

VISIÓN 3D

Herramientas matemáticas

Estimación de Homografías

Calibración Proyectiva F/E

Triangulación 3D



Ingeniería de Sistemas y Automática

Universidad Miguel Hernández

Descomposición en Valores Singulares (SVD)

- A es una matriz cuadrada: $A_{n \times n} = U \cdot D \cdot V^T$
 - U, V Son matrices ortogonales
 - D Es una matriz diagonal, con valores no negativos (valores singulares) ordenados de mayor a menor

$$D_{n \times n} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

$$\text{abs}(|A|) = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdots \sigma_n$$

$$\text{sgn}(|A|) = |U \cdot V^T|$$

- Condición de una matriz

- Condición óptima: $\text{cond}(A) \rightarrow 1$
- Matriz singular: $\text{cond}(A) \rightarrow \infty$

$$\text{cond}(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$$

- Relación con los valores propios

$$A^T A = V D U^T \cdot U D V^T = V D^2 V^T = V D^2 V^{-1}$$

- D^2 matriz diagonal con los valores propios de $A^T A$
- V son los vectores propios de $A^T A$
- Los valores singulares son las raíces cuadradas positivas de los valores propios de $A^T A$

Descomposición en Valores Singulares (SVD)

- A es una matriz cuadrada: $A_{n \times n} = U \cdot D \cdot V^T$

$$D_{n \times n} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

$$abs(|A|) = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdots \sigma_n$$

$$A_{n \times n} = U \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_n \end{bmatrix} \cdot V^T$$

- Matriz singular más cercana: $|A^*| = 0$ $\text{cond}(A^*) \rightarrow \infty$

$$A_{n \times n}^* = U \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot V^T$$

- Orto-normalización de matrices: $|A^*| = 1$ $A_{n \times n}^* = [\bar{\mathbf{a}}_1^* \cdots \bar{\mathbf{a}}_n^*]$

$$A_{n \times n}^* = U \cdot \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & |U \cdot V^T| \end{bmatrix} \cdot V^T$$

$$\bar{\mathbf{a}}_i^{*T} \cdot \bar{\mathbf{a}}_j^* = \begin{cases} 0 & \text{para } i \neq j \\ 1 & \text{para } i = j \end{cases}$$



Descomposición en Valores Singulares (SVD)

- A es una matriz no cuadrada:

$$A_{m \times n} = U \cdot D \cdot V^T \quad (m > n)$$

- $U_{m \times m}$ es una matriz con columnas ortogonales
- $D_{m \times n}$ es una matriz diagonal (valores singulares) $D_{m \times n} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$
- $V_{n \times n}$ es una matriz ortogonal (vectores singulares)

- Condición de una matriz (a rango n)

$$\text{cond}(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$$

- Condición óptima: $\text{cond}(A) \rightarrow 1$
 - Matriz singular: $\text{cond}(A) \rightarrow \infty$
- Condición de una matriz (a rango k)

$$\text{cond}(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_k}$$

Condicionamiento de sistemas de ecuaciones lineales

- Un sistema está bien condicionado si pequeños cambios en los parámetros producen pequeños cambios en los resultados
- **Número de condición:** Cociente entre los valores singulares mayor y menor
- Ejemplo de sistema $Ax=b$ bien condicionado

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} b = \begin{bmatrix} 3 \\ 14 \end{bmatrix} \Rightarrow x = A^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ b = \begin{bmatrix} 3 - 0.04 \\ 14 - 0.06 \end{bmatrix} \Rightarrow x = A^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} 0.993 \\ 0.996 \end{bmatrix} \end{cases} \quad \begin{aligned} vs &= [11.1803 \quad 8.9443] \\ cond(A) &= 1.25 \end{aligned}$$

- Ejemplo de sistema $Ax=b$ mal condicionado

$$A = \begin{bmatrix} 0.66 & 3.34 \\ 1.99 & 10.01 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} b = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix} \Rightarrow x = A^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ b = \begin{bmatrix} 4 - 0.04 \\ 12 - 0.06 \end{bmatrix} \Rightarrow x = A^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad \begin{aligned} vs &= [10.7588 \quad 0.0037] \\ cond(A) &= 2.89 \cdot 10^3 \end{aligned}$$

Descomposición en Valores Singulares (SVD)

- A es una matriz no cuadrada:

$$A_{m \times n} = U \cdot D \cdot V^T \quad (m < n)$$

- $U_{m \times m}$ es una matriz con columnas ortogonales
 - $D_{m \times n}$ es una matriz diagonal (valores singulares) $D_{m \times n} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$
 - $V_{n \times n}$ es una matriz ortogonal (vectores singulares)
- Subespacio nulo:
 - Solución ecuación $Ax=0$
 - r último valor singular no nulo (condición razonable)
 - Soluciones: $\lambda = n-r$ últimos vectores singulares de V

$$[\mathbf{x}] = [v_{r+1} \quad \cdots \quad v_n]$$

Mínimos Cuadrados

- Mínimos cuadrados lineales (Ecuación Homogénea)
 - Resolver $Ax=0$ con $A_{m \times n}$
 - Sistema sobre-determinado $m \geq n$
 - Sistemas de ecuaciones exactos: ($\lambda \geq 1$ tamaño del espacio solución)
 - $(m-n+\lambda)$ restricciones deberían ser combinación lineal de las $(n-\lambda)$ restantes
 - λ valores singulares nulos
 - Sistemas de ecuaciones aproximados: solución de mínimos cuadrados
 - Minimizar respecto a x $\|e\|^2 = (Ax)^T(Ax)$
 - Solución: $SVD(A) \rightarrow A = UDV^T \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \rightarrow \mathbf{x} = v_n \\ \lambda > 1 \rightarrow [\mathbf{x}] = [v_{n-\lambda+1} \quad \cdots \quad v_n] \end{cases}$
 - Condición a rango $(n-\lambda)$: $cond(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_{n-\lambda}}$

Mínimos Cuadrados

- Mínimos cuadrados lineales sin restricciones
 - Resolver $Ax=b$ con $A_{m \times n}$ $m \geq n$
 - Solución: $x=(A^T A)^{-1} A^T b$
 - Se minimiza con respecto a: $\|e\|^2 = (Ax-b)^T(Ax-b)$
 - Problema generalizado: Dar un peso determinado a cada error.
 - Minimizar con respecto a x : $(Ax-b)^T W^{-1}(Ax-b)$
 - Solución: $x=(A^T W^{-1} A)^{-1} A^T W^{-1} b$
- Ejemplo: Recta 2D más cercana a varios puntos $(v=pu+q)$

$$* \text{ Puntos}(u, v) \left\{ \begin{pmatrix} 1.3, -0.5 \\ 1.7, 0.6 \\ 2.4, 1.5 \end{pmatrix} \right\}; A = \begin{bmatrix} 1.3 & 1.0 \\ 1.7 & 1.0 \\ 2.4 & 1.0 \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.6 \\ 1.5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \text{Solución: } (p, q) = (1.75, -2.63) \\ \text{Error: } (0.1543, -0.2425, 0.0882) \\ \text{Número de condición: } 93.66 \end{cases}$$

$$* \text{ Puntos}(u, v) \left\{ \begin{pmatrix} 1.3, -0.5 \\ 1.7, 0.6 \\ 2.4, 1.5 \end{pmatrix} \right\}; A = \begin{bmatrix} 130.0 & 100.0 \\ 1.7 & 1.0 \\ 2.4 & 1.0 \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} -50.0 \\ 0.6 \\ 1.5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \text{Solución: } (p, q) = (1.92, -3.00) \\ \text{Error: } (0.0021, -0.3292, 0.1197) \\ \text{Número de condición: } 52856 \end{cases}$$

Normalización de los datos

- Sistemas de ecuaciones mejor condicionados:
 - Definir una transformación proyectiva

$$\tilde{\tilde{m}} = \mathbf{T} \cdot \tilde{m} \quad \text{tal que}$$

- El centro de gravedad de todos los puntos sea el origen
- La media de las distancia al origen sea $\sqrt{2}$
- Se aplica para los puntos de la imagen y del espacio

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1/\sigma_x & 0 & -\mu_x/\sigma_x \\ 0 & 1/\sigma_y & -\mu_y/\sigma_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

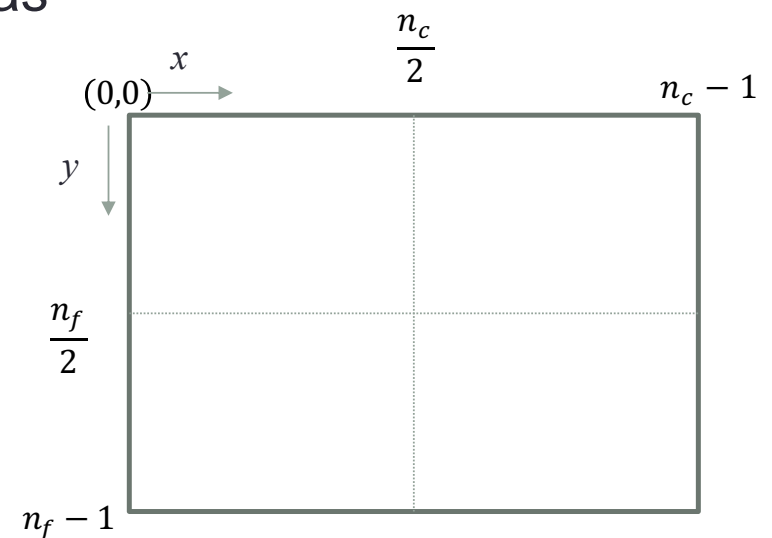
- Emplear transformaciones más sencillas

- Todos los puntos entre -1 y 1

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2/n_c & 0 & -1 \\ 0 & 2/n_f & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Todos los puntos entre 0 y 2

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2/n_c & 0 & 0 \\ 0 & 2/n_f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Optimización no lineal

- Optimización por Levenberg-Marquardt

- Planteamiento: Resolver $a=f(p)$

- a : Medidas pertenecientes a R^m
- p : Parámetros pertenecientes a R^n

- Solución:

- Hallar $\hat{p}$ que cumpla $a = f(\hat{p}) + \varepsilon$ minimizando $\varepsilon = a - f(\hat{p})$
- Aproximación lineal de f entorno a p_i : $a + \varepsilon_i = f(p_i + \Delta_i) = f(p_i) + J_i \Delta_i$

$$\text{con } J = \frac{\partial f}{\partial p} ; J_i \Delta_i = \varepsilon_i \rightarrow \Delta_i = J_i^+ \varepsilon_i = (J_i^T J_i)^{-1} J_i^T \varepsilon_i$$

- Proceso iterativo

$$p_{i+1} = p_i + \Delta_i$$

J_i^+ pseudo-inversa de J_i

- Aceleración. Si $N = J_i^T J_i$

- $N^* = (I + \lambda)N$ con valor inicial $\lambda = 10^{-3}$
- Con $\|\varepsilon_{i+1}\| < \|\varepsilon_i\| \rightarrow \lambda = \lambda/10$
- Con $\|\varepsilon_{i+1}\| > \|\varepsilon_i\| \rightarrow \lambda = \lambda * 10$

Descomposición de Matrices

- Descomposición de **Cholesky**

- Si S es una matriz simétrica de dimensión $n \times n$ y $|S| > 0$ entonces existe una matriz T triangular superior (o inferior) de la misma dimensión que cumple $S = T^T T$

- Si los elementos de la matriz T son $\{t_{ij}\}$, con $t_{ij} = 0$ para $i > j$

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ 0 & t_{22} & t_{23} \\ 0 & 0 & t_{33} \end{bmatrix}$$

$$t_{ii} = + \sqrt{s_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2} \quad \text{y} \quad t_{ij} = \frac{1}{t_{ii}} \left(s_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} t_{kj} \right) \quad \text{para } i < j$$

- La formulación exige que estos elementos se calculen por filas, de izquierda a derecha y de arriba a abajo

Cálculo Homografías

- **HOMOGRAFÍA:** Relación lineal entre puntos pertenecientes a distintos espacios proyectivos (*p.e. 2 planos*):

$$\tilde{m}' \cong H \cdot \tilde{m} \quad \begin{bmatrix} n \cdot x' \\ n \cdot y' \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (h_{31}x + h_{32}y + h_{33}) \cdot x' = h_{11}x + h_{12}y + h_{13} \\ (h_{31}x + h_{32}y + h_{33}) \cdot y' = h_{21}x + h_{22}y + h_{23} \end{cases}$$

- Solución Homogénea:

$$\# \text{puntos} \geq 4 \quad \mathbf{A}_{xy} = \begin{bmatrix} -x^{(1)} & -y^{(1)} & -1 & 0 & 0 & 0 & x^{(1)}x'^{(1)} & y^{(1)}x'^{(1)} & x'^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & -x^{(1)} & -y^{(1)} & -1 & x^{(1)}y'^{(1)} & y^{(1)}y'^{(1)} & y'^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{xy} \cdot \mathbf{h} = 0 \quad \mathbf{h} = [h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{21}, h_{22}, h_{23}, h_{31}, h_{32}, h_{33}]^T$$

$$\min_{\mathbf{h}} \left[(\mathbf{A}_{xy} \mathbf{h})^2 \right] \quad \boxed{SVD(\mathbf{A}_{xy}) \rightarrow \mathbf{A}_{xy} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^T \Rightarrow \mathbf{h} = \mathbf{v}_9} \quad \text{cond}(\mathbf{A}_{xy}) = \frac{\sigma_1}{\sigma_8}$$

- Normalización: solución robusta frente al ruido

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{m} = T \cdot \tilde{m} \\ \tilde{m}' = T' \cdot \tilde{m}' \end{array} \right\} \longrightarrow \tilde{m}' \cong \hat{H} \cdot \tilde{m} \longrightarrow \boxed{H \cong T'^{-1} \cdot \hat{H} \cdot T}$$

Cálculo Homografías

- Solución no Homogénea: asumimos ($h_{33} \neq 0$)

$$\begin{bmatrix} n \cdot x' \\ n \cdot y' \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}/h_{33} & h_{12}/h_{33} & h_{13}/h_{33} \\ h_{21}/h_{33} & h_{22}/h_{33} & h_{23}/h_{33} \\ h_{31}/h_{33} & h_{32}/h_{33} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad h_{33} \cong t_z \quad \text{Distancia entre los planos}$$

$$\begin{bmatrix} n \cdot x' \\ n \cdot y' \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h'_{11} & h'_{12} & h'_{13} \\ h'_{21} & h'_{22} & h'_{23} \\ h'_{31} & h'_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} (h'_{31}x + h'_{32}y + 1) \cdot x' &= h'_{11}x + h'_{12}y + h'_{13} \\ (h'_{31}x + h'_{32}y + 1) \cdot y' &= h'_{21}x + h'_{22}y + h'_{23} \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}_{xy} = \begin{bmatrix} -x^{(1)} & -y^{(1)} & -1 & 0 & 0 & 0 & x^{(1)}x'^{(1)} & y^{(1)}x'^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & -x^{(1)} & -y^{(1)} & -1 & x^{(1)}y'^{(1)} & y^{(1)}y'^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -x'^{(1)} \\ -y'^{(1)} \\ \vdots \end{bmatrix}^T \quad \# \text{puntos} \geq 4$$

$$\mathbf{h} = [h'_{11}, h'_{12}, h'_{13}, h'_{21}, h'_{22}, h'_{23}, h'_{31}, h'_{32}]^T$$

$$\mathbf{A}_{xy} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{b}$$

- Mínimos cuadrados: $\mathbf{h} = (\mathbf{A}_{xy}^T \mathbf{A}_{xy})^{-1} \cdot \mathbf{A}_{xy}^T \cdot \mathbf{b} \quad \min_{\mathbf{h}} [(\mathbf{A}_{xy} \mathbf{h} - \mathbf{b})^2]$

- Normalización: solución robusta frente al ruido $\text{cond}(\mathbf{A}_{xy}) = \frac{\sigma_1}{\sigma_8}$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{m}} &= T \cdot \tilde{\mathbf{m}} \\ \tilde{\mathbf{m}}' &= T' \cdot \tilde{\mathbf{m}}' \end{aligned} \right\} \longrightarrow \tilde{\mathbf{m}}' \cong \hat{H} \cdot \tilde{\mathbf{m}} \longrightarrow H \cong T'^{-1} \cdot \hat{H} \cdot T$$

Cálculo Matriz Fundamental/Esencial

- **Correlación:** Relación lineal entre puntos y rectas pertenecientes a distintos espacios proyectivos (*p.e. 2 planos de imagen*)

$$\tilde{m}'_i^T F \tilde{m}_i = 0 \quad \tilde{m}' = [x' \ y' \ 1]^T, \quad \tilde{m} = [x \ y \ 1]^T \quad F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}$$

$$x'xf_{11} + x'yf_{12} + x'f_{13} + y'xf_{21} + y'yf_{22} + y'f_{23} + xf_{31} + yf_{32} + f_{33} = 0$$

- Solución Homogénea: $\# \text{puntos} \geq 8$

$$\begin{bmatrix} x'_1x_1 & x'_1y_1 & x'_1 & y'_1x_1 & y'_1y_1 & y'_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x'_nx_n & x'_ny_n & x'_n & y'_nx_n & y'_ny_n & y'_n & x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \mathbf{f} = 0$$

$$A_{xy} \mathbf{f} = 0$$

$$\min_{\mathbf{f}} \left[(\mathbf{A}_{xy} \mathbf{f})^2 \right]$$

$$\mathbf{f} = [f_{11} \ f_{12} \ f_{13} \ f_{21} \ f_{22} \ f_{23} \ f_{31} \ f_{32} \ f_{33}]^T \quad SVD(A_{xy}) \rightarrow A_{xy} = UDV^T \Rightarrow \mathbf{f} = v_9$$

$$\|\mathbf{f}\| = 1$$

$$\mathbf{f} \Rightarrow F^*$$

- Restricciones: F debe ser singular $|F| = 0$

$$SVD(F^*) \rightarrow F^* = UDV^T$$

$$F = UD^*V^T$$

$$|F| = 0$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \rightarrow D^* = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cálculo Matriz Fundamental/Esencial

- Correlación:

- Solución No Homogénea:** asumimos $(f_{33} \neq 0) \Rightarrow f_{33} = 1$

$$x'xf_{11} + x'yf_{12} + x'f_{13} + y'xf_{21} + y'yf_{22} + y'f_{23} + xf_{31} + yf_{32} + 1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x'_1x_1 & x'_1y_1 & x'_1 & y'_1x_1 & y'_1y_1 & y'_1 & x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x'_nx_n & x'_ny_n & x'_n & y'_nx_n & y'_ny_n & y'_n & x_n & y_n \end{bmatrix} \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{\#puntos} \geq 8$$

$$\boxed{A_{xy} \mathbf{f} = \mathbf{b}}$$

$$\mathbf{f} = [f_{11} \quad f_{12} \quad f_{31} \quad f_{21} \quad f_{22} \quad f_{23} \quad f_{31} \quad f_{32}]^T \quad \min_{\mathbf{f}} [(A_{xy}\mathbf{f} - \mathbf{b})^2]$$

$$\mathbf{f} = (A_{xy}^T A_{xy})^{-1} \cdot A_{xy}^T \cdot \mathbf{b} \quad \boxed{\mathbf{f} \Rightarrow F^*}$$

- Restricciones:** F debe ser singular $|F| = 0$

$$SVD(F^*) \rightarrow F^* = UDV^T \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \rightarrow D^* = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{F = UD^*V^T} \quad |F| = 0$$

Cálculo Matriz Fundamental/Esencial

- Normalización

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\tilde{m}} = T \cdot \tilde{m} \\ \tilde{\tilde{m}}' = T' \cdot \tilde{m}' \end{array} \right\} \longrightarrow \tilde{\tilde{m}}_i'^T \hat{F} \tilde{\tilde{m}}_i = 0 \quad \boxed{F = T'^T \hat{F} T}$$

$$T^{-1} = T'^{-1} = \begin{bmatrix} n_c/2 & 0 & n_c/2 \\ 0 & n_f/2 & n_f/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz Esencial:

- Restricción adicional: dos valores singulares iguales

$$\tilde{q}_i' E \tilde{q}_i = 0 \quad SVD(E *) \rightarrow E * = U D V^T \quad E = U D^* V^T, \quad |E| = 0$$

$$\begin{array}{l} \tilde{q}_i = A^{-1} \tilde{m} \\ \tilde{q}_i' = A'^{-1} \tilde{m}' \end{array} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \rightarrow D^* = \begin{bmatrix} (\lambda_1 + \lambda_2)/2 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_1 + \lambda_2)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cálculo Matriz Fundamental/Esencial

- Algoritmo de 7 puntos: $n=7$

$$\begin{bmatrix} x'_1x_1 & x'_1y_1 & x'_1 & y'_1x_1 & y'_1y_1 & y'_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x'_nx_n & x'_ny_n & x'_n & y'_nx_n & y'_ny_n & y'_n & x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \mathbf{f} = 0 \quad \boxed{A_{xy} \mathbf{f} = 0}$$

$$\mathbf{f} = [f_{11} \ f_{12} \ f_{13} \ f_{21} \ f_{22} \ f_{23} \ f_{31} \ f_{32} \ f_{33}]^T$$

- El espacio nulo de A_{xy} será de dimensión 2 $(f_1, f_2) \rightarrow (F_1, F_2)$

$$[\mathbf{f}_1 \ \mathbf{f}_2] = [v_8 \ v_9]$$

- Restricciones: F singular $\boxed{F = \alpha F_1 + (1 - \alpha)F_2}$

$$\det(\alpha F_1 + (1 - \alpha)F_2) = 0$$

- Solución analítica: ecuación cúbica en α
- Solución iterativa: minimización no lineal
- Se aplicaría el proceso de normalización y desnormalización indicado anteriormente

Triangulación

- Solución Homogénea
 - Rectas proyección:

$$\tilde{P} \cong A [I \quad 0]$$

$$\tilde{P}' \cong A' [R \quad t]$$

$$\tilde{m}_i \cong \tilde{P} \tilde{M}_i \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda & x \\ \lambda & y \\ \lambda & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^T \\ P_2^T \\ P_3^T \end{bmatrix} \tilde{M}_i$$

$$\tilde{m}'_i \cong \tilde{P}' \tilde{M}_i \Rightarrow \begin{bmatrix} \mu x' \\ \mu y' \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1'^T \\ P_2'^T \\ P_3'^T \end{bmatrix} \tilde{M}_i$$

$$\begin{aligned} P_3^T \tilde{M}_i x &= P_1^T \tilde{M}_i \\ P_3^T \tilde{M}_i y &= P_2^T \tilde{M}_i \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} P_3^T x - P_1^T \\ P_3^T y - P_2^T \end{bmatrix} \tilde{M}_i = 0$$

$$\begin{aligned} P_3'^T \tilde{M}_i x' &= P_1'^T \tilde{M}_i \\ P_3'^T \tilde{M}_i y' &= P_2'^T \tilde{M}_i \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} P_3'^T x - P_1'^T \\ P_3'^T y - P_2'^T \end{bmatrix} \tilde{M}_i = 0$$

$$\begin{bmatrix} P_3^T x - P_1^T \\ P_3^T y - P_2^T \\ P_3'^T x' - P_1'^T \\ P_3'^T y' - P_2'^T \end{bmatrix} \tilde{M}_i = 0$$

$$A_{xy} \tilde{M}_i = 0$$

- Estimación mínimos cuadrados: $\min_{\tilde{M}} [(|A_{xy} \tilde{M}|)^2]$

$$\begin{aligned} SVD(A_{xy}) &\rightarrow A_{xy} = UDV^T \\ \tilde{M} &= v_n \quad \|\tilde{M}\| = 1 \end{aligned}$$

Triangulación

- Solución no homogénea - Euclídea:

$$\begin{cases} (p_{31}x - p_{11})X_w + (p_{32}x - p_{12})Y_w + (p_{33}x - p_{13})Z_w = p_{14} - p_{34}x \\ (p_{31}y - p_{21})X_w + (p_{32}y - p_{22})Y_w + (p_{33}y - p_{23})Z_w = p_{24} - p_{34}y \\ (p'_{31}x' - p'_{11})X_w + (p'_{32}x' - p'_{12})Y_w + (p'_{33}x' - p'_{13})Z_w = p'_{14} - p'_{34}x' \\ (p'_{31}y' - p'_{21})X_w + (p'_{32}y' - p'_{22})Y_w + (p'_{33}y' - p'_{23})Z_w = p'_{24} - p'_{34}y' \end{cases}$$

$$A_{xy}M = b$$

$$A_{xy} = \begin{bmatrix} (p_{31}x - p_{11}) & (p_{32}x - p_{12}) & (p_{33}x - p_{13}) \\ (p_{31}y - p_{21}) & (p_{32}y - p_{22}) & (p_{33}y - p_{23}) \\ (p'_{31}x' - p'_{11}) & (p'_{32}x' - p'_{12}) & (p'_{33}x' - p'_{13}) \\ (p'_{31}y' - p'_{21}) & (p'_{32}y' - p'_{22}) & (p'_{33}y' - p'_{23}) \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} p_{14} - p_{34}x \\ p_{24} - p_{34}y \\ p'_{14} - p'_{34}x' \\ p'_{24} - p'_{34}y' \end{bmatrix}$$

- Estimación mínimos cuadrados (pseudo-inversa): $\min_M \left[(A_{xy}M - b)^2 \right]$

$$M = (A_{xy}^T A_{xy})^{-1} A_{xy}^T \cdot b$$