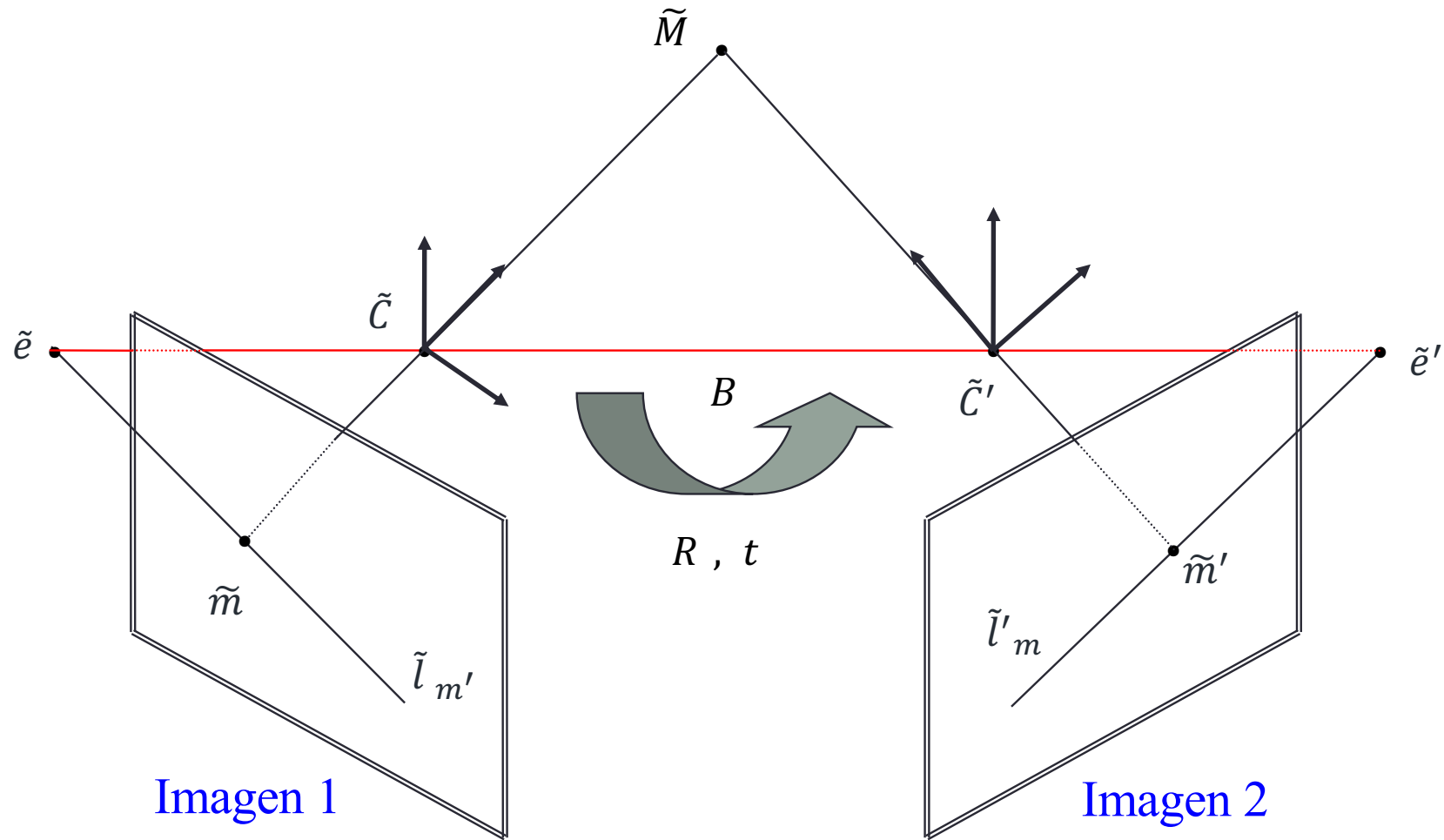
- Los ejes coincidentes con los centros y ejes ópticos de cada cámara, estarán relacionadas por una rotación y una traslación:

$$\tilde{M}_{c'} = \tilde{M}_c^c \quad \text{con} \quad \tilde{M}_c^c = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \tilde{M}_c^{c'} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Para un sistema de coordenadas 3D centrado en la cámara izquierda:

$$\tilde{m} \cong A[I \quad 0] \tilde{M}_c \quad ; \quad \tilde{m}' \cong A'[R \quad t] \tilde{M}_c$$

Modelo Proyectivo Estéreo (Coordenadas de la Cámara)



Modelo Proyectivo Estéreo (Coordenadas de la Cámara)

- Epipolo de la primera cámara:
 - La proyección sobre la primera cámara es:

$$\tilde{m} \cong \tilde{A} \tilde{M}_c = \tilde{A} \tilde{M}_c^{c'} \tilde{M}_{c'}$$

- Para el epipolo se analiza la proyección del centro óptico de la segunda cámara sobre la primera:

$$\text{Si } \tilde{M}_{c'} \cong [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \Rightarrow \tilde{m} \cong \tilde{e}$$

$$\tilde{e} \cong \tilde{A} \begin{bmatrix} R^T & -R^T t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [A \ 0] \begin{bmatrix} -R^T t \\ 1 \end{bmatrix} = -A R^T t$$

$$\tilde{e} \cong A R^T t$$

Modelo Proyectivo Estéreo (Coordenadas de la Cámara)

- Epipolo de la segunda cámara:
 - La proyección sobre la segunda cámara es:

$$\tilde{m}' \cong \tilde{A}' \tilde{M}_{c'} = \tilde{A}' \tilde{M}_{c'}^c \tilde{M}_c$$

- Para el epipolo se analiza la proyección del centro óptico de la primera cámara sobre la segunda:

$$\text{Si } \tilde{M}_{c'} \cong [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \Rightarrow \tilde{m}' \cong \tilde{e}'$$

$$\tilde{e}' \cong \tilde{A}' \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [A' \ 0] \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} = A' t$$

$$\tilde{e}' \cong A' t$$

Modelo Proyectivo Estéreo (Coordenadas de la Cámara)

- Recta epipolar en la segunda cámara para $\tilde{m}$

$$\tilde{l}'_m \cong \tilde{e}' \wedge \tilde{m}'$$

$$\tilde{m} \cong \tilde{A} \tilde{M}_c = [A \quad 0] \begin{bmatrix} M \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con: $\tilde{e}' \cong A' t$

$$\tilde{m} \cong A M$$

$$\tilde{m}' \cong [A' \quad 0] \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ 1 \end{bmatrix} = A' R M + A' t = A' R [\lambda A^{-1} \tilde{m}] + A' t$$

$$\tilde{l}'_m \cong \tilde{e}' \wedge \tilde{m}' = [A' t] \wedge A' R A^{-1} \tilde{m} = A'^{-T} [t]_{\wedge} R A^{-1} \tilde{m}$$

$$\tilde{l}_{m'} \cong \tilde{e} \wedge \tilde{m} = [A R^T t] \wedge A R^T A'^{-1} \tilde{m}' = A^{-T} R^T [t]_{\wedge} A'^{-1} \tilde{m}'$$

$$\tilde{l}_{m'} \cong A^{-T} R^T [t]_{\wedge} A'^{-1} \tilde{m}'$$

$$\tilde{l}'_m \cong A'^{-T} [t]_{\wedge} R A^{-1} \tilde{m}$$

Tabla de Contenidos

- Introducción
- Modelo Proyectivo Estéreo Binocular
- **Homografía entre Planos Proyectivos**
 - Homografía entre puntos del Plano del Infinito
 - Homografía entre puntos de un Plano
- Condición de Epipolaridad

Homografías entre Planos Proyectivos

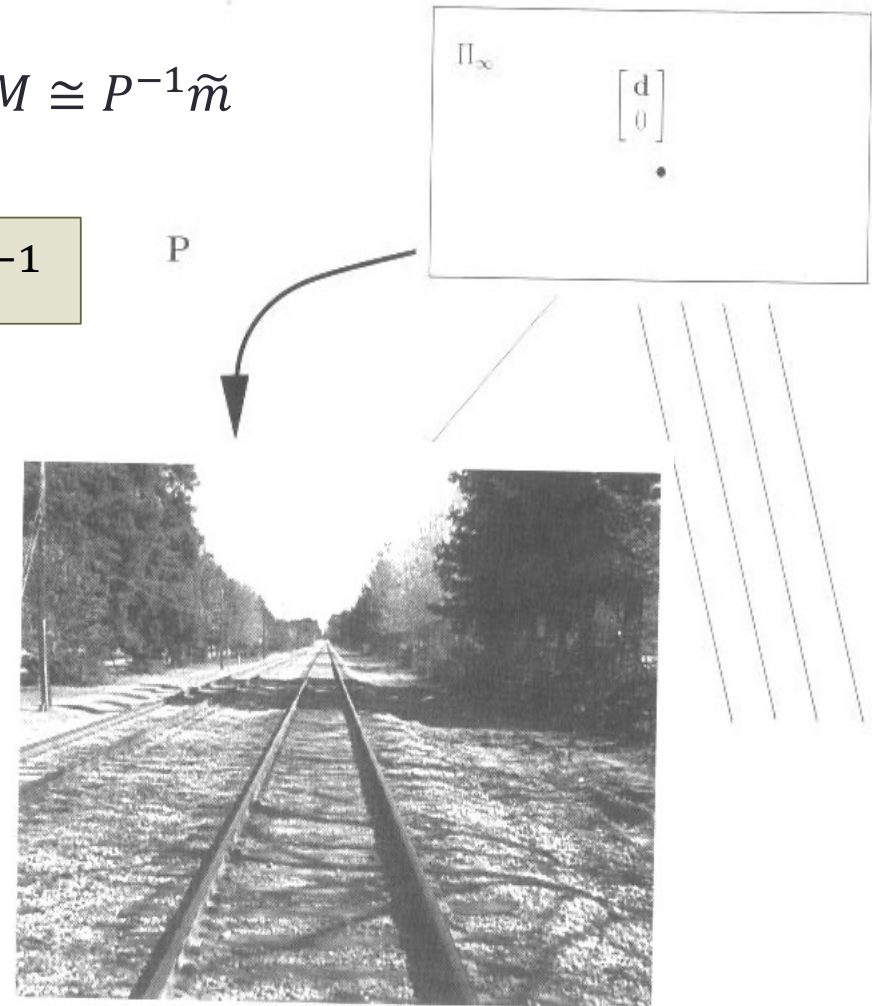
- Plano en el infinito – Imagen

Punto proyectado $\tilde{m} \cong \tilde{P} \tilde{M} = A[R \quad t]\tilde{M} = [P \quad p]\tilde{M}$

Si $\tilde{M} \cong \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix} \in \Pi_\infty \Rightarrow \tilde{m} \cong P M \Rightarrow M \cong P^{-1}\tilde{m}$

$$M \cong H_\infty \tilde{m}, \quad H_\infty \cong P^{-1} = R^T \cdot A^{-1}$$

- Proyecta intersecciones de líneas paralelas en puntos de desvanecimiento
- Los puntos del infinito (desvanecimiento) representan direcciones



Homografía entre Puntos del Plano del Infinito

- Par Estéreo. Coordenadas de Cámara:

$$\tilde{m} \cong \tilde{A} \tilde{M}_c = [A \quad 0] \tilde{M}_c \quad ; \quad \tilde{m}' \cong \tilde{A}' \tilde{M}_{c'} = [A' \quad 0] \tilde{M}_{c'}$$

$$\tilde{M}_{c'} = \tilde{M}_c^c, \tilde{M}_c \quad \text{con} \quad \tilde{M}_c^c = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \tilde{M}_c^{c'} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Proyectando en Cámara 1:** $\tilde{M}_c \cong \begin{bmatrix} M_c \\ 0 \end{bmatrix} \in \Pi_\infty \Rightarrow \tilde{m} \cong [A \quad 0] \begin{bmatrix} M_c \\ 0 \end{bmatrix} = A M_c \Rightarrow M_c \cong A^{-1} \tilde{m}$
- **Proyectando en Cámara 2:** $\tilde{M}_c \cong \begin{bmatrix} M_c \\ 0 \end{bmatrix} \in \Pi_\infty$ en la segunda cámara $\tilde{m}' \cong \tilde{A}' \tilde{M}_{c'}$

$$\tilde{m}' \cong \tilde{A}' \tilde{M}_c^c \begin{bmatrix} M_c \\ 0 \end{bmatrix} = [A' \quad 0] \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_c \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{m}' \cong A' R M_c$$

$$\tilde{m}' \cong A' R A^{-1} \tilde{m} \quad \Rightarrow \quad \tilde{m}' \cong \tilde{H}_\infty \tilde{m} \quad \text{con}$$

$$\tilde{H}_\infty \cong A' R A^{-1}$$

Homografía entre Puntos de un Plano

- Plano Imagen – Plano de Imagen
 - El Plano Π no pasa por el centro óptico $\mathbf{C}$

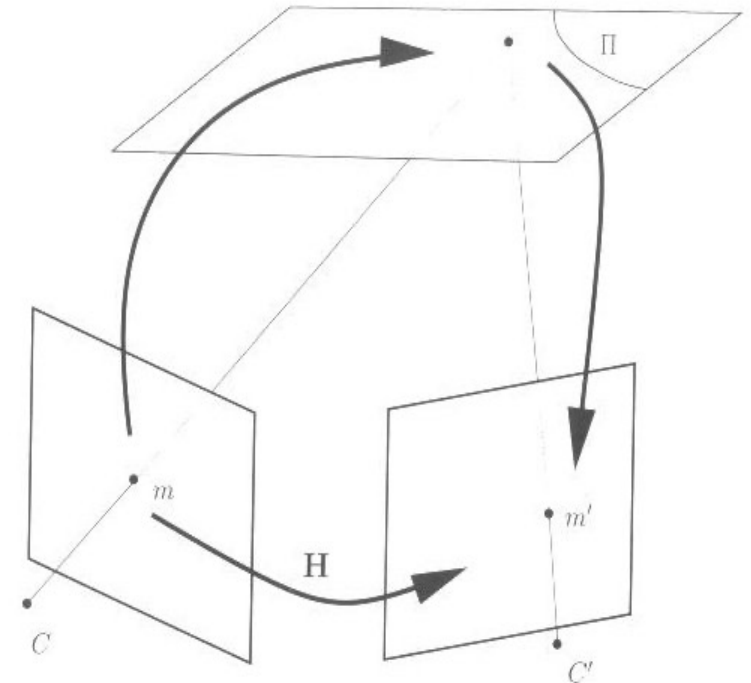
$$\tilde{m} \cong \tilde{P} \tilde{M} \quad ; \quad \tilde{m}' \cong \tilde{P}' \tilde{M}$$

$$\text{Si } \tilde{M} \cong \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \Pi \Rightarrow \tilde{m} \cong \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{m} \cong \tilde{H}_1 \tilde{M}_\Pi, \quad \tilde{M}_\Pi \cong \tilde{H}_1^{-1} \tilde{m}$$

$$\tilde{m}' \cong \tilde{H}_2 \tilde{M}_\Pi = \tilde{H}_2 \tilde{H}_1^{-1} \tilde{m}$$

$$\tilde{m}' \cong \tilde{H}_\Pi \tilde{m}$$



Homografía entre Puntos de un Plano

- $\tilde{H}_\pi$ Tiene 8 grados de libertad (nueve elementos menos uno por el escalado)
- Se puede obtener conociendo las proyecciones de cuatro puntos que sean base proyectiva:

Sean $\tilde{M}_i \in \Pi$ con $i = 1, \dots, 4$

Si se conocen $\tilde{m}_i, \tilde{m}'_i$ con $\tilde{m}_i = \tilde{P}\tilde{M}_i$; $\tilde{m}'_i = \tilde{P}'\tilde{M}_i$

Se obtiene $\tilde{H}_\Pi$

$$\begin{bmatrix} \rho \cdot x' \\ \rho \cdot y' \\ \rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} (h_{31}x + h_{32}y + h_{33}) \cdot x' &= h_{11}x + h_{12}y + h_{13} \\ (h_{31}x + h_{32}y + h_{33}) \cdot y' &= h_{21}x + h_{22}y + h_{23} \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}_{xy} = \begin{bmatrix} -x^{(1)} & -y^{(1)} & -1 & 0 & 0 & 0 & x^{(1)}x'^{(1)} & y^{(1)}x'^{(1)} & x'^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & -x^{(1)} & -y^{(1)} & -1 & x^{(1)}y'^{(1)} & y^{(1)}y'^{(1)} & y'^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

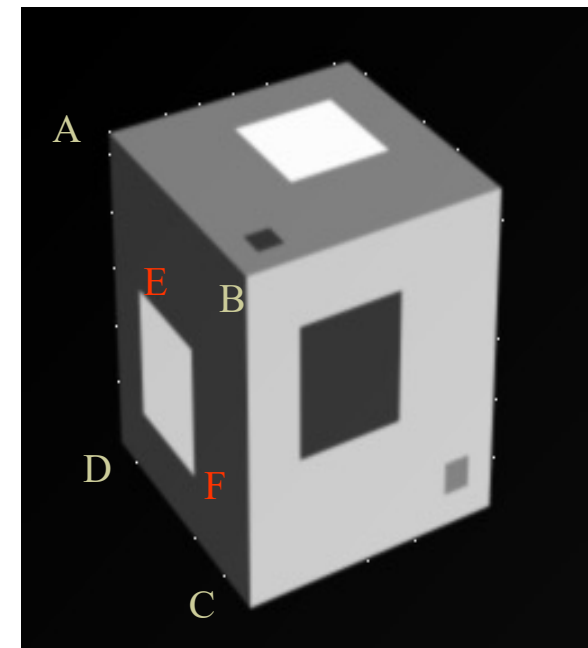
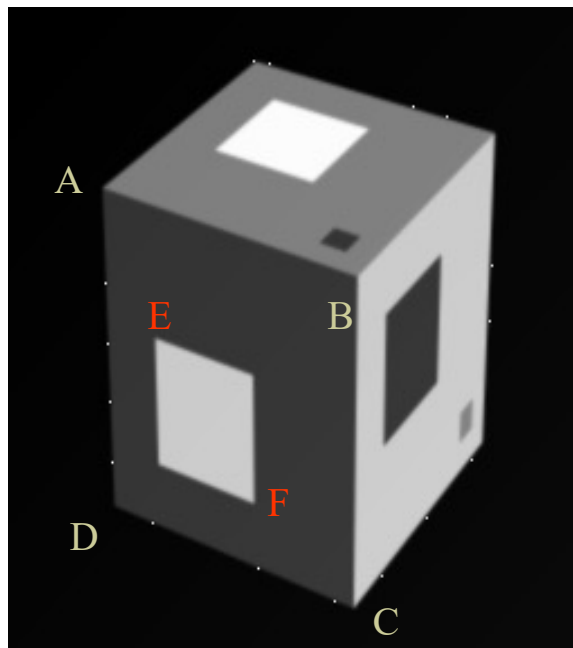
$$\mathbf{h} = [h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{21}, h_{22}, h_{23}, h_{31}, h_{32}, h_{33}]^T$$

$$\mathbf{A}_{xy} \cdot \mathbf{h} = 0 \quad \min_{\mathbf{h}} [(\mathbf{A}_{xy}\mathbf{h})^2]$$

$$SVD(\mathbf{A}_{xy}) \rightarrow \mathbf{A}_{xy} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T \Rightarrow \mathbf{h} = \mathbf{v}_n$$

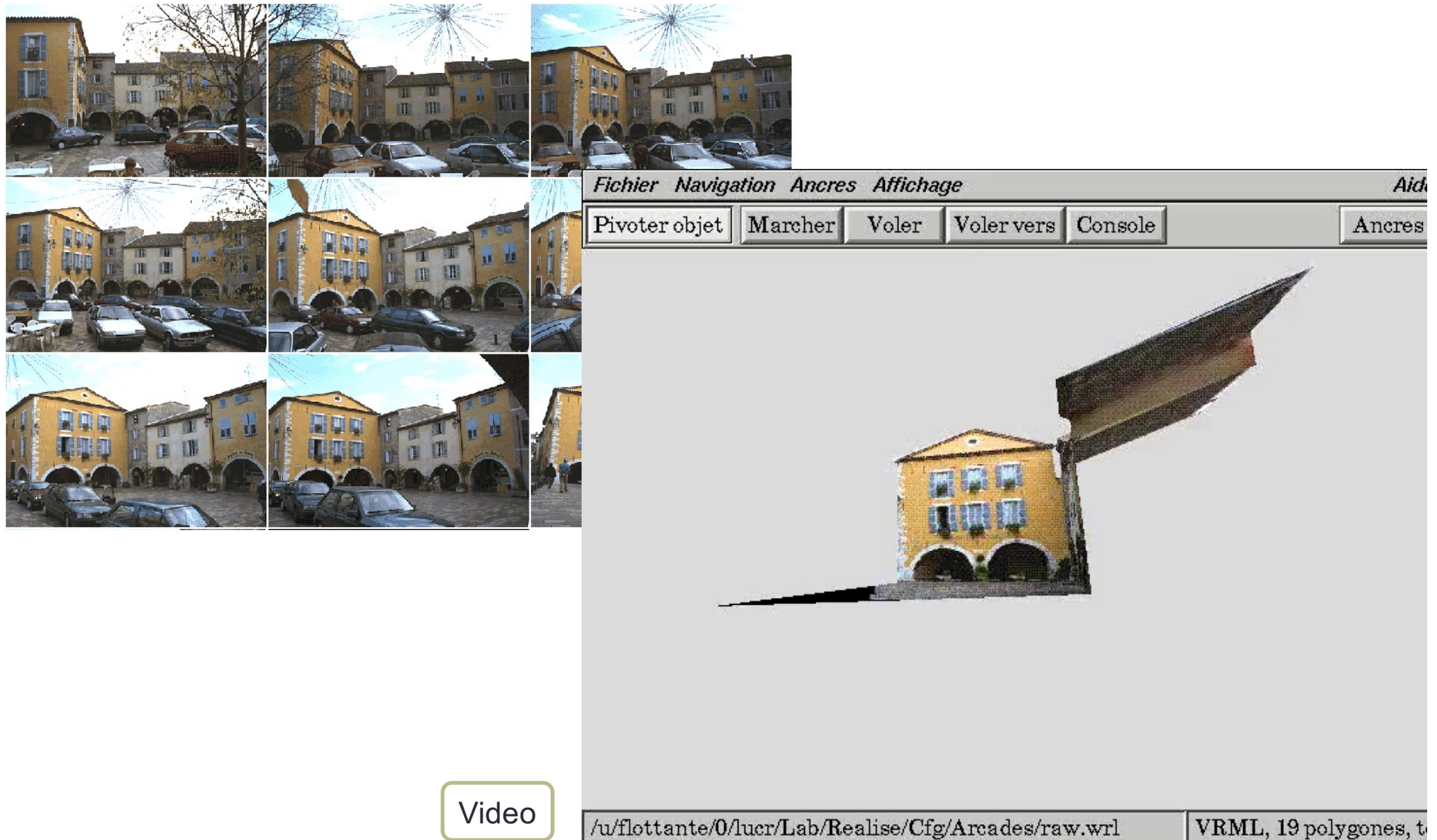
Homografía entre Puntos de un Plano

- Cálculo de la Homografía entre Puntos de un Plano:
 - Se hallan la proyección de puntos del plano
 - Se obtiene la matriz $\tilde{H}_{\Pi}$
- Se puede emplear para hallar la correspondencia de cualquier punto del plano



Homografía entre Puntos de un Plano

- Ejemplo: Fotogrametría - Modelado 3D



Homografía entre Puntos (Disposición General)

$$\text{Si } \tilde{m} \cong \tilde{A} \tilde{M}_c = [A \ 0] \tilde{M}_c \ ; \quad \tilde{m}' \cong \tilde{A}' \tilde{M}_{c'} = [A' \ 0] \tilde{M}_{c'}$$

$$\tilde{M}_{c'} = \tilde{M}_{c'}^c \tilde{M}_c \quad \text{con} \quad \tilde{M}_{c'}^c = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ ; \quad \tilde{M}_c^c = \begin{bmatrix} R^T & -R^T t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Proyectando en Cámara 1:** $\tilde{M}_c = \begin{bmatrix} M_c \\ 1 \end{bmatrix} \in P^3 \Rightarrow \tilde{m} \cong A M_c \Rightarrow M_c \cong A^{-1} \tilde{m}$
- **Proyectando en Cámara 2:** $\tilde{M}_c \in P^3$ en la segunda cámara $\tilde{m}' \cong \tilde{A}' \tilde{M}_{c'} = A' M_{c'}$

$$\text{Con } \tilde{M}_{c'} = \begin{bmatrix} M_{c'} \\ 1 \end{bmatrix} = \tilde{M}_{c'}^c \begin{bmatrix} M_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R M_c + t \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M_{c'} = R M_c + t$$

$$\tilde{m}' \cong A' M_{c'} = A' (R M_c + t) = \lambda A' R A^{-1} \tilde{m} + A' t = H_\infty \tilde{m} + A' t$$

$$\tilde{m}' \cong H_\infty \tilde{m} + \lambda \tilde{e}'$$

Recta Epipolar

$$\tilde{H}_\infty \cong A' R A^{-1}$$

$$\tilde{e}' \cong A' t$$

Homografía entre Puntos. Mosaico

- Mosaico: Se adquiere una secuencia de imágenes:
 - Sin translación ($t=0$)
 - Con rotación y cambio de parámetros intrínsecos

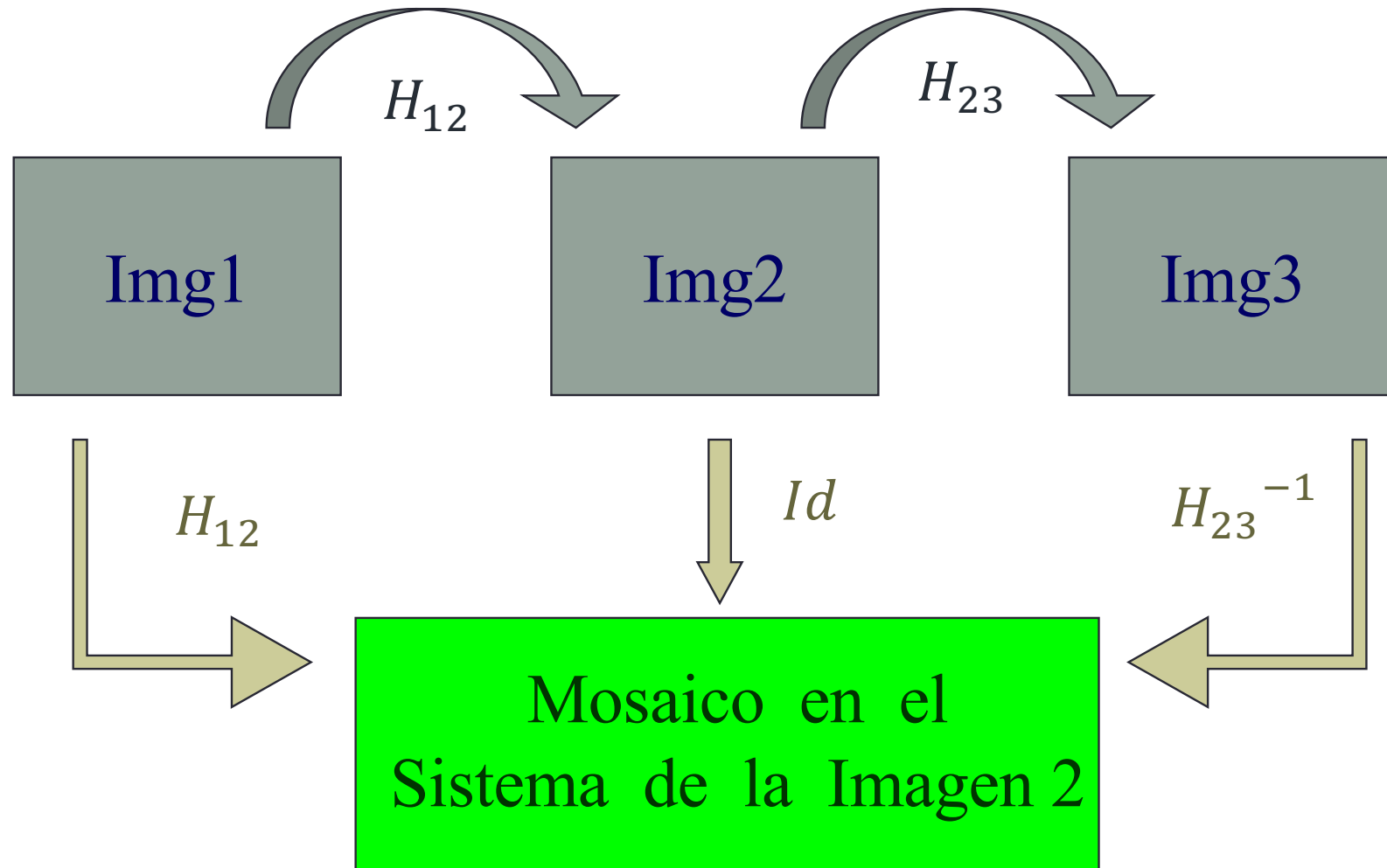
$$\text{Si } \tilde{m} \cong \tilde{A} \tilde{M}_c \cong [A \ 0] \tilde{M}_c \cong A M_c \quad \Rightarrow M_c \cong A^{-1} \tilde{m}$$

$$\tilde{m}' \cong \tilde{A}' \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{M}_c \cong [A' \ 0] \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{M}_c \cong A' R M_c$$

$$\tilde{m}' \cong A' R A^{-1} \tilde{m} \quad \Rightarrow \quad \tilde{m}' \cong \tilde{H}_\theta \tilde{m} \quad \text{con} \quad \tilde{H}_\theta = \tilde{H}_\infty \cong A' R A^{-1}$$

$$\tilde{m}' \cong H_\theta \tilde{m} \quad \text{con} \quad H_\theta = H_\infty$$

Homografía entre Puntos. Mosaico



Homografía entre Puntos. Mosaico



Video



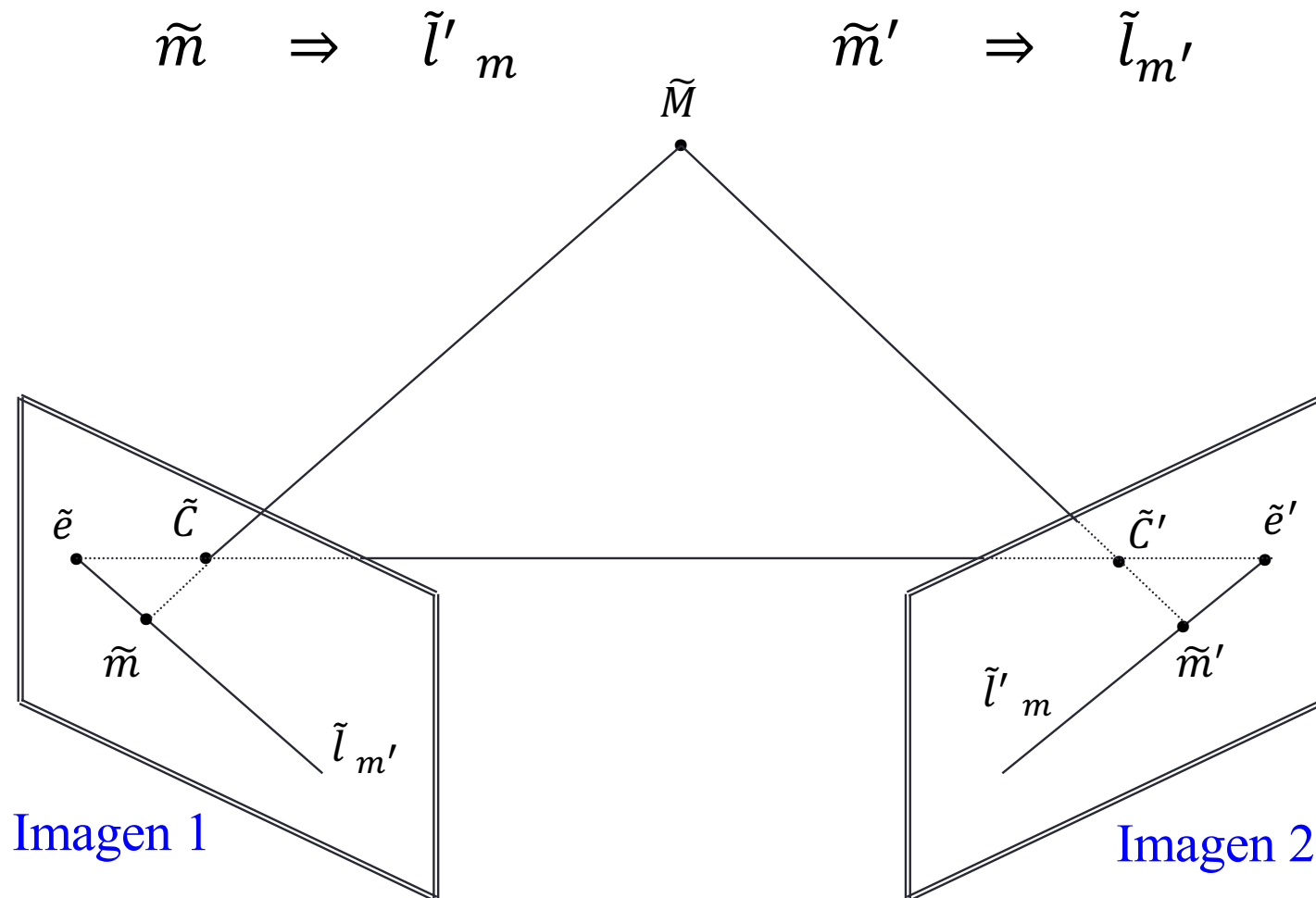
Mosaico del Hotel Carlton
(Imad Zoghlami)

Tabla de Contenidos

- Introducción
- Modelo Proyectivo Estéreo Binocular
- Homografía entre Planos Proyectivos
- Condición de Epipolaridad
 - Matriz Fundamental
 - Matriz Esencial
 - Disposición de ejes alineados
 - Disposición Trinocular

Condición de Epipolaridad

- A cada punto en una imagen se asocia una línea Epipolar en la otra imagen:



Condición de Epipolaridad

- Recta epipolar en la segunda cámara para un punto en la primera cámara: $\tilde{m}$

$$\tilde{l}'_m \cong A'^{-T} [t]_{\wedge} R A^{-1} \tilde{m}$$

- Se puede expresar:

$$\tilde{F} \cong A'^{-T} [t]_{\wedge} R A^{-1}$$

$$\tilde{l}'_m \cong \tilde{F} \tilde{m}$$

- Transforma a puntos de una imagen en líneas en la otra imagen (se denomina correlación)
- De igual forma se puede obtener para un punto de la segunda cámara:

$$\tilde{l}_{m'} \cong A^{-T} R^T [t]_{\wedge} A'^{-1} \tilde{m}'$$

$$\tilde{l}_{m'} \cong \tilde{F}^T \tilde{m}'$$

Condición de Epipolaridad

- A la matriz $\tilde{F}$ se le denomina matriz fundamental
 - Cumple: $\tilde{l}'_m \cong \tilde{F} \tilde{m}$ $\tilde{l}_{m'} \cong \tilde{F}^T \tilde{m}'$
 - Como: $\tilde{m}' \in \tilde{l}'_m \Rightarrow \tilde{m}'^T \cdot \tilde{l}'_m = 0 \Rightarrow \boxed{\tilde{m}'^T \tilde{F} \tilde{m} = 0}$
 - Como: $\tilde{m} \in \tilde{l}_{m'} \Rightarrow \tilde{m}^T \cdot \tilde{l}_{m'} = 0 \Rightarrow \boxed{\tilde{m}^T \tilde{F}^T \tilde{m}' = 0}$
- Para los epipolos: $\boxed{\tilde{F} \cdot \tilde{e} = 0 ; \quad \tilde{F}^T \cdot \tilde{e}' = 0}$
- La matriz Fundamental resume toda la información de correspondencia entre dos puntos originados por la proyección de un mismo punto espacial.

Condición de Epipolaridad

- Matriz Fundamental:

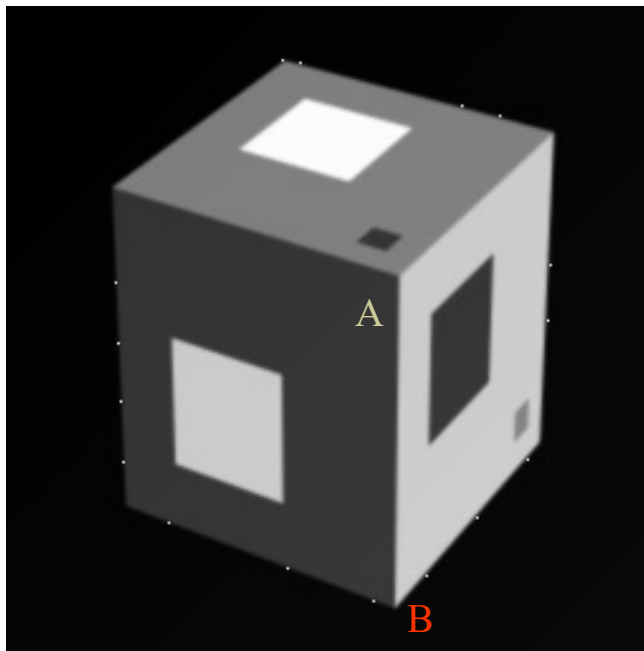
$$\tilde{m}'^T \tilde{F} \tilde{m} = 0$$

- Permite construir la condición de epipolaridad:
 - Dependiendo únicamente de las correspondencia entre puntos en las dos imágenes.
 - Sin depender del conocimiento de los parámetros de captación ni de la disposición de la escena
- El determinante de la matriz fundamental es 0, lo que unido a la condición de escalado da SIETE g.d.l.
- Para su cálculo se seleccionan puntos correspondientes en las dos imágenes, y se determinan con criterios lineales o no lineales.

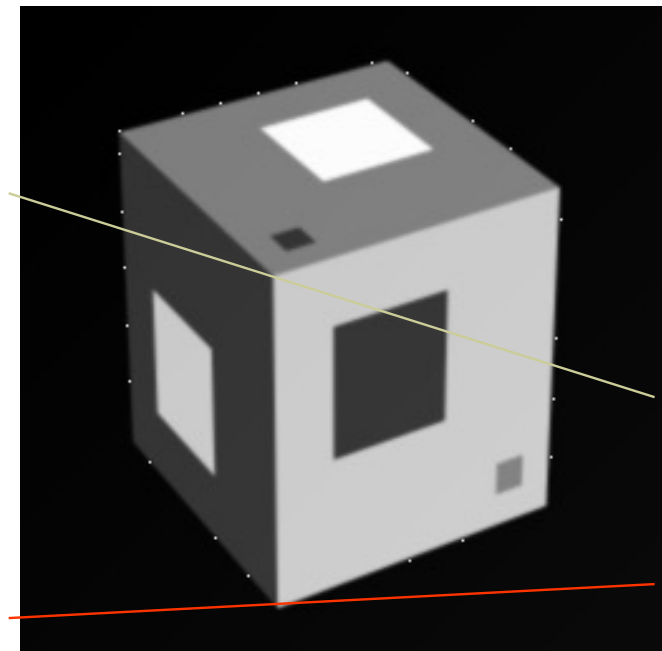
Condición de Epipolaridad

- Para cada punto de la primera (o segunda) imagen se puede determinar la línea epipolar en la segunda (o primera) imagen, tal que el punto correspondiente estará sobre ella.

$$\tilde{m}'^T \tilde{F} \tilde{m} = 0$$



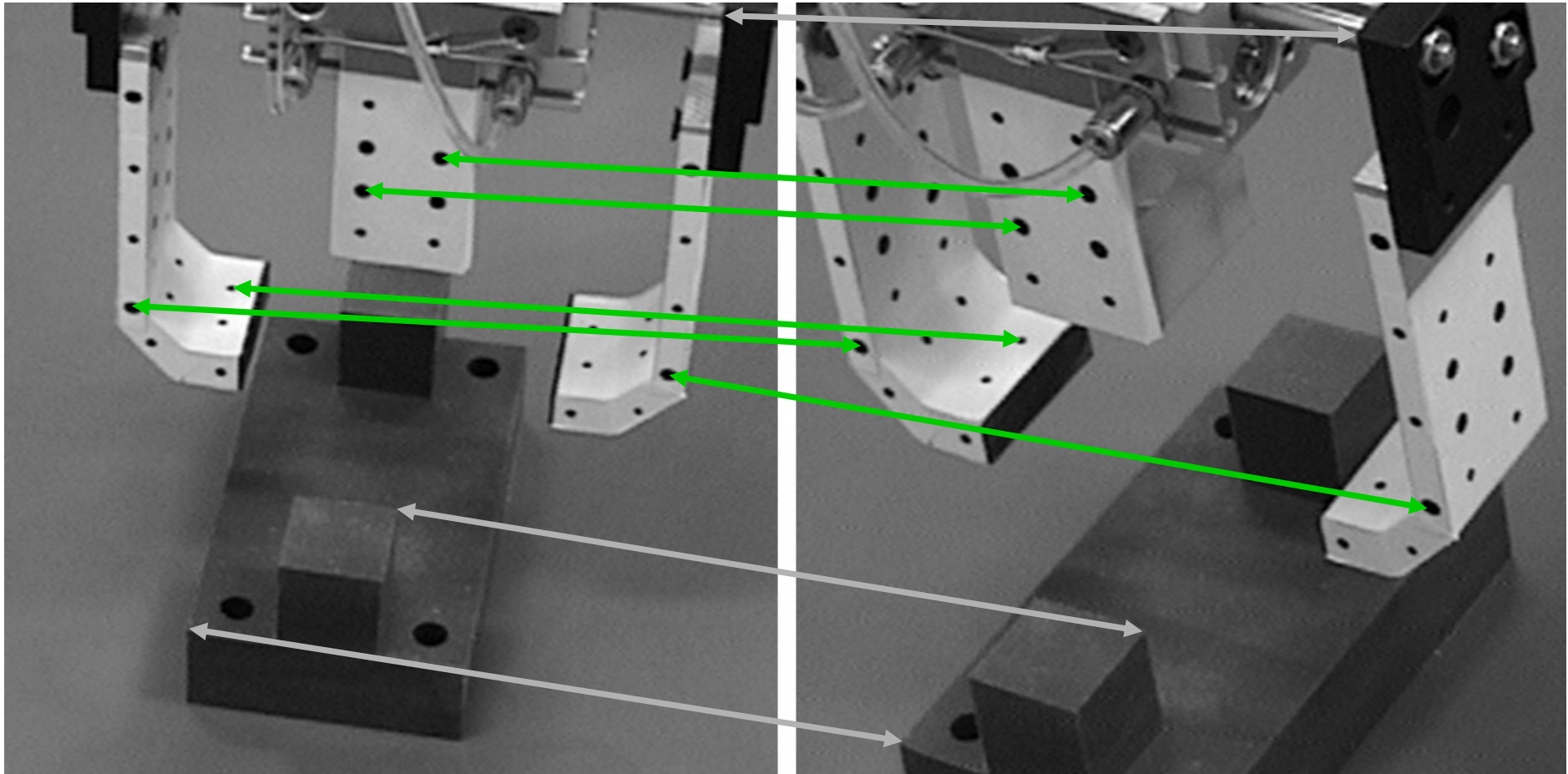
Cámara Izquierda



Cámara Derecha

Condición de Epipolaridad

- Estimación de la **Matriz Fundamental** a partir de un conjunto de puntos correspondientes en dos imágenes



- Con correspondencias sencillas se determina la matriz fundamental (≥ 7)
- Con la matriz fundamental se determinan correspondencia mas difíciles

Condición de Epipolaridad **Matriz Esencial**

- Si se define la expresión de un punto de la imagen en coordenadas Normalizadas como:

$$\tilde{m} \cong A\tilde{q} \Rightarrow \tilde{q} \cong A^{-1}\tilde{m} ; \quad \tilde{m}' \cong A'\tilde{q}' \Rightarrow \tilde{q}' \cong A'^{-1}\tilde{m}'$$

$$\text{Entonces: } \tilde{m}'^T F \tilde{m} = \tilde{m}'^T A'^{-T} [t]_{\wedge} R A^{-1} \tilde{m} = \tilde{q}'^T [t]_{\wedge} R \tilde{q} = 0$$

$$\tilde{q}'^T E \tilde{q} = 0$$

con

$$E \cong [t]_{\wedge} R$$

- Si las coordenadas están normalizadas, implica que se conocen los parámetros intrínsecos
- La matriz **E** se denomina **Matriz Esencial** y expresa que la condición de Epipolaridad sólo depende del movimiento relativo entre los sistemas ópticos de las dos cámaras.
- Es especialmente útil cuando se maneja una cámara móvil ($A' = A$)

6 g.d.l. - Dos valores singulares iguales

Condición de Epipolaridad Matriz Esencial

- La matriz esencial se puede aplicar a modelos de cámara no lineales:

$$\tilde{q} \cong A^{-1} \tilde{m} = [I \quad 0] \tilde{M}_c = \alpha \cdot M_c = \vec{p}$$

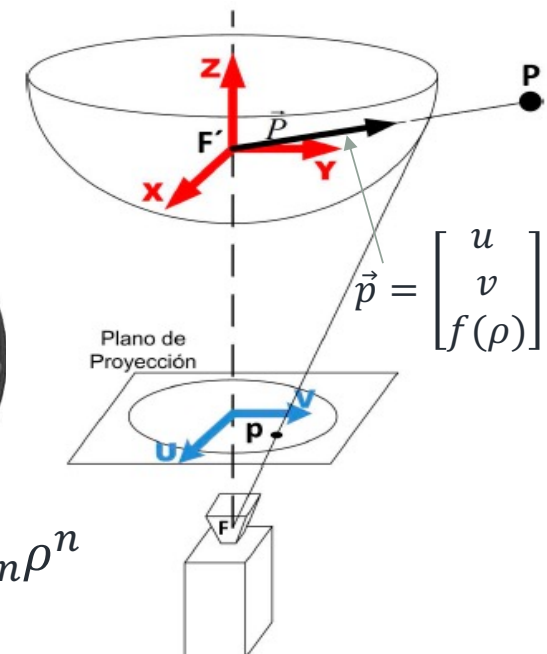
$$\tilde{q}' \cong A'^{-1} \tilde{m}' = [I \quad 0] \tilde{M}_{c'} = \alpha \cdot M_{c'} = \vec{p}'$$

- Donde $\vec{p}$, $\vec{p}'$ son los rayos proyección desde cada cámara

$$\vec{p}'^T E \vec{p} = 0$$

$$E \cong [t]_{\wedge} R$$

- Basta con disponer de un modelo en el que a cada punto de imagen nos asigne un rayo proyección: (p.e. Cámaras Omnidireccionales)



$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ e & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \end{bmatrix}$$

$$f(\rho) = a_0 + a_1\rho + \dots + a_n\rho^n$$

$$\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$$

Geometría Epipolar. Matriz Fundamental

- Resumen:

- La matriz fundamental posee 7 grados de libertad
 - 3 por la rotación
 - 2 por la translación (F no depende de la magnitud de la traslación, sólo de la dirección)
 - 2 por los parámetros intrínsecos (de los 10). La base de la calibración proyectiva es encontrar las relaciones (no lineales) entre ellos

$$F \cong A'^{-T} [t]_{\wedge} R A^{-1}$$

$$F \cong [e']_{\wedge} A' R A^{-1} \cong A'^{-T} R A^T [e]_{\wedge}$$

- Ante rotación pura la matriz fundamental es nula
- Relación entre la matriz fundamental y la homografía de cualquier plano:

$$F^T H_{\pi} + H_{\pi}^T F = 0$$

$$F \cong [e']_{\wedge} H_{\pi}$$

Cámaras de Ejes Alineados

- Sistemas de ejes alineados: $\tilde{F} \cong A'^{-T} [t]_{\wedge} R A^{-1}$ $\tilde{e} \cong A R^T t$
 $F \cong [e']_{\wedge} A' R A^{-1} \cong A'^{-T} R A^T [e]_{\wedge}$ $\tilde{e}' \cong A' t$
 - Epipolos en el infinito

$$\begin{aligned}\tilde{e} &\cong A t \\ \tilde{e}' &\cong A' t\end{aligned}$$

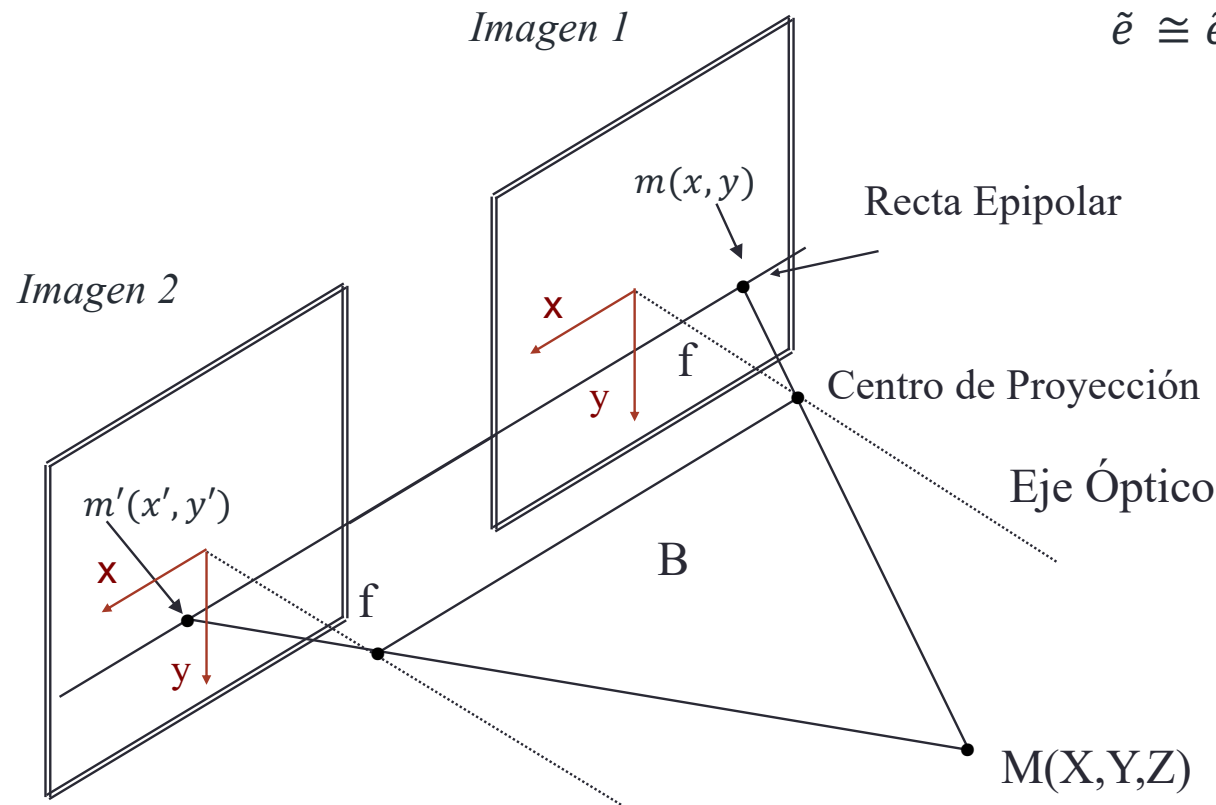
$$F \cong A'^{-T} [t]_{\wedge} A^{-1}$$



$$A = A'$$

$$F \cong [e]_{\wedge} \cong [e']_{\wedge}$$

$$\tilde{e} \cong \tilde{e}' \cong \begin{bmatrix} \tilde{e}_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow F \cong \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Restricción epipolar:

$$\tilde{m}'^T \tilde{F} \tilde{m} = 0$$

$$y = y'$$

Disparidad

$$d = x' - x$$

Comparación

- **EJES ALINEADOS**

- Ventaja: Simplicidad de cálculo
- Inconvenientes:
 - Dificultad de construcción
 - Si **B** es alto, las imágenes son muy distintas, con posibles malas correspondencias
 - Si **B** es bajo, se obtiene mala precisión

- **EJES CONVERGENTES**

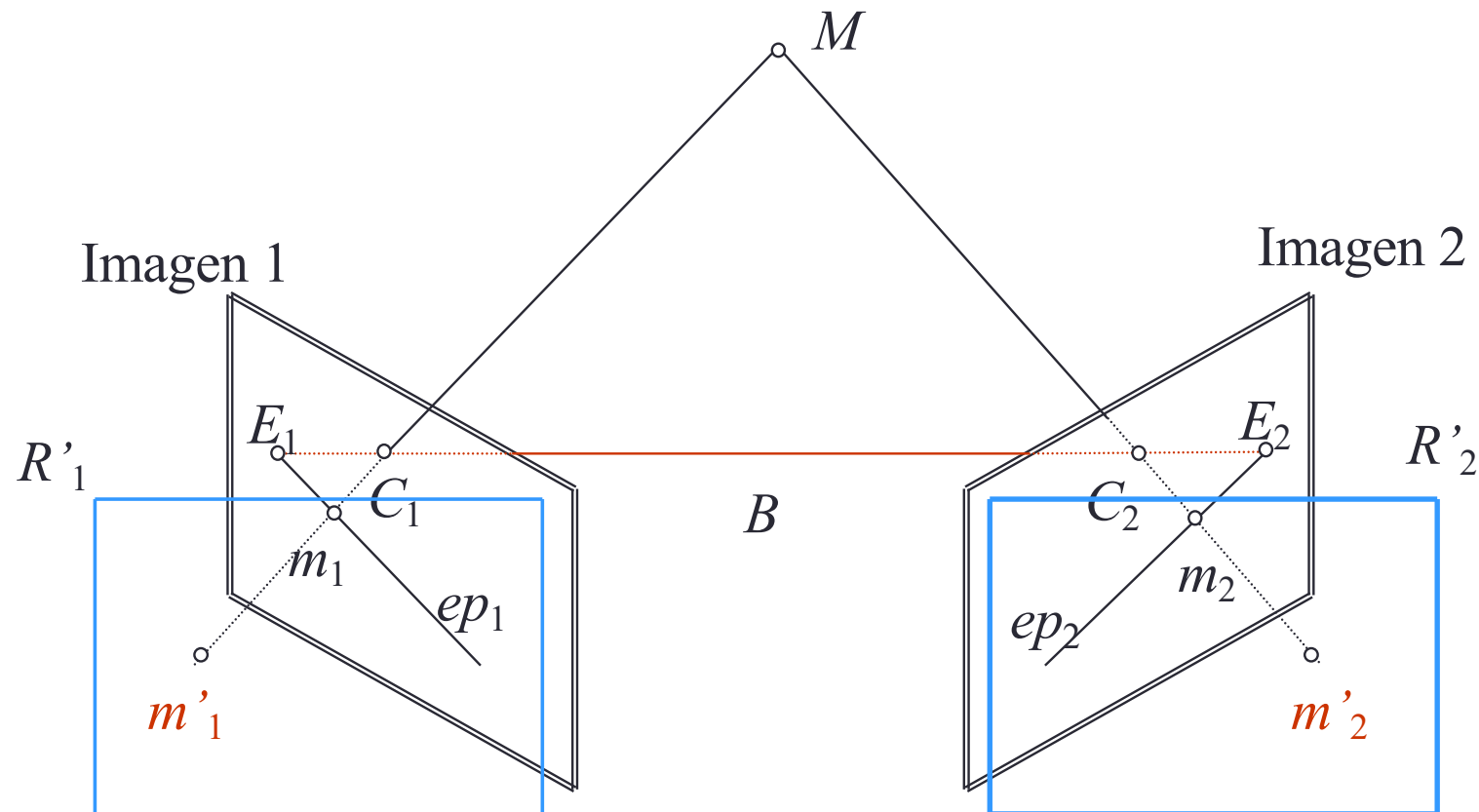
- Ventajas:
 - Facilidad de construcción
 - Correspondencia sencilla si la disparidad es baja
- Inconvenientes:
 - Complejidad de cálculo
 - Si **B** es alto, la correspondencia es difícil, oclusiones
 - Si **B** es bajo, se obtiene mala precisión

Rectificado

- RECTIFICADO:
 - Reproyectar las imágenes de las cámaras en dos nuevos planos proyectivos alineados
- Ventaja:
 - Simplifica la correspondencia
- Inconvenientes:
 - Coste computacional
 - Posible pérdida de precisión

Rectificado

- Rectifica las imágenes, mediante una Homografía, a la disposición deseada (ejes alineados o convergentes).



Rectificado

- Estrategias:
 - Se conoce exactamente todos los datos de calibración:
 - Se fija una dirección de ejes alineados, calculándose los ángulos
 - Para cada punto de la imagen original se obtiene el punto rectificado
 - No se conocen exactamente los datos de calibración:
 - Se obtiene puntos correspondientes en ambas imágenes
 - A partir de ellos se calcula la homografía para una proyección deseada ($y=y'$)
 - Para cada punto de la imagen original se obtiene el punto rectificado

Rectificado

- Ejemplo:

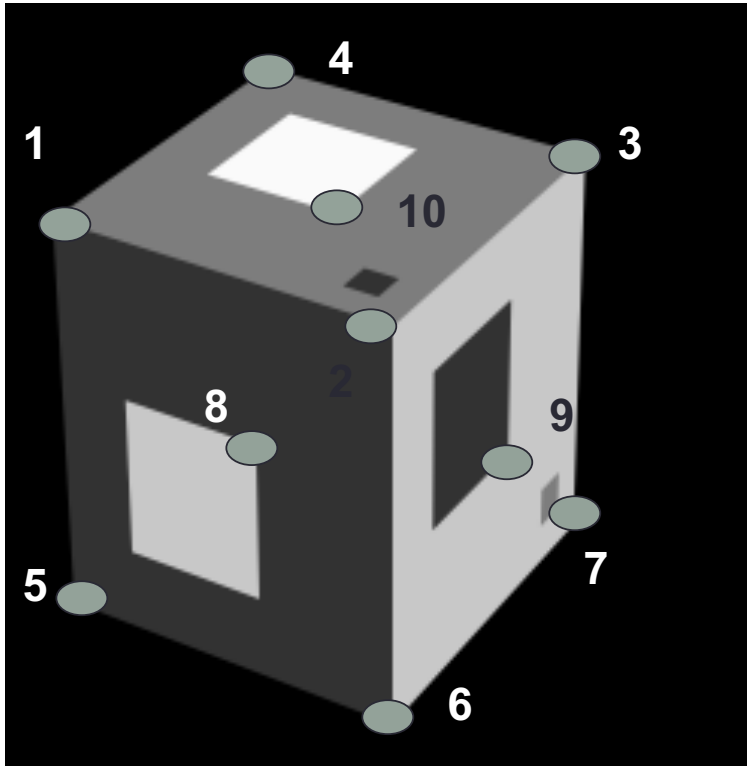


Imagen izquierda

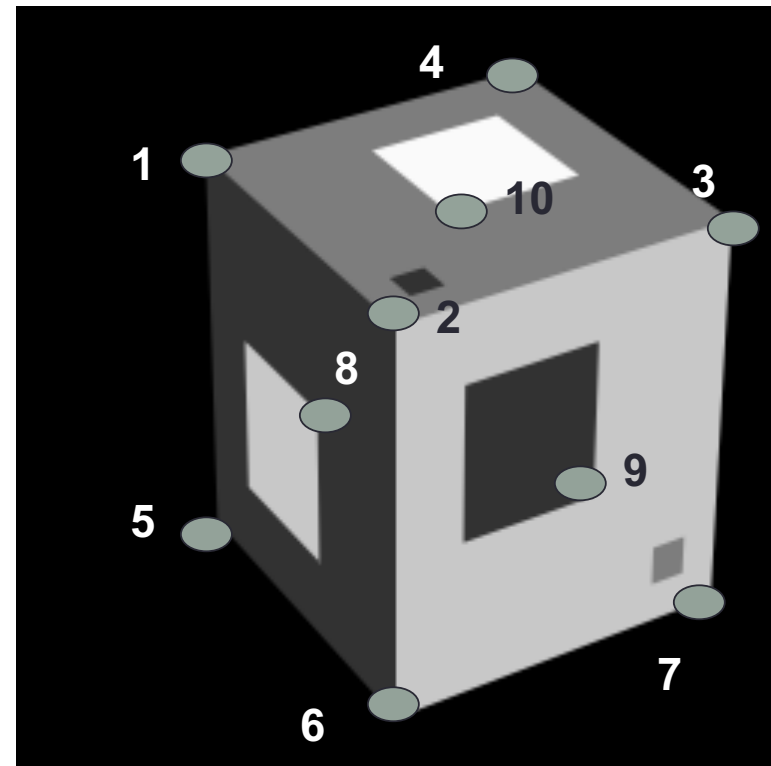


Imagen derecha

Rectificado

- Ejemplo:

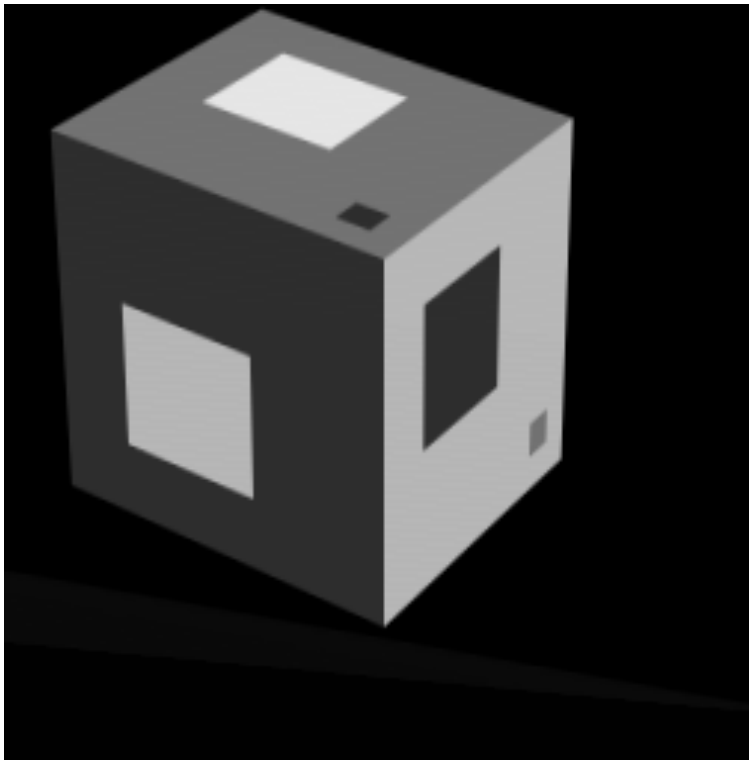


Imagen izquierda rectificada

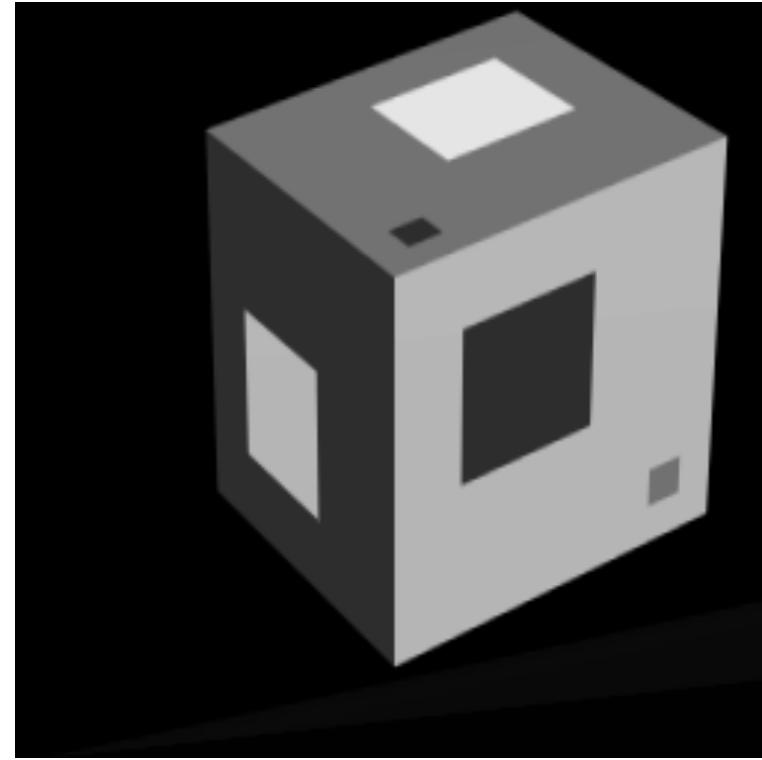


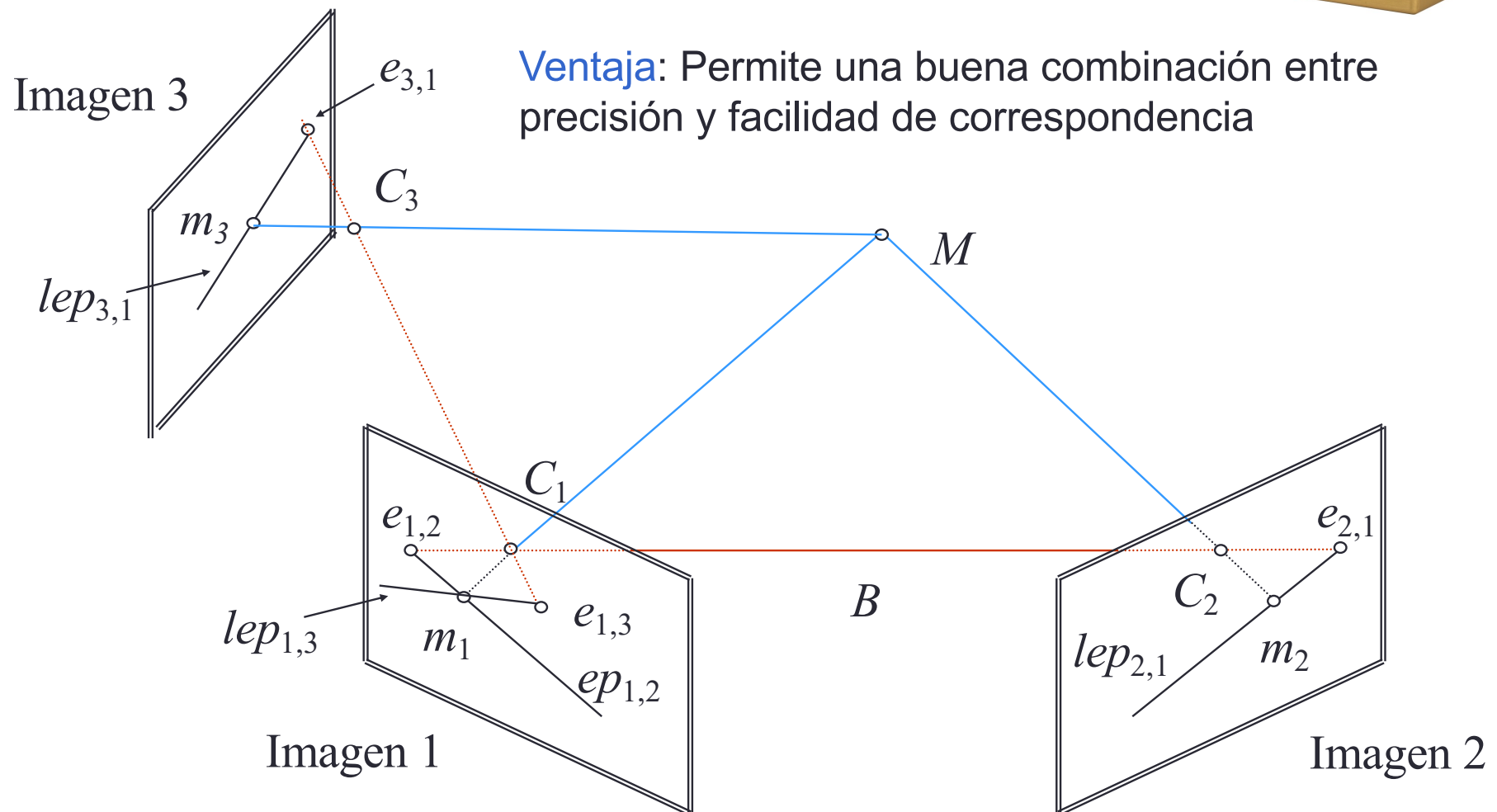
Imagen derecha rectificada

Rectificado



Visión Trinocular: geometría epipolar

- Tensor Trifocal



Resumen

- Modelo Proyectivo de un par estéreo de cámaras
- Homografías entre diferentes planos proyectivos
- Siguiendo pasos:
 - Calibración Proyectiva $\rightarrow$ Matriz Fundamental/Esencial
 - Correspondencia
 - Reconstrucción 3D