

VISIÓN 3D

Modelo de Cámara



Ingeniería de Sistemas y Automática

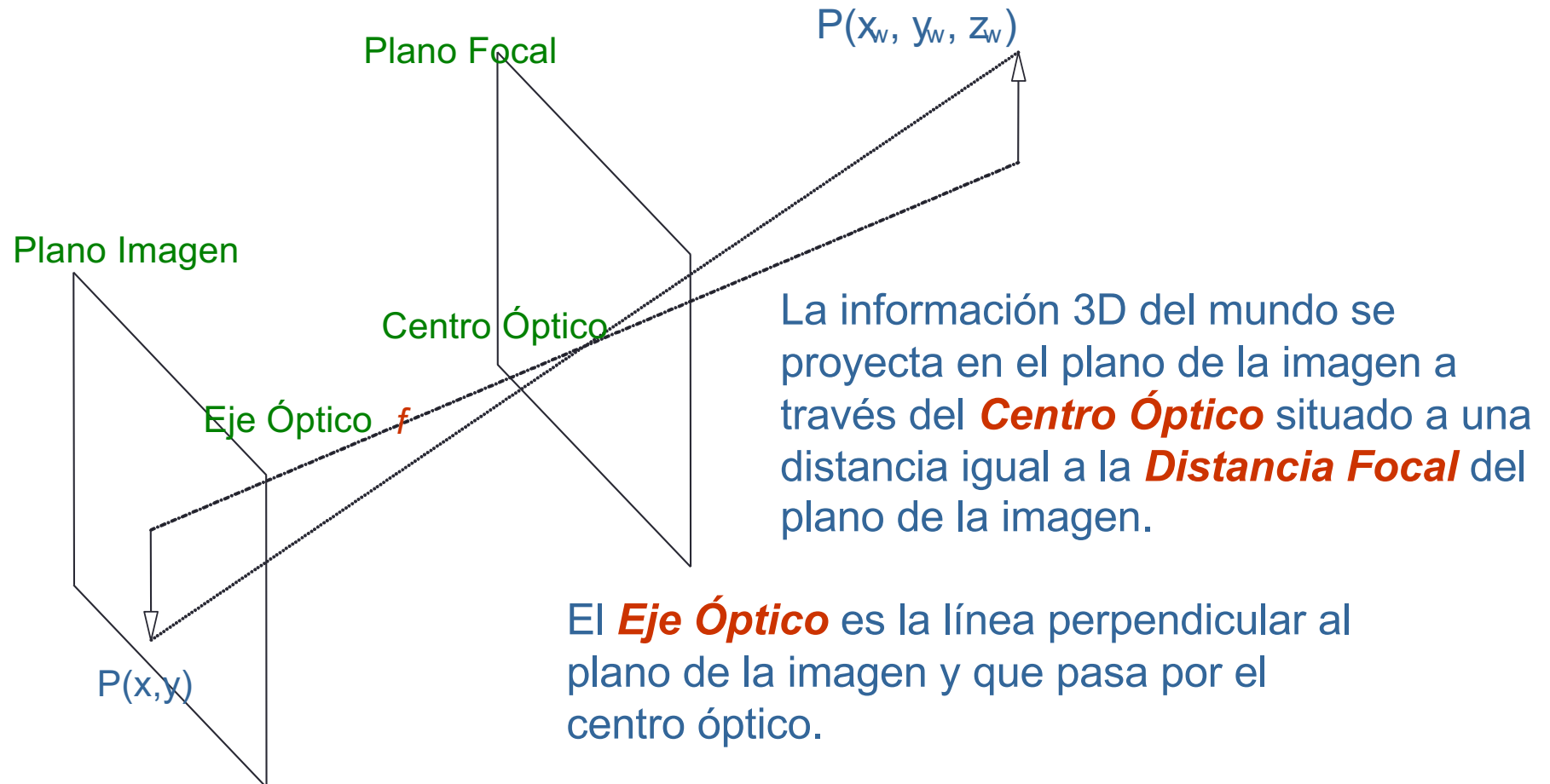
Universidad Miguel Hernández

Tabla de Contenidos

- **Modelo Proyectivo de Cámara**
 - Modelo de lentes: Pinhole, Delgada
 - Parámetros del Modelo de Captación
 - Sistemas de Coordenadas involucradas
 - Ecuaciones Proyectivas

Modelo Proyectivo de Cámara

- Modelo de Lente Pin-Hole



El **Plano Focal** es el plano que pasa por el centro óptico y cuyos puntos no tienen proyección en el plano de la imagen.

Geometría Proyectiva



- No conserva la distancias
- No conserva las rectas paralelas
- No conserva los ángulos

"An Introduction to Projective Geometry (for computer vision)" Stan Bircheld
Stanford University <http://robotics.stanford.edu/~birch/projective/>

"Projective Geometry for Image Analysis" Roger Mohr and Bill Triggs
INRIA (ISPRS, Vienna, July 1996) <https://hal.inria.fr/inria-00548361/PDF/Mohr-isprs96.pdf>

Coordenadas Homogéneas (*Proyectivas*)

- Espacio Euclídeo R^n : $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in R^n$
- Espacio Proyectivo P^n $\tilde{x} = [x_1, \dots, x_n, 1]^T \in P^n$
- En coordenadas homogéneas un punto está definido con un factor de escala:
 $\tilde{x} \cong \tilde{y}$ si existe $\lambda \neq 0$ tal que $x_i = \lambda y_i$

$$\tilde{x} \in P^n \quad \text{si} \quad \tilde{x} = [x_1, \dots, x_{n+1}]^T \quad \text{con algún} \quad x_i \neq 0$$

- Subespacio Afín:

$$\tilde{x} = [x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]^T \Rightarrow x = \left[\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}} \right]^T \quad x_{n+1} \neq 0$$

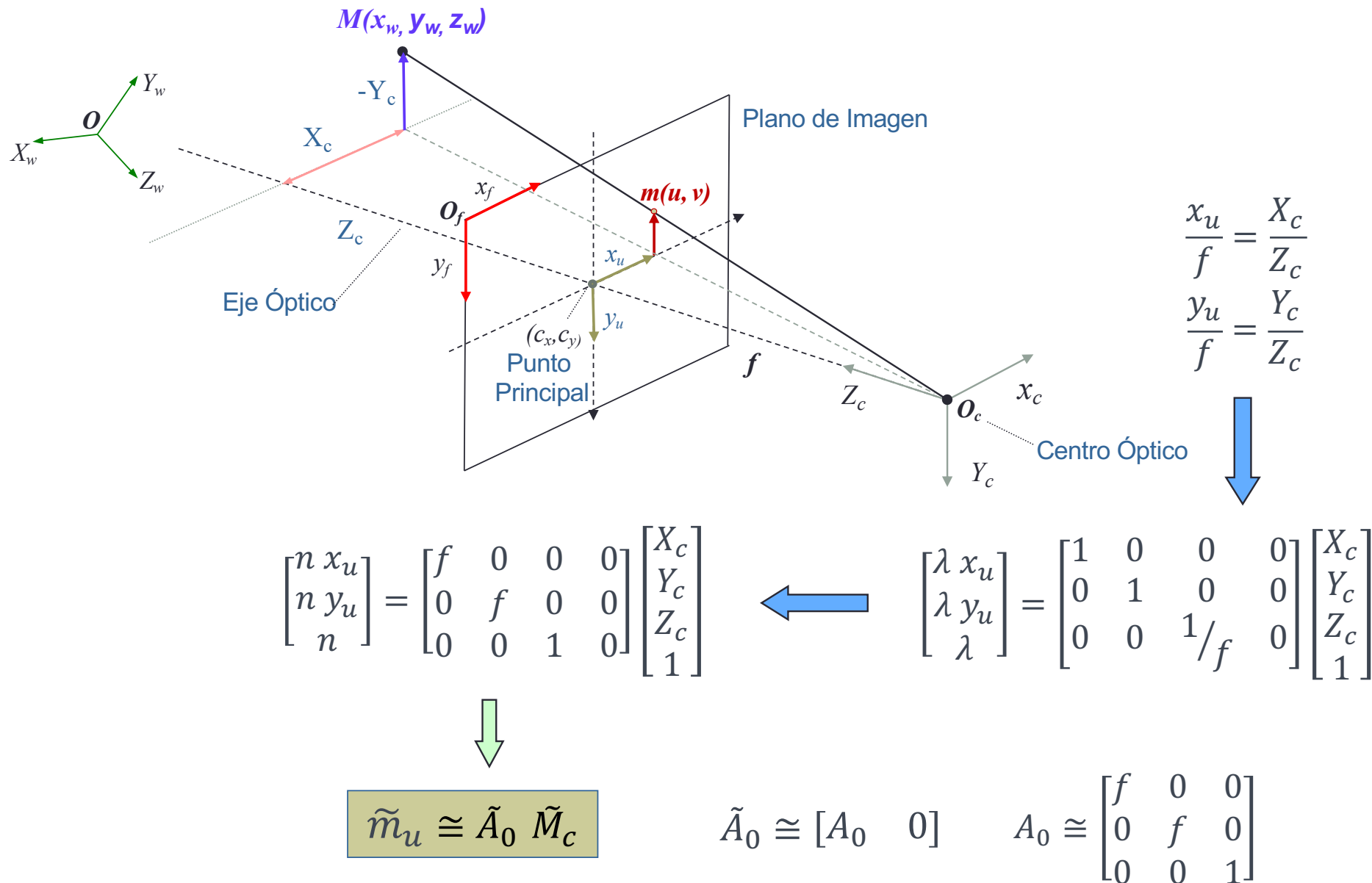
$$\tilde{x} = [x_1, \dots, x_n, 0]^T$$

Punto en el infinito

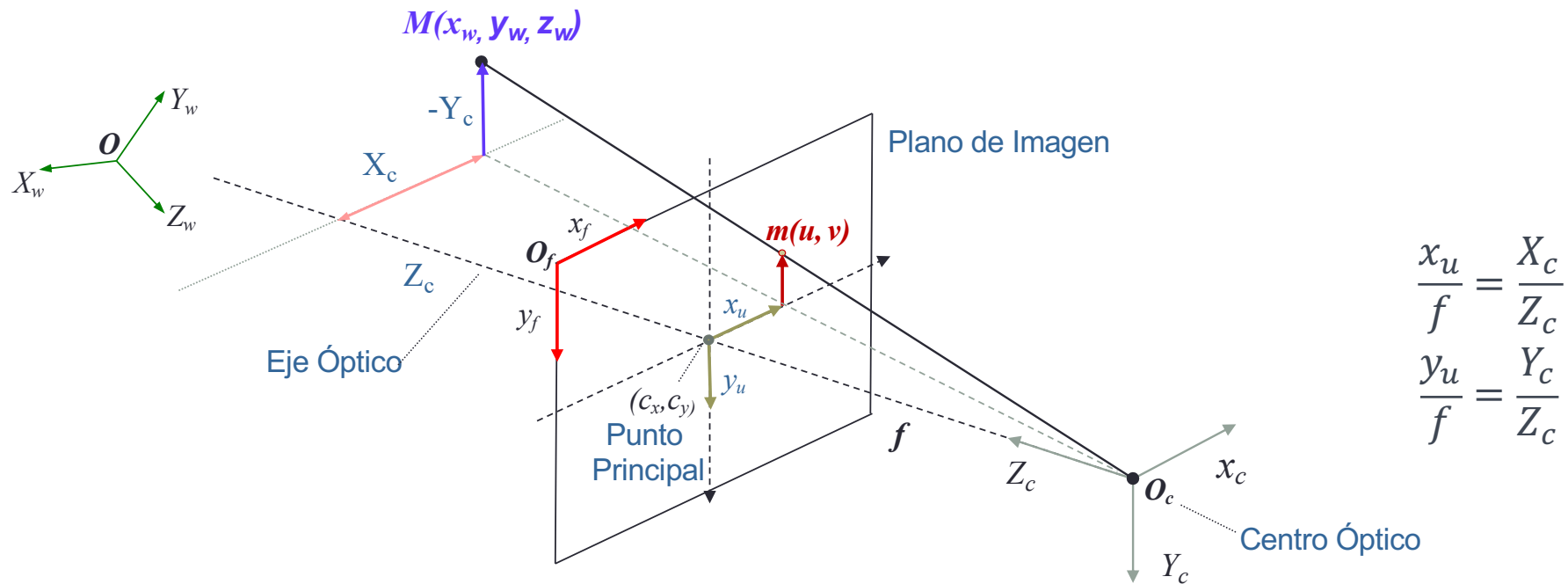
$$\tilde{x} = [0, \dots, 0]^T$$

No existe

Modelo de Lente Pin-Hole



Modelo de Lente Pin-Hole



$$\begin{bmatrix} n & x_u \\ n & y_u \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = A_0 [I \quad 0] \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas 2D normalizadas: $f=1$

$$\begin{bmatrix} \lambda & x_n \\ \lambda & y_n \\ \lambda \end{bmatrix} = [I \quad 0] \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix}$$

$$\tilde{m}_u \cong \tilde{A}_0 \tilde{M}_c$$

$$A_0 \cong \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{m} \cong A_0 \tilde{q}$$

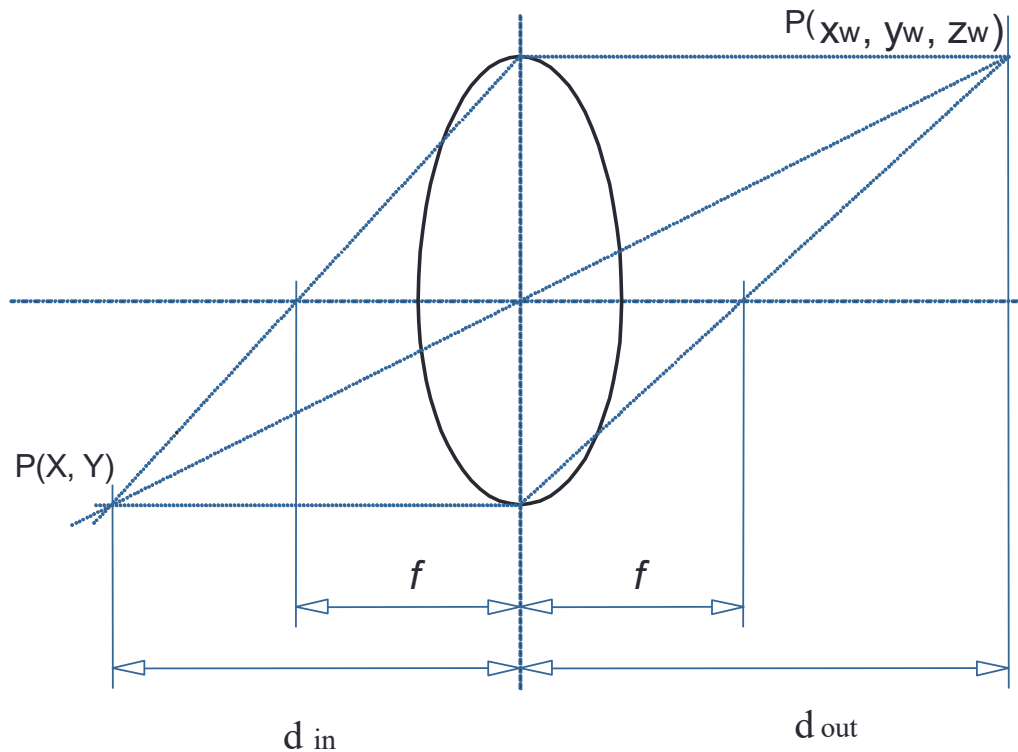
$$\tilde{q} \cong A_0^{-1} \tilde{m}$$

$$x_n = \frac{X_c}{Z_c}$$

$$y_n = \frac{Y_c}{Z_c}$$

Modelo Ideal o de Lente Delgada

- Los Rayos ópticos que pasan por el centro de la lente no sufren ninguna deflexión.
- Los Rayos que entran paralelos al eje óptico de la lente convergen en un punto del eje óptico a una distancia igual a la distancia focal del centro de la lente
- Produce las mismas ecuaciones de proyección del modelo Pinhole



Ley de Gauss

$$\frac{1}{d_{in}} + \frac{1}{d_{out}} = \frac{1}{f}$$

Magnificación

$$m = \frac{d_{int}}{d_{out}}$$

Otros Modelos de Proyección

- Proyección Ortográfica

- Los rayos inciden perpendicularmente al plano de la imagen (como si provienen del infinito). Origina un modelo lineal.
- Válido cuando:
 - El ángulo de vista es pequeño
 - El tamaño del objeto es pequeño frente a la distancia

$$\begin{matrix} x_u = X_c \\ y_u = Y_c \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} n & x_u \\ n & y_u \\ & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix}$$

Otros Modelos de Proyección

- Proyección de Perspectiva Débil
 - También denominada proyección ortográfica escalada.
 - Se supone que el objeto está a una distancia determinada z_0

$$\begin{aligned} \frac{x_u}{f} &= \frac{X_c}{z_0} \\ \frac{y_u}{f} &= \frac{Y_c}{z_0} \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} n & x_u \\ n & y_u \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix}$$

Otros Modelos de Proyección

- Proyección de Ojo de Pez ('Fisheye'): Modelo Scaramuzza

- Lentes de gran angular / omnidireccionales

$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}$ Coordenadas de imagen distorsionadas (pixels)

$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ Coordenadas de imagen corregidas (métricas)

- Ecuaciones modelo:

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ e & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \end{bmatrix}$$

$$f(\rho) = a_0 + a_1\rho + \dots + a_n\rho^n$$

$$\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ f(\rho) \end{bmatrix}$$

Rayo proyección (centro F')
(Coordenadas Cámara)

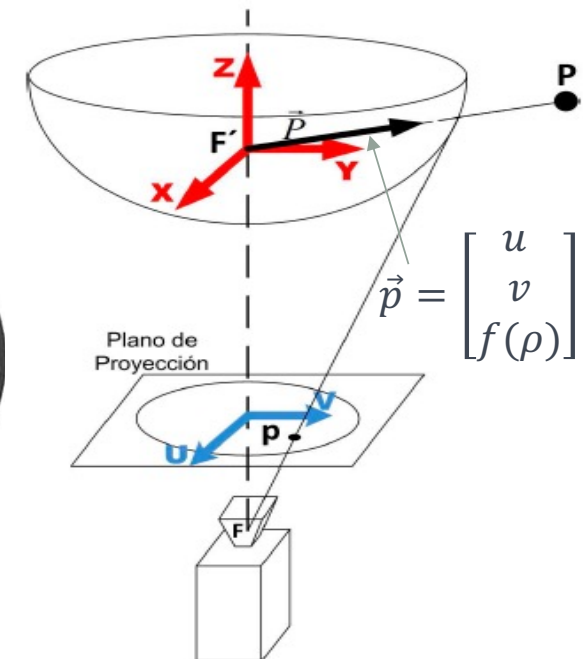


Tabla de Contenidos

- **Modelo Proyectivo de Cámara**
 - Modelo de lentes: Pinhole, Delgada
 - **Parámetros del Modelo de Captación**
 - Sistemas de Coordenadas involucradas
 - Ecuaciones Proyectivas

Parámetros del Modelo de Captación

- ***Parámetros Intrínsecos:*** Son los que describen la geometría y óptica del conjunto cámara y Tarjeta de Adquisición de Imágenes. Afectan al proceso que un rayo luminoso sigue desde que alcanza la lente del objetivo hasta que impresiona un elemento sensible.
- ***Parámetros Extrínsecos:*** Son aquellos que definen la orientación y la posición de la cámara, respecto a un Sistema de Coordenadas conocido, al que se llamará *Sistema de Coordenadas del Mundo* (R, t)

Parámetros Intrínsecos

- **Distancia focal**

- Distancia que separa el *centro óptico* del plano de la imagen y está dada en mm

- **Factores de Escala**

- Relacionan las coordenadas en mm. del plano de la imagen, con las coordenadas en píxeles de la memoria de almacenamiento

- **Punto Principal**

- Es el Punto de intersección entre el eje óptico de la cámara y el plano de la imagen

- **Coeficientes de Distorsión**

- La distorsión geométrica afecta a los puntos en el plano de la imagen (aberraciones ópticas)
 - La cantidad de error de posición depende de la posición del punto en el plano de la imagen

- **Tres tipos de distorsión**

- Distorsión Radial
 - Distorsión Descentral/Tangencial
 - Distorsión Prismática



Parámetros Intrínsecos

• *Distorsión Total*

- Modelo de distorsión en OpenCV (*Open Source Computer Vision*), <http://opencv.org/>

Radial

Tangencial

Prismática

$$\left. \begin{aligned} D_x(x_n, y_n) &= k_1 r^2 x_n + k_2 r^4 x_n + k_3 r^6 x_n + 2p_1 x_n y_n + p_2 (2x_n^2 + r^2) + s_1 r^2 + s_2 r^4 \\ D_y(x_n, y_n) &= k_1 r^2 y_n + k_2 r^4 y_n + k_3 r^6 y_n + 2p_2 x_n y_n + p_1 (2y_n^2 + r^2) + s_1 r^2 + s_2 r^4 \end{aligned} \right\}$$

$$r^2 = x_n^2 + y_n^2$$

Coordenadas 2D normalizadas: $f=1$

$$\begin{aligned} x_d &= x_u + f \cdot D_x(x_n, y_n) \\ y_d &= y_u + f \cdot D_y(x_n, y_n) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} x_n &= X_c / Z_c \\ y_n &= Y_c / Z_c \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{q} \cong A_0^{-1} \tilde{m}_u \cong \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{bmatrix}$$

Parámetros Intrínsecos

- Distorsión Radial

Imagen sin Distorsión



Imagen con Distorsión
Radial $k_1=0.04$

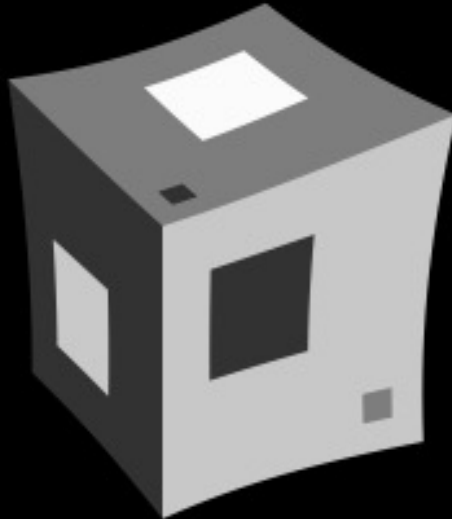


Imagen con Distorsión
Radial $k_1=-0.04$



Otros Modelos de Distorsión

- Distorsión de Ojo de Pez ('Fisheye'): Modelo Kannala - OpenCV
 - Lentes de gran angular
 - Ecuaciones modelo:

$$\left. \begin{aligned} x_n &= X_c/Z_c \\ y_n &= Y_c/Z_c \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} r^2 &= x_n^2 + y_n^2 \\ \theta &= \text{atan}(r) \end{aligned}$$

$$D_\theta(\theta) = \theta(1 + k_1\theta^2 + k_2\theta^4 + k_3\theta^6 + k_4\theta^8)$$

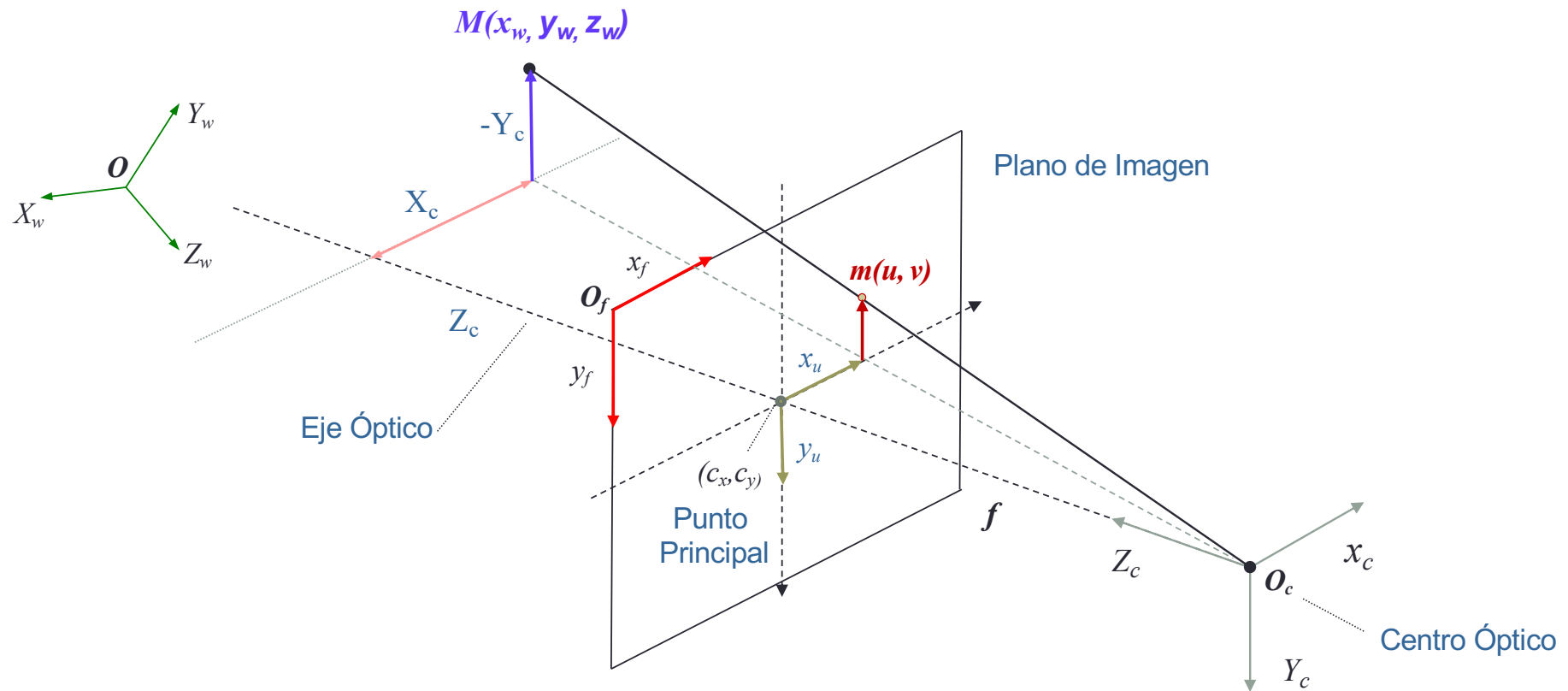
$$\begin{aligned} x_d &= \frac{D_\theta(\theta)}{r} \cdot x_n \\ y_d &= \frac{D_\theta(\theta)}{r} \cdot y_n \end{aligned}$$



Tabla de Contenidos

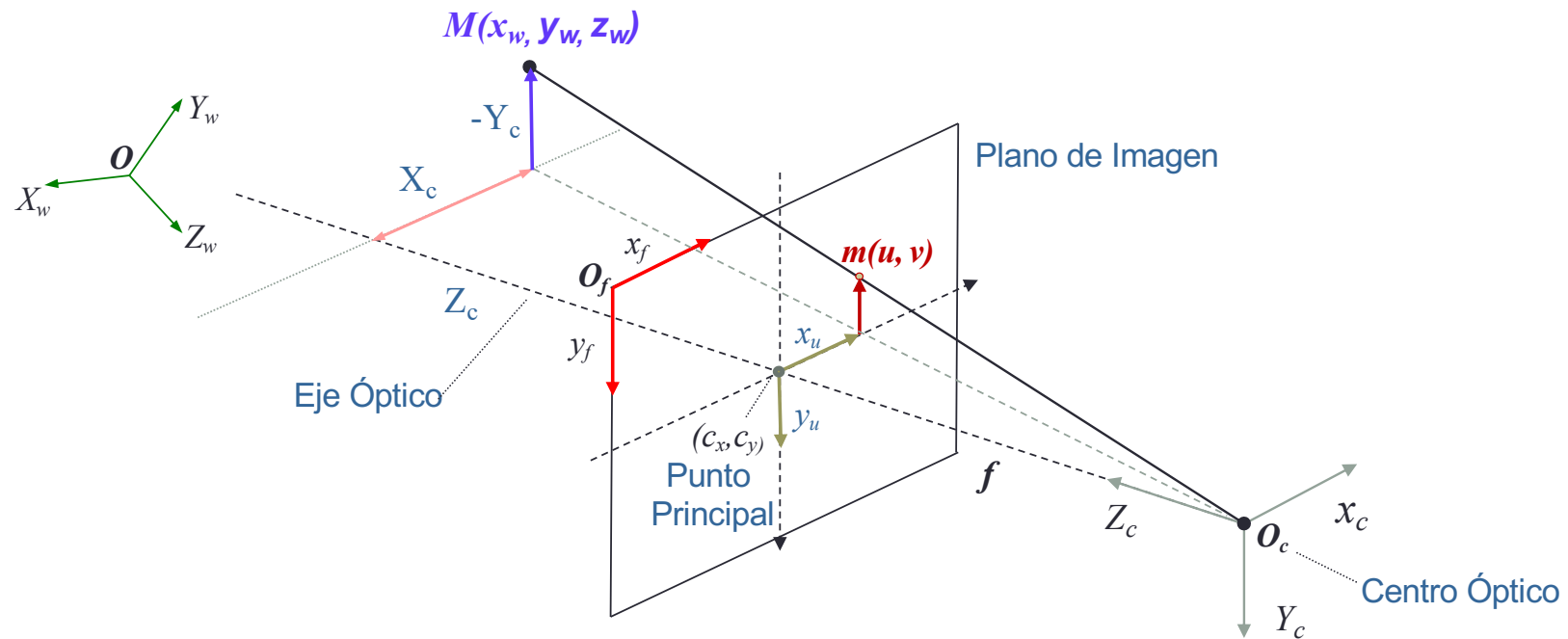
- **Modelo Proyectivo de Cámara**
 - Modelo de lentes: Pinhole, Delgada
 - Parámetros del Modelo de Captación
 - Sistemas de Coordenadas involucradas
 - Ecuaciones Proyectivas

Sistemas de Coordenadas



- Coordenadas del mundo: $(O; X_w, Y_w, Z_w)$
- Coordenadas de la cámara: $(O_c; X_c, Y_c, Z_c)$
- Coordenadas centrales de la imagen: $(c_x, c_y; x_u, y_u)$
- Coordenadas centrales de imagen normalizadas: $(f = 1)(c_x, c_y; x_n, y_n)$
- Coordenadas laterales de la imagen: $(O_f; x_f, y_f)$ ó (u, v)

Ecuaciones Proyectivas

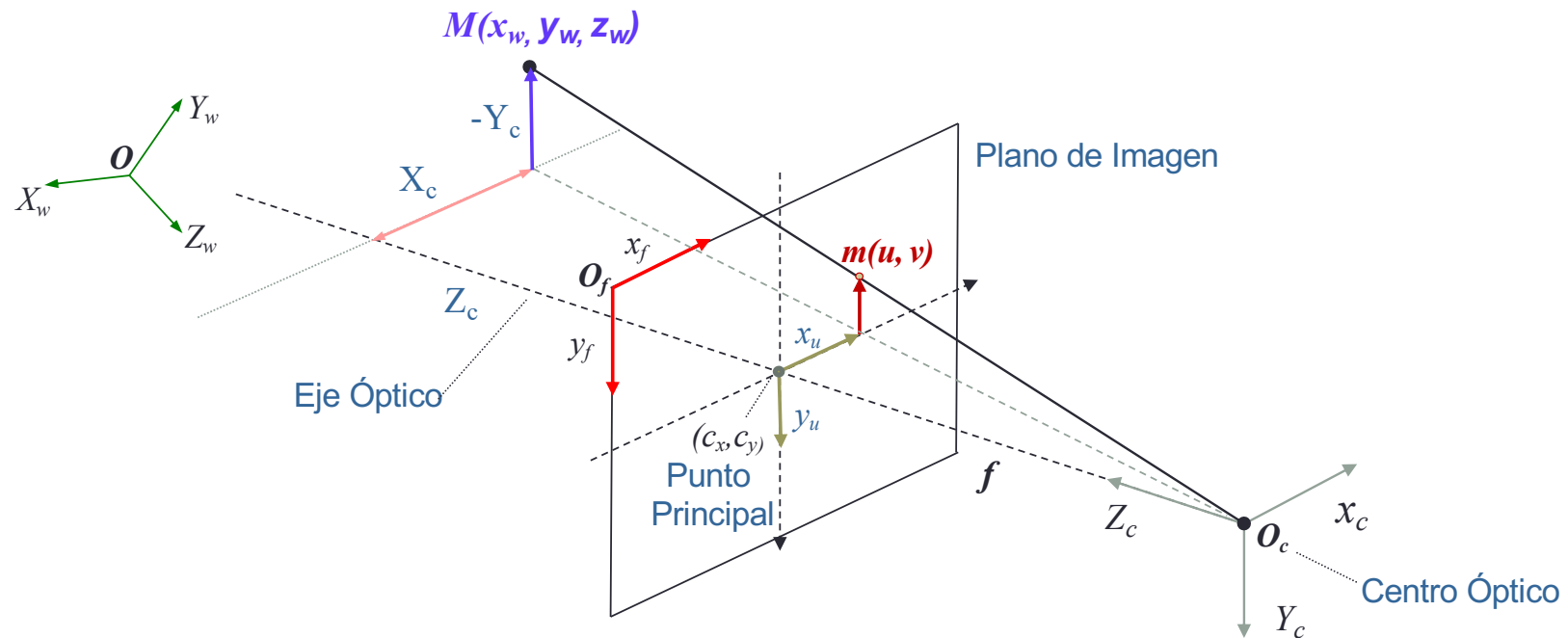


- Relación entre: las coordenadas del mundo y de la cámara:

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_c^w & t_c^w \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{M}_c = \begin{bmatrix} R_c^w & t_c^w \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{M}_w$$

Ecuaciones Proyectivas

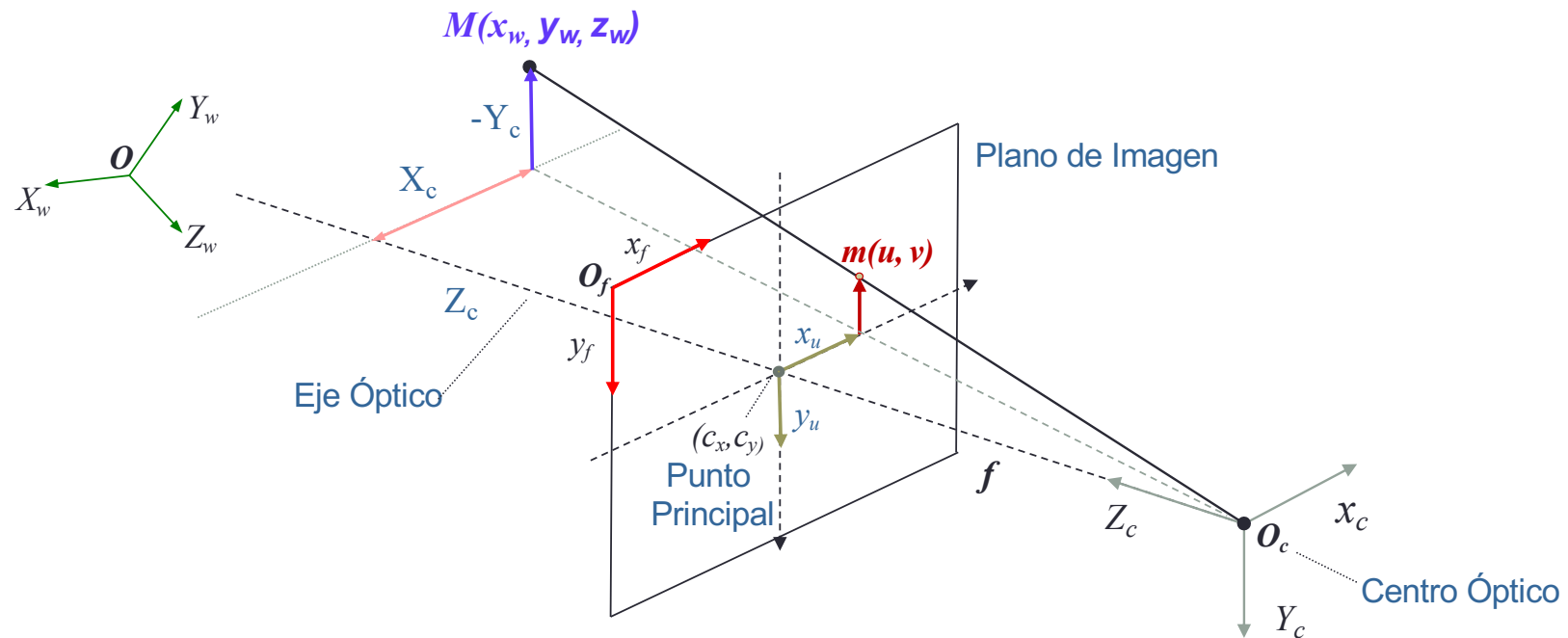


- Relación entre las coordenadas de la cámara y las centrales de la imagen:

$$\begin{bmatrix} n & x_u \\ n & y_u \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{m}_u \cong \tilde{A}_0 \tilde{M}_c$$

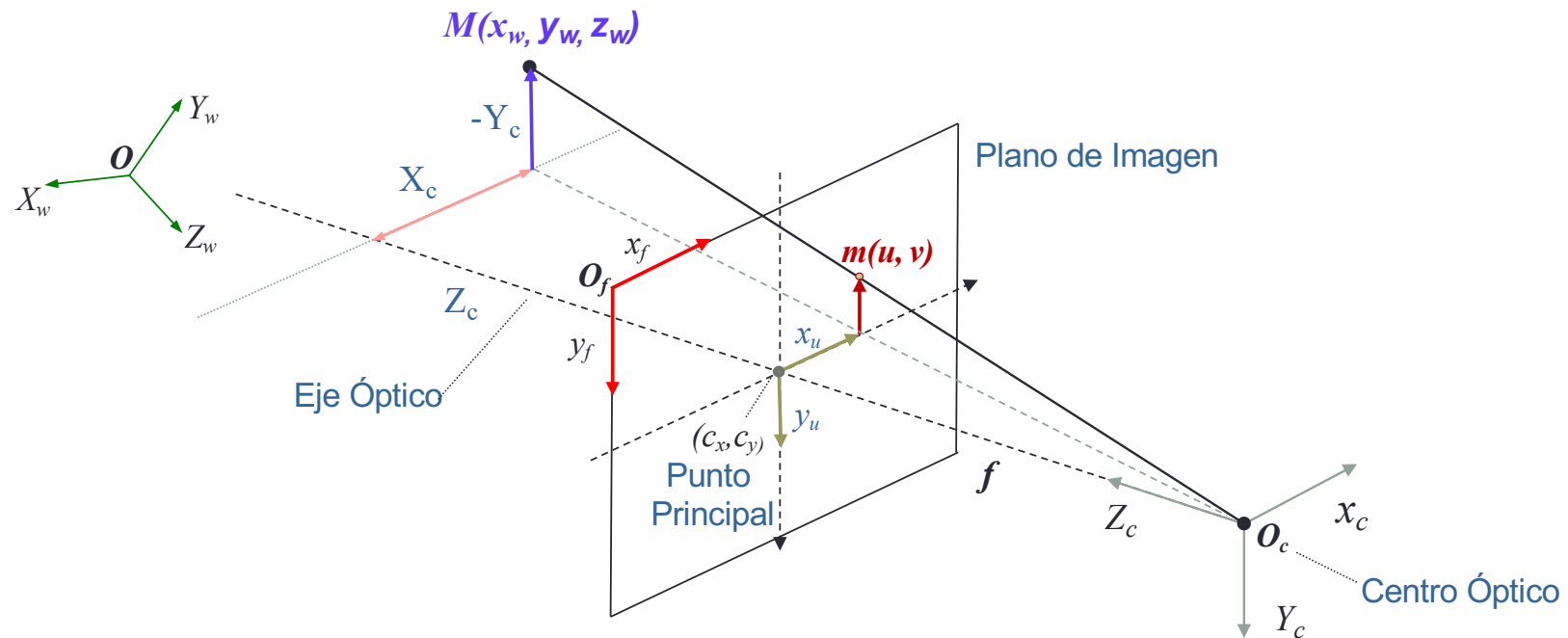
Ecuaciones Proyectivas



- Relación entre las coordenadas centrales de la imagen teóricas (sin distorsión) y reales (con distorsión):

$$\begin{aligned} x_d &= x_u + f \cdot D_x(x_n, y_n) \\ y_d &= y_u + f \cdot D_y(x_n, y_n) \end{aligned}$$

Ecuaciones Proyectivas

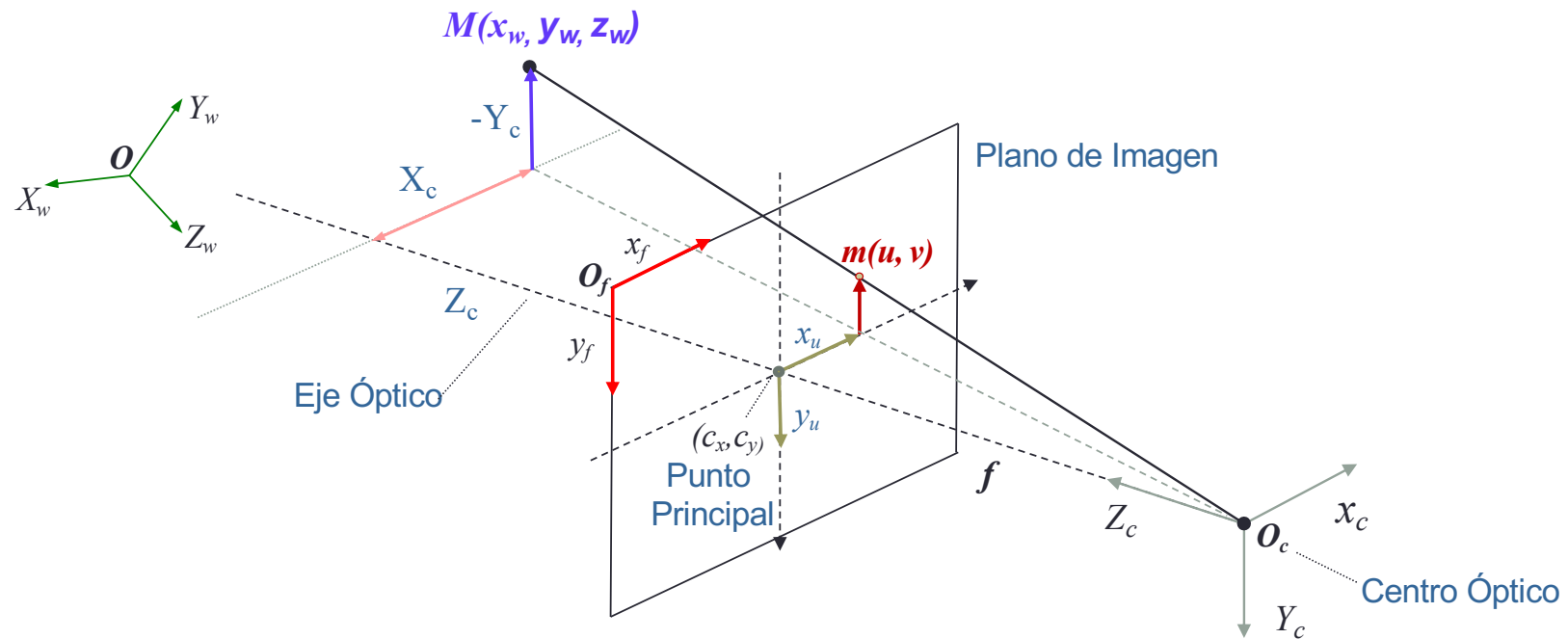


- Relación entre las coordenadas laterales y centrales de la imagen:

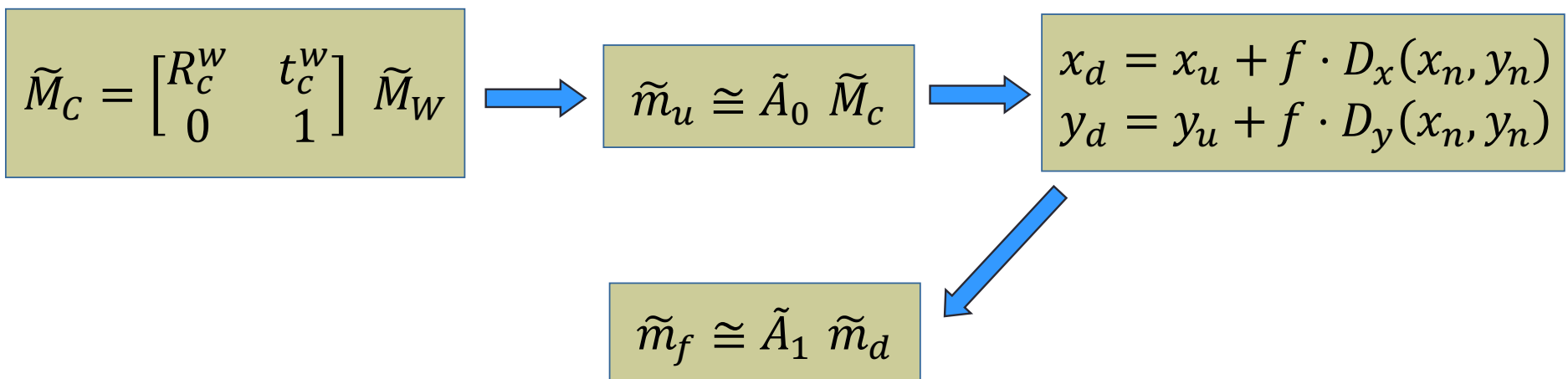
$$\begin{aligned} x_f &= K_x x_d + C_x \\ y_f &= K_y y_d + C_y \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} n & x_f \\ n & y_f \\ n & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x & 0 & C_x \\ 0 & K_y & C_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n & x_d \\ n & y_d \\ n & \end{bmatrix}$$

$$\tilde{m}_f \cong \tilde{A}_1 \tilde{m}_d$$

Ecuaciones Proyectivas



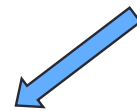
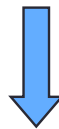
- Resumen de Transformaciones:



Ecuaciones Proyectivas

- Coordenadas centrales de la cámara en función de las coordenadas del mundo y de los parámetros del modelo

$$\begin{bmatrix} n x_u \\ n y_u \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

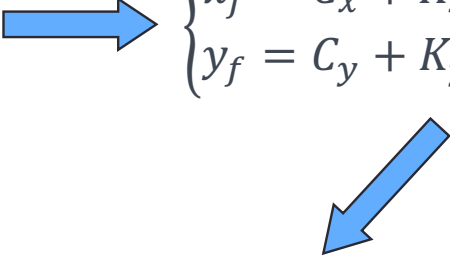


$$\begin{bmatrix} n x_u \\ n y_u \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_u = f \frac{r_{11}X_w + r_{12}Y_w + r_{13}Z_w + t_x}{r_{31}X_w + r_{32}Y_w + r_{33}Z_w + t_z} \\ y_u = f \frac{r_{21}X_w + r_{22}Y_w + r_{23}Z_w + t_y}{r_{31}X_w + r_{32}Y_w + r_{33}Z_w + t_z} \end{cases}$$

Coordenadas Euclídeas

Ecuaciones Proyectivas

- Coordenadas laterales de la cámara en función de las coordenadas del mundo y de los parámetros del modelo

$$\left. \begin{aligned} x_d &= x_u + f \cdot D_x(x_n, y_n) \\ y_d &= y_u + f \cdot D_y(x_n, y_n) \\ x_f &= K_x x_d + C_x \\ y_f &= K_y y_d + C_y \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} x_f = C_x + K_x f \cdot D_x(x_n, y_n) + K_x x_u \\ y_f = C_y + K_y f \cdot D_y(x_n, y_n) + K_y y_u \end{cases}$$


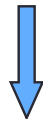
$$\begin{aligned} x_f &= C_x + K_x f \cdot D_x(x_n, y_n) + K_x f \overbrace{\frac{r_{11}X_w + r_{12}Y_w + r_{13}Z_w + t_x}{r_{31}X_w + r_{32}Y_w + r_{33}Z_w + t_z}}^{x_n} \\ y_f &= C_y + K_y f \cdot D_y(x_n, y_n) + K_y f \underbrace{\frac{r_{21}X_w + r_{22}Y_w + r_{23}Z_w + t_y}{r_{31}X_w + r_{32}Y_w + r_{33}Z_w + t_z}}_{y_n} \end{aligned}$$

Ecuaciones Proyectivas

- Relación matricial entre las coordenadas del mundo y las coordenadas laterales de la cámara (sin distorsión). **Matriz de Proyección.**

$$\tilde{m}_f \cong \tilde{A}_1 \tilde{A}_0 \begin{bmatrix} R_c^w & t_c^w \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{M}$$

$$\begin{bmatrix} n & x_f \\ n & y_f \\ n & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x f & 0 & C_x \\ 0 & K_y f & C_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$A = \begin{bmatrix} f_x & 0 & C_x \\ 0 & f_y & C_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n & x_f \\ n & y_f \\ n & \end{bmatrix} = \tilde{P} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{m} \cong [A \quad 0] \begin{bmatrix} R_c^w & t_c^w \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{M}$$

$$\tilde{m} \cong A [R_c^w \quad t_c^w] \tilde{M}$$

$$\tilde{m} \cong \tilde{P} \tilde{M} = [P \quad p] \tilde{M}$$

Ecuaciones Proyectivas

- Componentes de la **Matriz de Proyección** (sin distorsión)

$$\begin{bmatrix} n \ x_f \\ n \ y_f \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x f r_{11} + C_x r_{31} & K_x f r_{12} + C_x r_{32} & K_x f r_{13} + C_x r_{33} & K_x f t_x + C_x t_z \\ K_y f r_{21} + C_y r_{31} & K_y f r_{22} + C_y r_{32} & K_y f r_{23} + C_y r_{33} & K_y f t_y + C_y t_z \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Si } \begin{cases} \bar{r}_1 = [r_{11} & r_{12} & r_{13}] \\ \bar{r}_2 = [r_{21} & r_{22} & r_{23}] \\ \bar{r}_3 = [r_{31} & r_{32} & r_{33}] \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} n \ x_f \\ n \ y_f \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x f \bar{r}_1 + C_x \bar{r}_3 & K_x f t_x + C_x t_z \\ K_y f \bar{r}_2 + C_y \bar{r}_3 & K_y f t_y + C_y t_z \\ \bar{r}_3 & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{m} \cong \tilde{P} \tilde{M} = [P \quad p] \tilde{M}$$

Ecuaciones Proyectivas

- Ecuaciones con distorsión:

$$\tilde{m}_u \cong A \begin{bmatrix} R_c^w & t_c^w \end{bmatrix} \tilde{M}_c \quad A = \begin{bmatrix} f_x & 0 & C_x \\ 0 & f_y & C_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas 2D normalizadas
sin distorsión:

$$\tilde{q} \cong A^{-1} \cdot \tilde{m}_u \cong \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{bmatrix}$$



Ecuaciones de distorsión:

$$\left. \begin{aligned} x_n^d &= x_n(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6) + 2p_1 x_n y_n + p_2(2x_n^2 + r^2) + s_1 r^2 + s_2 r^4 \\ y_n^d &= y_n(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6) + 2p_2 x_n y_n + p_1(2y_n^2 + r^2) + s_1 r^2 + s_2 r^4 \\ r^2 &= x_n^2 + y_n^2 \end{aligned} \right\}$$

Coordenadas 2D
normalizadas con distorsión:

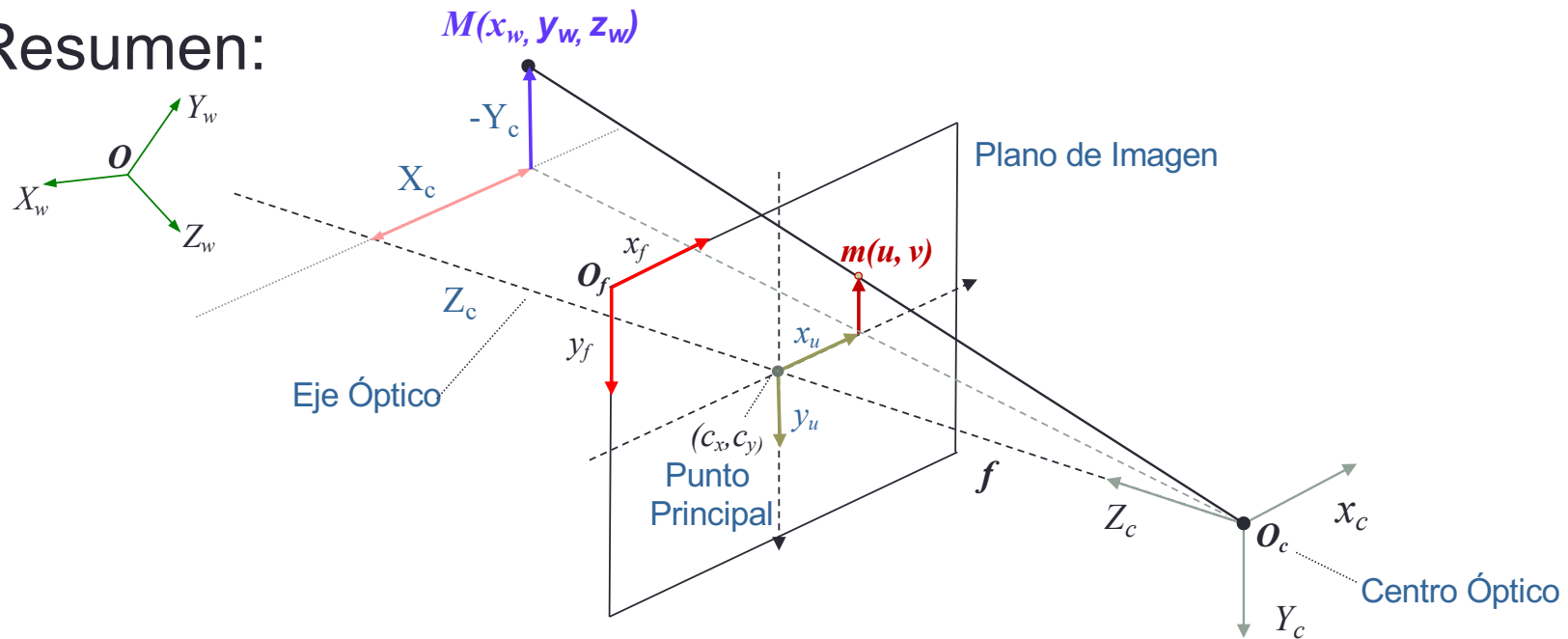
$$\tilde{q}^d \cong \begin{bmatrix} x_n^d \\ y_n^d \\ 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas 2D con distorsión

$$\tilde{m} \cong A \cdot \tilde{q}^d$$

Ecuaciones Proyectivas

- Resumen:



$$\tilde{m} \cong \tilde{P} \tilde{M} = \begin{bmatrix} P & p \end{bmatrix} \tilde{M}$$

$$\tilde{m} \cong A \begin{bmatrix} R & t \end{bmatrix} \tilde{M}$$

$$\tilde{m} \cong AR \begin{bmatrix} I & R^T t \end{bmatrix} \tilde{M} = AR \begin{bmatrix} I & -C \end{bmatrix} \tilde{M}$$

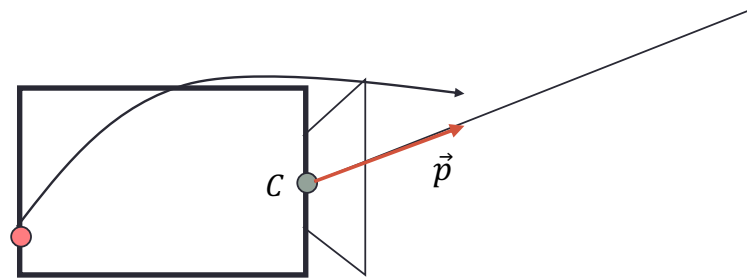
Posición del Centro Óptico:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{C} \cong \begin{bmatrix} -R^T t \\ 1 \end{bmatrix}$$

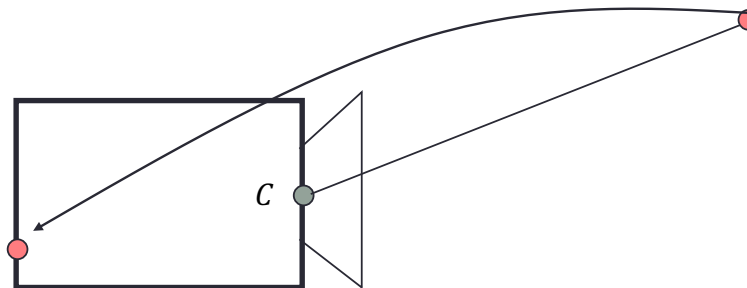
$$A = \begin{bmatrix} f_x & 0 & C_x \\ 0 & f_y & C_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Modelo General de Cámara

- Podemos modelar la cámara a partir del rayo proyección
 - Permite incluir la distorsión o modelos de proyección más complejos



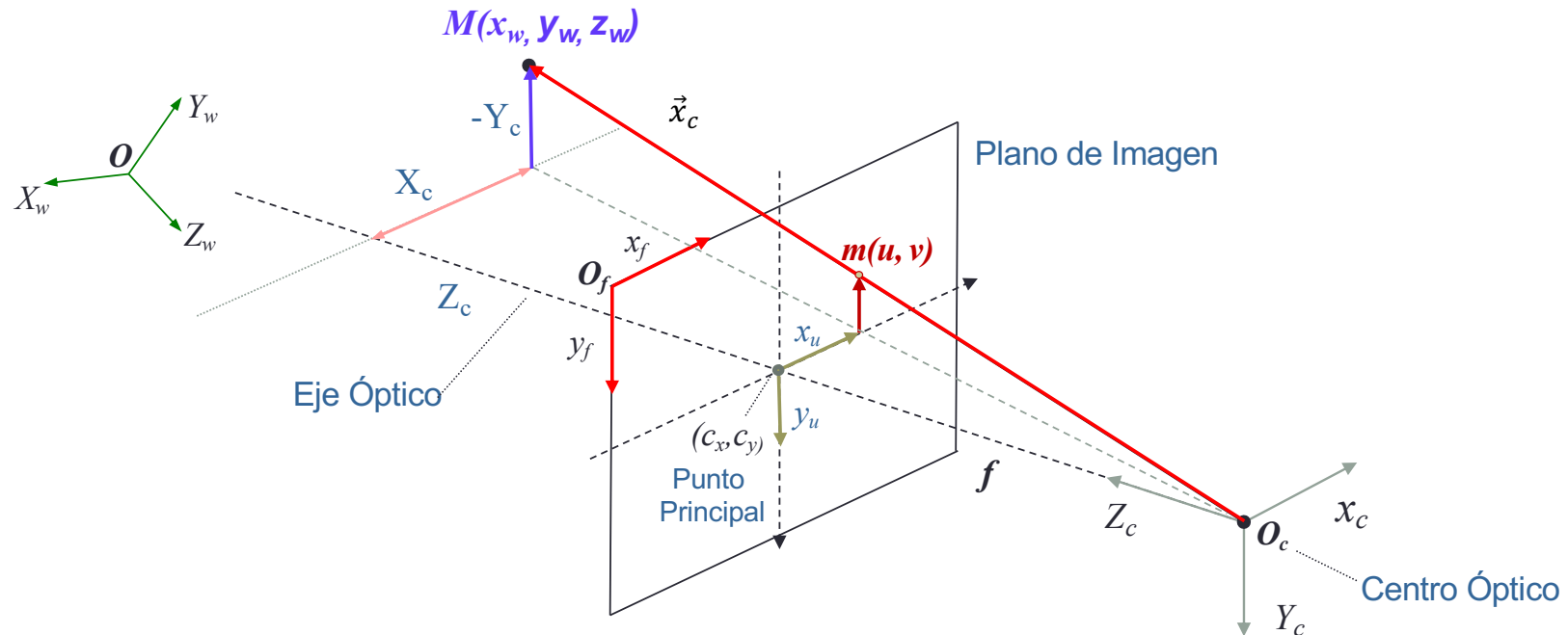
Calibración



Proyección

Ecuaciones Proyectivas

- Rayo proyección a partir de un punto de imagen (sin distorsión):



Rayo proyección en Coordenadas de Cámara:

$$\tilde{m} \cong A \begin{bmatrix} R & t \end{bmatrix} \tilde{M}$$

$$\tilde{q} \cong A^{-1} \cdot \tilde{m} \cong \begin{bmatrix} R & t \end{bmatrix} \tilde{M}$$

$$\vec{x}_c = \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = R \cdot \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \end{bmatrix} + t$$

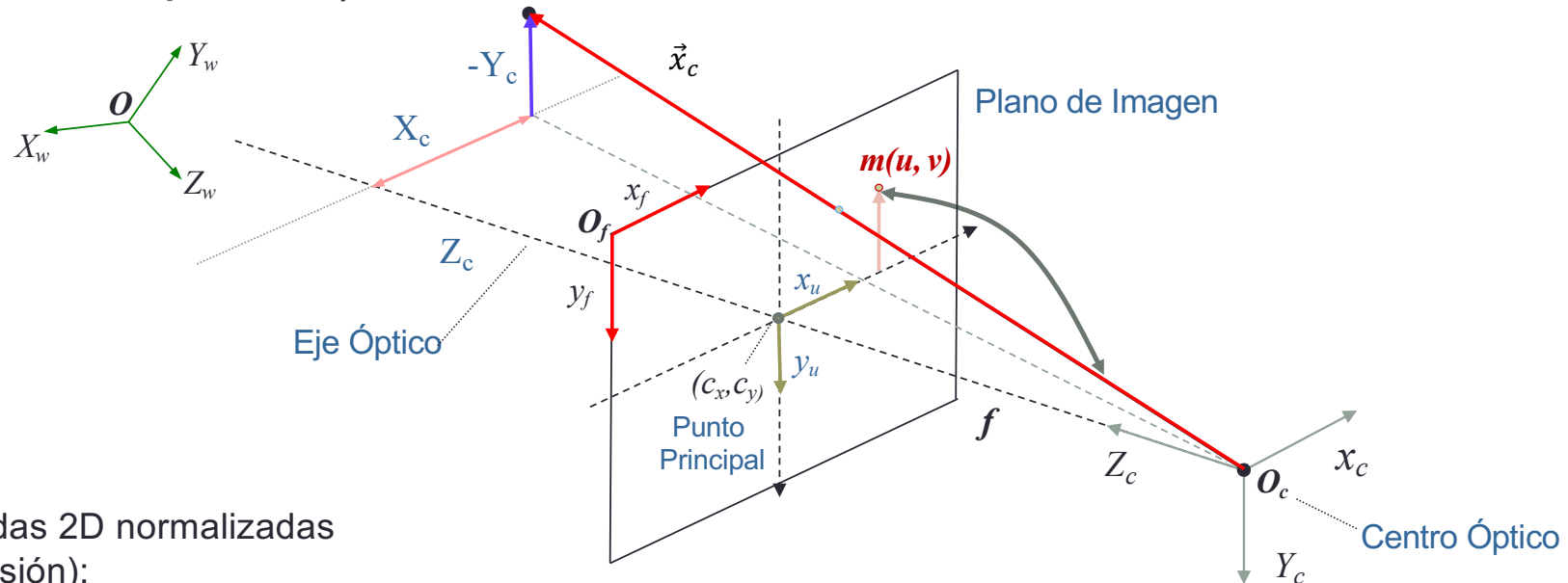
Coordenadas proyectadas 2D
normalizadas, origen punto
principal, $f=1$:

$$\tilde{q} = A^{-1} \cdot \tilde{m} \cong \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}_c \cong A^{-1} \cdot \tilde{m}$$

Ecuaciones Proyectivas

- Rayo proyección a partir de un punto de imagen (con distorsión, modelo *OpenCV*): $M(x_w, y_w, z_w)$



Coordenadas 2D normalizadas
(con distorsión):

$$\tilde{q}^d \cong A^{-1} \cdot \tilde{m} \cong \begin{bmatrix} x_n^d \\ y_n^d \\ 1 \end{bmatrix} \quad \left. \begin{aligned} x_n^d &= x_n(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6) + 2p_1 x_n y_n + p_2(2x_n^2 + r^2) + s_1 r^2 + s_2 r^4 \\ y_n^d &= y_n(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6) + 2p_2 x_n y_n + p_1(2y_n^2 + r^2) + s_1 r^2 + s_2 r^4 \\ r^2 &= x_n^2 + y_n^2 \end{aligned} \right\}$$

Rayo proyección en
Coordenadas de Cámara:

$$\vec{x}_c = \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = [R \quad t] \tilde{M}$$

$$\vec{x}_c \cong \tilde{q} \cong \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ecuaciones de distorsión $\rightarrow \tilde{q} \cong \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{bmatrix}$

Coordenadas 2D (sin distorsión):

$$\tilde{m}_u \cong A \cdot \tilde{q}$$

Tabla de Contenidos

- Modelo Proyectivo de Cámara
- **Siguiente tema:**
 - Calibración
 - Algoritmo de Zhang (OpenCV/CalibToolbox)