

VISIÓN 3D

Modelo de Cámara: Calibración



Ingeniería de Sistemas y Automática

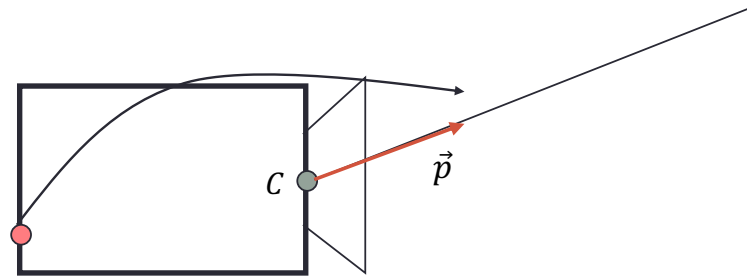
Universidad Miguel Hernández

Tabla de Contenidos

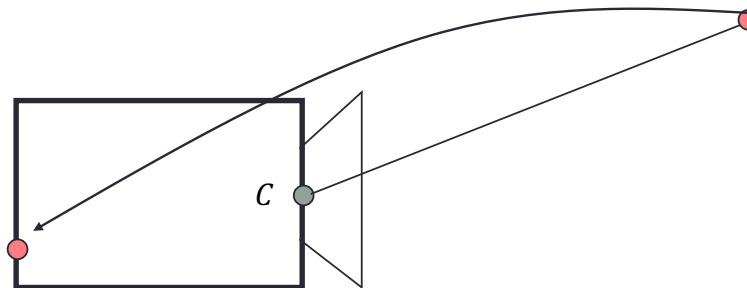
- **Calibración**
 - Algoritmo de Zhang (OpenCV/CalibToolbox)

Modelo General de Cámara

- Podemos modelar la cámara a partir del rayo proyección
 - Permite incluir la distorsión o modelos de proyección más complejos



Calibración



Proyección

Proceso de Calibración

- **CALIBRACIÓN:** Determinación de los parámetros involucrados en el proceso de captación:
 - Parámetros Intrínsecos:
 - Factores de escala: K_x, K_y
 - Distancia focal: f
 - Punto principal: C_x, C_y
 - Distorsión: D_x, D_y
 - Parámetros Extrínsecos:
 - Vector de traslación: t
 - Matriz de rotación: R

Proceso de Calibración

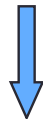
- **Etapas del proceso de calibración**
 - Ecuaciones del sistema:
 - Modelo matemático
 - Obtención de datos de campo:
 - Proyección sobre la imagen de puntos 3D conocidos
 - Determinación de los parámetros:
 - Resolución de las ecuaciones con los datos de campo

Ecuaciones Proyectivas

- Relación matricial entre las coordenadas del mundo y las coordenadas laterales de la cámara (sin distorsión). **Matriz de Proyección.**

$$\tilde{m}_f \cong \tilde{A}_1 \tilde{A}_0 \begin{bmatrix} R_c^w & t_c^w \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{M}$$

$$\begin{bmatrix} n & x_f \\ n & y_f \\ n & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x f & 0 & C_x \\ 0 & K_y f & C_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$A = \begin{bmatrix} f_x & 0 & C_x \\ 0 & f_y & C_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n & x_f \\ n & y_f \\ n & \end{bmatrix} = \tilde{P} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{m} \cong [A \quad 0] \begin{bmatrix} R_c^w & t_c^w \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{M}$$

$$\tilde{m} \cong A [R_c^w \quad t_c^w] \tilde{M}$$

$$\tilde{m} \cong \tilde{P} \tilde{M} = [P \quad p] \tilde{M}$$

Ecuaciones Proyectivas

- Componentes de la **Matriz de Proyección** (sin distorsión)

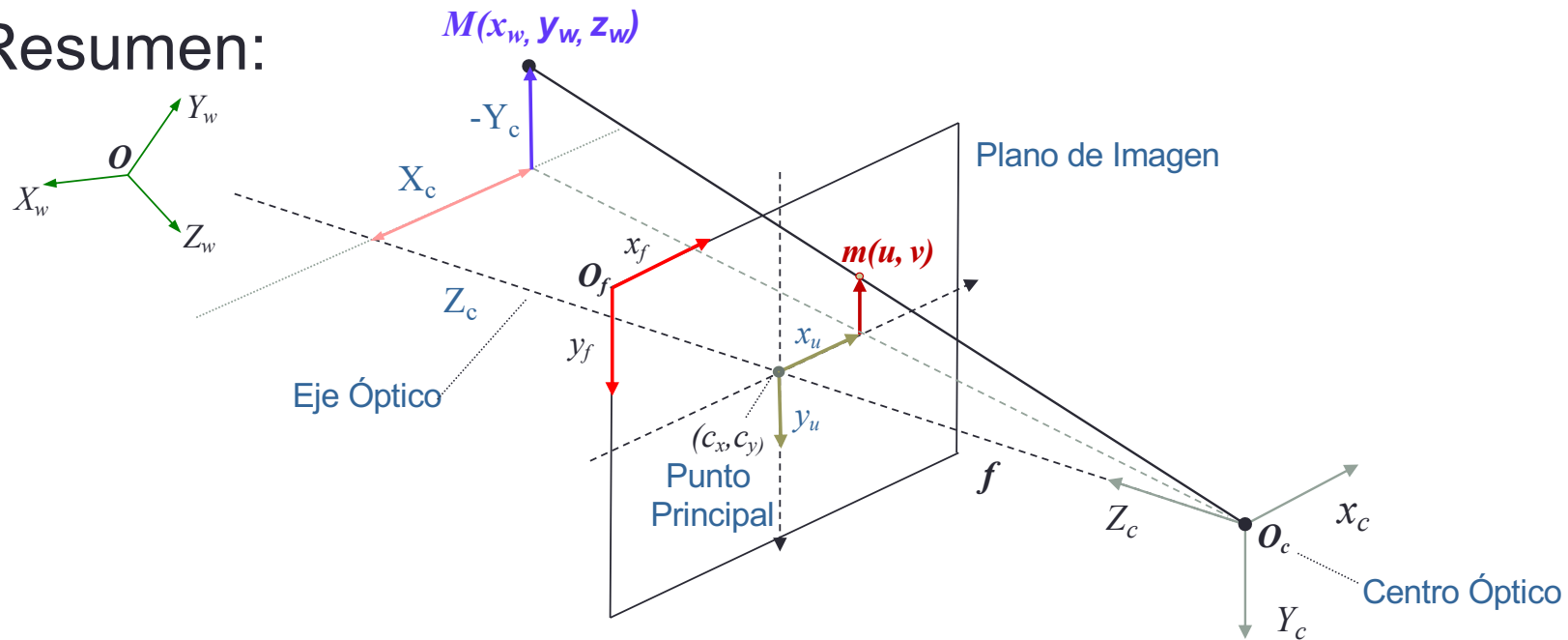
$$\begin{bmatrix} n \ x_f \\ n \ y_f \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x f r_{11} + C_x r_{31} & K_x f r_{12} + C_x r_{32} & K_x f r_{13} + C_x r_{33} & K_x f t_x + C_x t_z \\ K_y f r_{21} + C_y r_{31} & K_y f r_{22} + C_y r_{32} & K_y f r_{23} + C_y r_{33} & K_y f t_y + C_y t_z \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Si } \begin{cases} \bar{r}_1 = [r_{11} & r_{12} & r_{13}] \\ \bar{r}_2 = [r_{21} & r_{22} & r_{23}] \\ \bar{r}_3 = [r_{31} & r_{32} & r_{33}] \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} n \ x_f \\ n \ y_f \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x f \bar{r}_1 + C_x \bar{r}_3 & K_x f t_x + C_x t_z \\ K_y f \bar{r}_2 + C_y \bar{r}_3 & K_y f t_y + C_y t_z \\ \bar{r}_3 & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{m} \cong \tilde{P} \tilde{M} = [P \quad p] \tilde{M}$$

Ecuaciones Proyectivas

- Resumen:



$$\tilde{m} \cong \tilde{P} \tilde{M} = [P \quad p] \tilde{M}$$

$$\tilde{m} \cong A [R \quad t] \tilde{M}$$

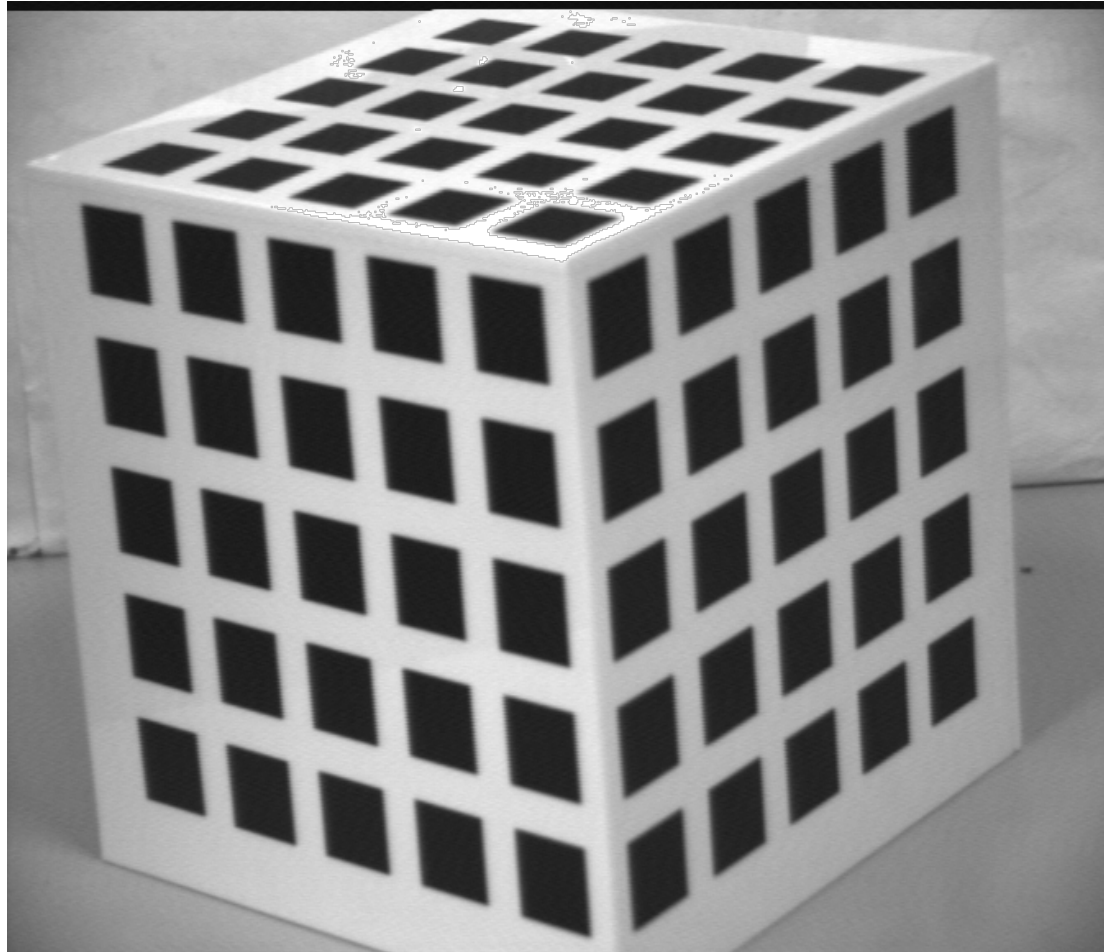
$$\tilde{m} \cong AR [I \quad R^T t] \tilde{M} = AR [I \quad -C] \tilde{M}$$

Posición del Centro Óptico:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{C} \cong \begin{bmatrix} -R^T t \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} f_x & 0 & C_x \\ 0 & f_y & C_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Proceso de Calibración



Patrón de calibración

Proceso de Calibración

- Precisión del Proceso de Calibración

- Se obtienen parámetros de proyección

$$(x_f, y_f) \approx F(\text{parámetros}, X_w, Y_w, Z_w)$$

- Normalmente se desconocen los parámetros verdaderos, por lo que no se pueden comparar con los obtenidos

- Error de Reproyección:

- Obtenidos los parámetros, se proyectan los puntos (i) y se comparan con los obtenidos en la imagen: $(x_f^{(i)}, y_f^{(i)})$ frente a $(\hat{x}_f^{(i)}, \hat{y}_f^{(i)})$

$$e = \sum_i \left(\hat{x}_f^{(i)} - x_f^{(i)} \right)^2 + \left(\hat{y}_f^{(i)} - y_f^{(i)} \right)^2$$

Técnicas de Calibración

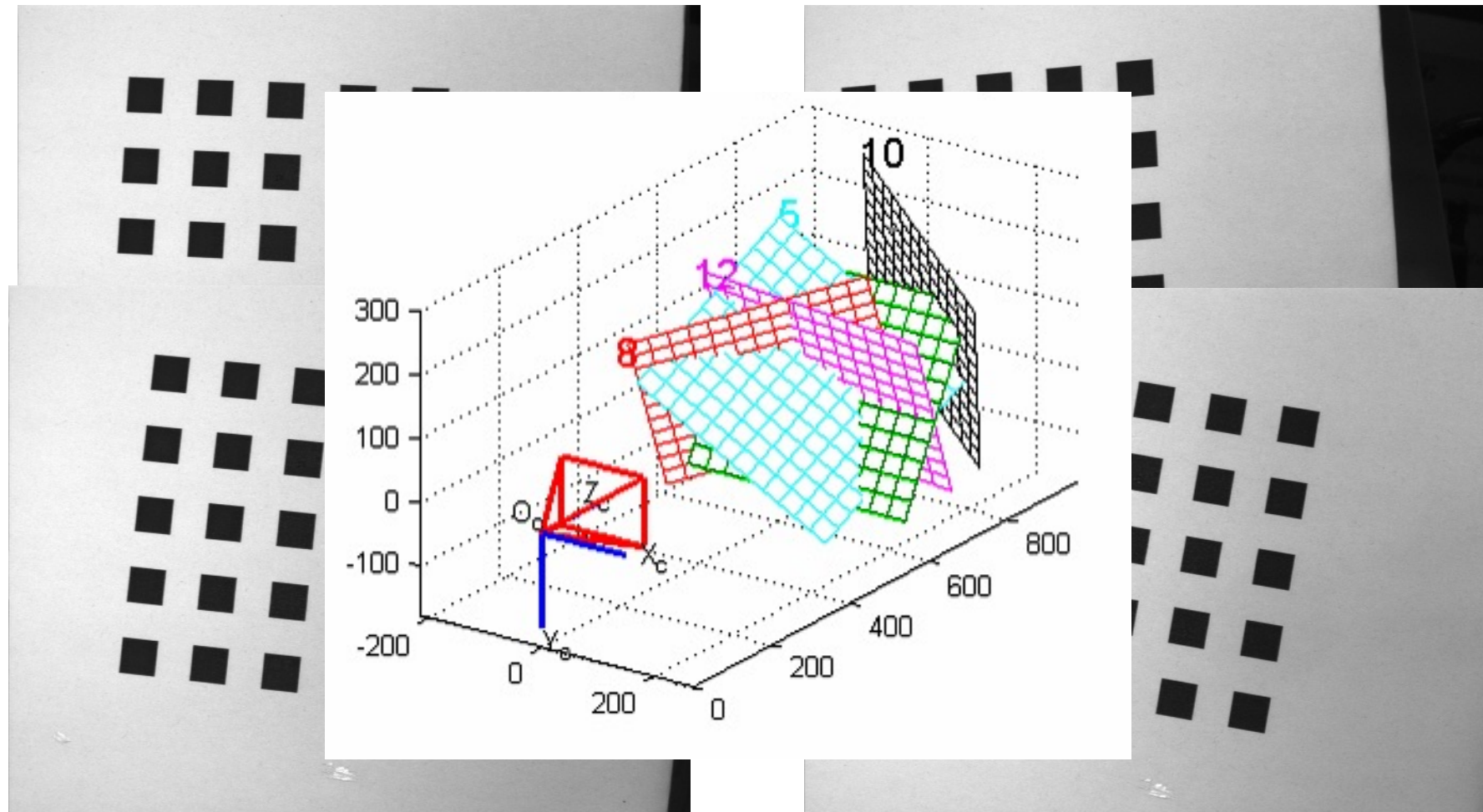
- Métodos de Calibración:
 - Técnicas aplicadas a la Fotogrametría
 - Son necesarios métodos de calibración muy exactos
 - Se emplean ópticas profesionales sin problemas de distorsiones
 - Conocimiento a priori de los parámetros intrínsecos
 - Técnicas aplicadas a la Robótica y Automatización
 - Son necesarios métodos rápidos y autónomos
 - Imágenes con menor resolución
 - Se ven afectadas por muchos factores que de forma sistemática causan errores

Técnicas de Calibración

- Técnicas basadas en Modelos matemáticos
 - Relación matemática entre puntos 3D y la proyección de ese punto en la imagen 2D
 - No se tienen en cuenta los parámetros físicos de la cámara
 - Optimización no lineal
- Técnicas basadas en Modelos con significado físico
 - Transformación Lineal Directa (DLT)
 - Método lineal. La distorsión se calibra a posteriori (no lineal). Requiere puntos en una disposición general
 - Restricción de Alineamiento Radial (RAC) (Tsai)
 - Solo tiene en cuenta distorsión radial
 - **Método de Zhang** (OpenCV, CalibToolbox)
 - Utiliza múltiples vistas de un mismo objeto de calibración plano
 - Más sencillo de construir el elemento de calibración y más fácil de cubrir todo el espacio de trabajo

Técnicas de Calibración: Método de Zhang

- Zhang (1999) propone calibrar con varias vistas de un mismo objeto plano



*"Flexible Camera Calibration By Viewing a Plane From Unknown Orientations" Zhengyou Zhang
International Conference on Computer Vision (ICCV'99) (1999)*

Técnicas de Calibración: Método de Zhang

- Zhang (1999) propone calibrar con varias vistas de un mismo objeto plano
- Ventajas
 - Fuerza el desacople de los parámetros intrínsecos (constantes) de los extrínsecos
 - Simplifica el elemento de calibración
 - Incorpora más puntos de control distribuidos en más planos
- Inconveniente
 - Aumenta el tiempo de procesamiento (no muy importante al realizarse fuera de línea)

Técnicas de Calibración: Método de Zhang

- Incógnitas
 - Cuatro parámetros intrínsecos
 - Cuatro parámetros de distorsión
 - Seis parámetros por cada vista (tres de rotación y tres de translación)
- Ecuaciones
 - Dos por cada punto visto en cada imagen
- Ejemplo: 10 imágenes con 100 puntos cada una
 - Incógnitas: $4 + 4 + 6 \cdot 10 = 68$ incógnitas
 - Ecuaciones: $2 \cdot 10 \cdot 100 = 2000$ ecuaciones

Técnicas de Calibración: Método de Zhang

- Etapas
 - Cálculo de la homografía entre imagen y objeto
 - Cálculo de parámetros intrínsecos con múltiples vistas
 - Cálculo de los parámetros extrínsecos para cada vista
 - Optimización global considerando distorsión

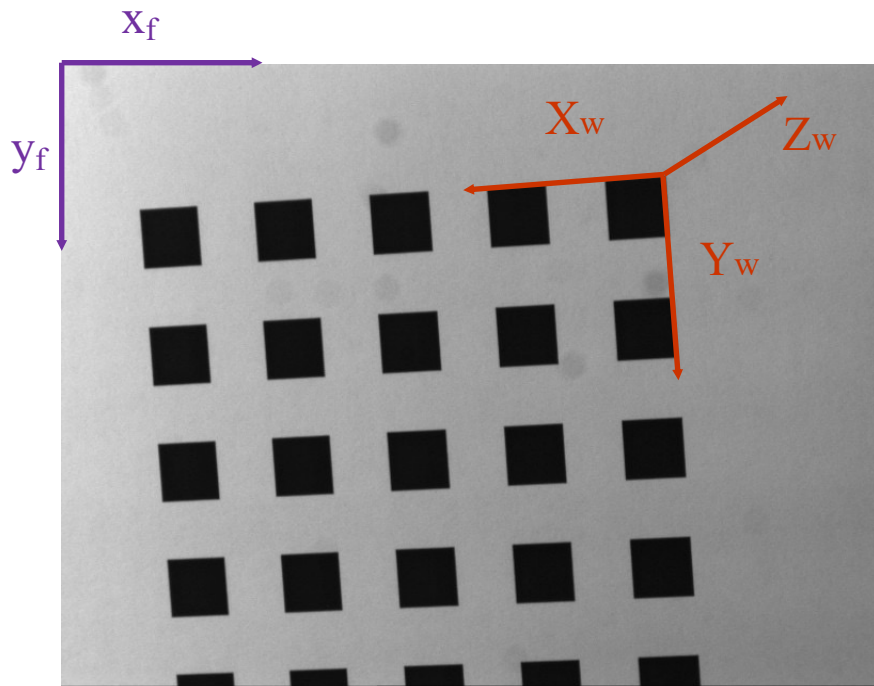
Técnicas de Calibración: Método de Zhang

- Cálculo de la homografía entre imagen y objeto

- Coordenadas de la imagen $[x_f \ y_f \ 1]^T$
- Coordenadas de un punto referido al sistema de coordenadas del mundo

$$[X_w \ Y_w \ Z_w \ 1]^T$$

- Si el sistema de coordenadas del mundo se elige solidario con el plano de calibración tal que la tercera componente es cero $[X_w \ Y_w \ 0 \ 1]^T$



Modelo sin distorsión

$$\begin{bmatrix} n & x_f \\ n & y_f \\ n & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x f & 0 & C_x \\ 0 & K_y f & C_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n & x_f \\ n & y_f \\ n & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x f & 0 & C_x \\ 0 & K_y f & C_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n \cdot x_f \\ n \cdot y_f \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \lambda A [\bar{\mathbf{r}}_1 \ \bar{\mathbf{r}}_2 \ \bar{\mathbf{t}}]$$

Técnicas de Calibración: Método de Zhang

• Cálculo de la homografía:

- La homografía se puede obtener con el conocimiento de al menos cuatro correspondencias.
- Cuanto más correspondencias, más exacta es el cálculo de la homografía
- Se pueden emplear métodos robustos (RANSAC) para eliminar falsas correspondencias

$$\begin{bmatrix} n \cdot x_f \\ n \cdot y_f \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} (h_{31}X_w + h_{32}Y_w + h_{33}) \cdot x_f &= h_{11}X_w + h_{12}Y_w + h_{13} \\ (h_{31}X_w + h_{32}Y_w + h_{33}) \cdot y_f &= h_{21}X_w + h_{22}Y_w + h_{23} \end{aligned}$$

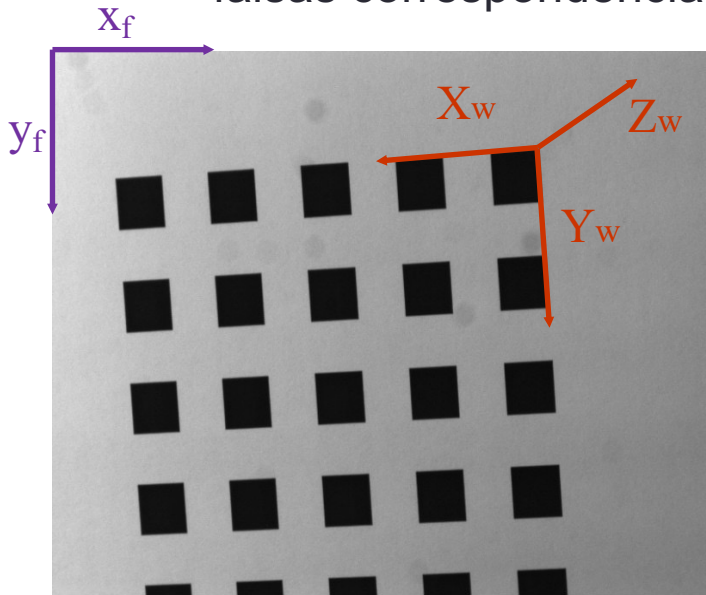
Solución Ecuación homogénea:

$$\mathbf{A}_{xy} = \begin{bmatrix} -X_w^{(1)} & -Y_w^{(1)} & -1 & 0 & 0 & 0 & X_w^{(1)}x_f^{(1)} & Y_w^{(1)}x_f^{(1)} & x_f^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & -X_w^{(1)} & -Y_w^{(1)} & -1 & X_w^{(1)}y_f^{(1)} & Y_w^{(1)}y_f^{(1)} & y_f^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h} = [h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{21}, h_{22}, h_{23}, h_{31}, h_{32}, h_{33}]^T$$

$$\mathbf{A}_{xy} \cdot \mathbf{h} = 0 \quad \min_{\mathbf{h}} [(\mathbf{A}_{xy}\mathbf{h})^2]$$

$$SVD(\mathbf{A}_{xy}) \rightarrow \mathbf{A}_{xy} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T \Rightarrow \mathbf{h} = \mathbf{v}_9$$



Técnicas de Calibración: Método de Zhang

- Cálculo de la homografía:

- Solución no Homogénea (Euclídea): asumimos ($h_{33} \neq 0$) $H = \lambda A[\bar{\mathbf{r}}_1 \quad \bar{\mathbf{r}}_2 \quad \bar{\mathbf{t}}]$

$$\begin{bmatrix} n \cdot x_f \\ n \cdot y_f \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}/h_{33} & h_{12}/h_{33} & h_{13}/h_{33} \\ h_{21}/h_{33} & h_{22}/h_{33} & h_{23}/h_{33} \\ h_{31}/h_{33} & h_{32}/h_{33} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad h_{33} \cong t_z \quad \text{Distancia entre los planos}$$

$$\begin{bmatrix} n \cdot x_f \\ n \cdot y_f \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h'_{11} & h'_{12} & h'_{13} \\ h'_{21} & h'_{22} & h'_{23} \\ h'_{31} & h'_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ 1 \end{bmatrix} \implies \begin{aligned} (h'_{31}X_w + h'_{32}Y_w + 1) \cdot x_f &= h'_{11}X_w + h'_{12}Y_w + h'_{13} \\ (h'_{31}X_w + h'_{32}Y_w + 1) \cdot y_f &= h'_{21}X_w + h'_{22}Y_w + h'_{23} \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}_{xy} = \begin{bmatrix} -X_w^{(1)} & -Y_w^{(1)} & -1 & 0 & 0 & 0 & X_w^{(1)}x_f^{(1)} & Y_w^{(1)}x_f^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & -X_w^{(1)} & -Y_w^{(1)} & -1 & X_w^{(1)}y_f^{(1)} & Y_w^{(1)}y_f^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -x_f^{(1)} \\ -y_f^{(1)} \\ \vdots \end{bmatrix}^T \quad \mathbf{A}_{xy} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{h} = [h'_{11}, h'_{12}, h'_{13}, h'_{21}, h'_{22}, h'_{23}, h'_{31}, h'_{32}]^T \quad \min_{\mathbf{h}} [(\mathbf{A}_{xy}\mathbf{h} - \mathbf{b})^2]$$

- Mínimos cuadrados:

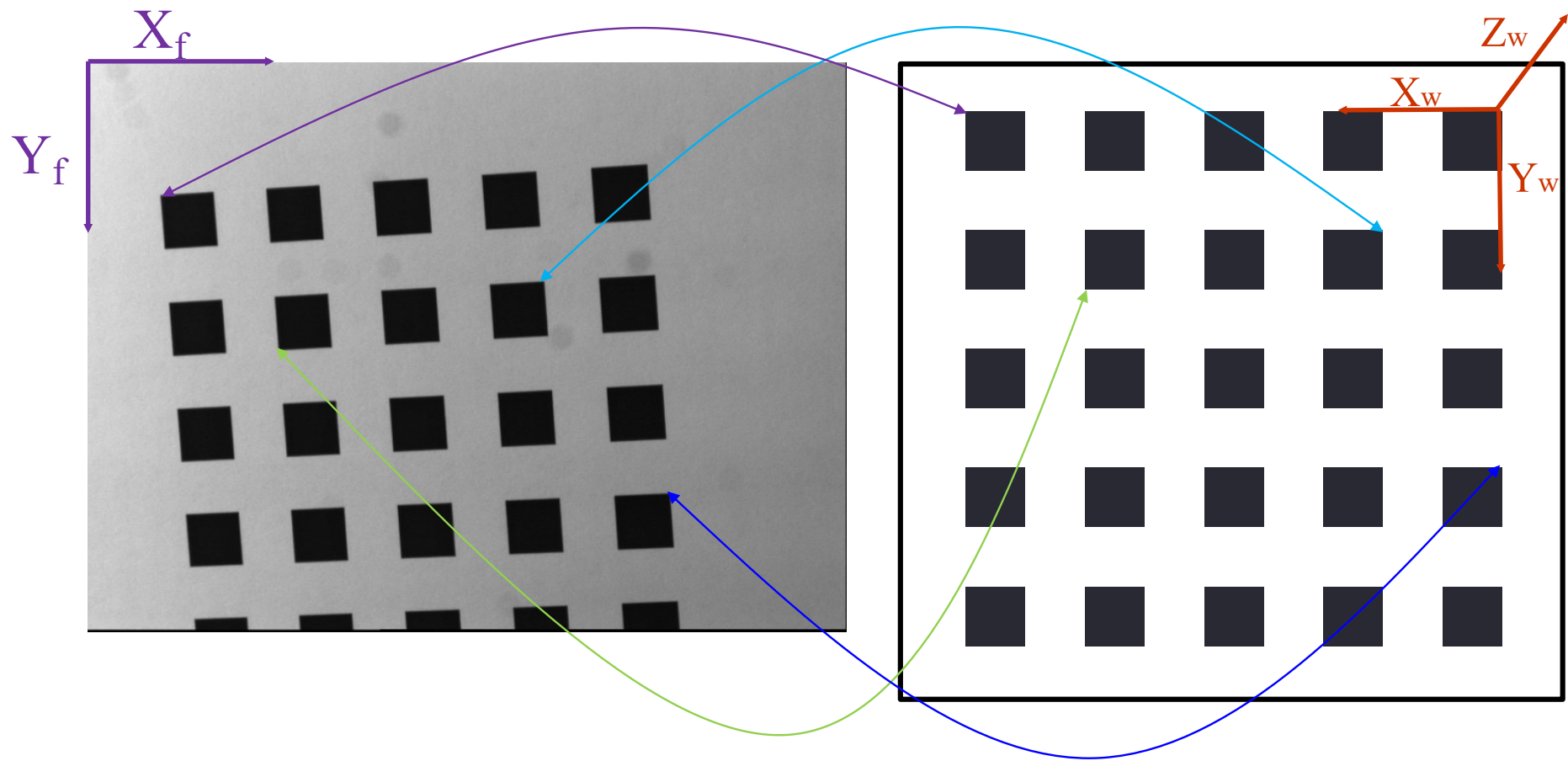
$$\mathbf{h} = (\mathbf{A}_{xy}^T \mathbf{A}_{xy})^{-1} \cdot \mathbf{A}_{xy}^T \cdot \mathbf{b}$$

- Normalización: estimación más robusta frente al ruido

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{m}}_w &= T \cdot \tilde{\mathbf{m}}_w \\ \tilde{\mathbf{m}} &= T' \cdot \tilde{\mathbf{m}} \end{aligned} \right\} \longrightarrow \hat{\mathbf{m}} \cong \hat{\mathbf{H}} \cdot \hat{\mathbf{m}}_w \longrightarrow \boxed{H \cong T'^{-1} \cdot \hat{\mathbf{H}} \cdot T} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} n_f/2 & 0 & n_f/2 \\ 0 & n_c/2 & n_c/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Técnicas de Calibración: Método de Zhang

- Cálculo de la homografía:



Técnicas de Calibración: Método de Zhang

- Cálculo de los parámetros intrínsecos con varias vistas

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} K_x f & 0 & C_x \\ 0 & K_y f & C_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & t_z \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$[\mathbf{h}_1 \quad \mathbf{h}_2 \quad \mathbf{h}_3] = \lambda A [\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{t}] \Rightarrow [\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{t}] = \lambda^{-1} A^{-1} [\mathbf{h}_1 \quad \mathbf{h}_2 \quad \mathbf{h}_3]$$

$$\text{Se cumple: } \begin{cases} \mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_2 = 0 & \Rightarrow \mathbf{h}_1^T A^{-T} A^{-1} \mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_1^T K^{-1} \mathbf{h}_2 = 0 \\ \mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2^T \mathbf{r}_2 & \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{h}_1^T A^{-T} A^{-1} \mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2^T A^{-T} A^{-1} \mathbf{h}_2 \\ \mathbf{h}_1^T K^{-1} \mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2^T K^{-1} \mathbf{h}_2 \end{cases} \end{cases}$$

Con $K = A \cdot A^T$

Conocida $H \rightarrow$ Dos restricciones lineales de K por cada vista

$$\begin{cases} \mathbf{h}_1^T K^{-1} \mathbf{h}_2 = 0 \\ \mathbf{h}_1^T K^{-1} \mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2^T K^{-1} \mathbf{h}_2 \end{cases}$$

Técnicas de Calibración: Método de Zhang

- Cálculo de los parámetros intrínsecos con varias vistas
 - Matriz de Kruppa (simétrica): K (6 elementos independientes)
 - Imagen Cónica Absoluta: K^{-1}
 - Con tres vistas se pueden determinar la matriz K^{-1}

$$K = AA^T = \begin{bmatrix} K_x f & 0 & C_x \\ 0 & K_y f & C_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_x f & 0 & 0 \\ 0 & K_y f & 0 \\ C_x & C_y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x^2 f^2 + C_x^2 & C_x C_y & C_x \\ C_x C_y & K_y^2 f^2 + C_y^2 & C_y \\ C_x & C_y & 1 \end{bmatrix}$$

- K, K^{-1} son simétricas. Admiten la descomposición de Cholesky, para obtener los parámetros intrínsecos

$$\text{Cholesky}(K) = A \cdot A^T$$

$$\begin{aligned} f_x &= K_x f \\ f_y &= K_y f \\ C_x, C_y \end{aligned}$$

Técnicas de Calibración: Método de Zhang

- Etapas
 - Cálculo de la homografía entre imagen y objeto
 - Cálculo de parámetros intrínsecos con múltiples vistas
 - Cálculo de los parámetros extrínsecos para cada vista
 - Optimización global considerando distorsión
- Cálculo de los parámetros extrínsecos para cada vista
 - Conocido A , H se calcula:

$$[\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{t}] = \lambda^{-1} A^{-1} [\mathbf{h}_1 \quad \mathbf{h}_2 \quad \mathbf{h}_3]$$

- Se obtiene el factor de escala y el vector de traslación
- Con sólo dos columnas se obtiene la matriz de rotación (existe información redundante)

$$\|\mathbf{r}_1\| = 1 \Rightarrow \lambda^{-1} = 1/\|A^{-1}\mathbf{h}_1\|$$

$$\mathbf{t}_1 = \lambda^{-1} A^{-1} \mathbf{h}_3$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= \lambda^{-1} A^{-1} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{r}_2 &= \lambda^{-1} A^{-1} \mathbf{h}_2 \\ \mathbf{r}_3 &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2\end{aligned}$$

Técnicas de Calibración: Método de Zhang

• Etapas

- Cálculo de la homografía entre imagen y objeto
- Cálculo de parámetros intrínsecos con múltiples vistas
- Cálculo de los parámetros extrínsecos para cada vista

• Optimización global considerando distorsión

- La solución previa se puede considerar definitiva, y se calculan sólo los parámetros de distorsión
- La solución previa se considera la solución inicial del proceso de optimización (varían todos los parámetros)

$$\begin{aligned} x_f &= C_x + fK_x x_n + fK_x [k_1 r_n^2 x_n + k_2 r_n^4 x_n + k_3 r_n^6 x_n + 2p_1 x_n y_n + p_2 (2x_n^2 + r_n^2)] \\ y_f &= C_y + fK_y y_n + fK_y [k_1 r_n^2 y_n + k_2 r_n^4 y_n + k_3 r_n^6 y_n + 2p_2 x_n y_n + p_1 (2y_n^2 + r_n^2)] \\ r_n^2 &= x_n^2 + y_n^2 \quad ; \quad x_n = x_c / z_c \quad ; \quad y_n = y_c / z_c \end{aligned}$$

$$\min_p \left\{ \sum_i \left(\hat{x}_f^{(i)} - x_f^{(i)} \right)^2 + \left(\hat{y}_f^{(i)} - y_f^{(i)} \right)^2 \right\}$$

Proceso de Calibración: Conclusiones

- *El proceso de calibración puede producir parámetros poco robustos, con alto grado de inestabilidad*
- Causas posibles:
 - Modelo matemático incompleto
 - Errores en la adquisición de los datos
 - Mal comportamiento de los algoritmos de calibración
- Consecuencia:
 - Mala precisión en las aplicaciones de visión tridimensional