

VISIÓN 3D

Geometría Projectiva

*“An Introduction to Projective Geometry (for computer vision)” Stan Bircheld
Stanford University <http://robotics.stanford.edu/~birch/projective/>*

*“Projective Geometry for Image Analysis” Roger Mohr and Bill Triggs
INRIA (ISPRS, Vienna, July 1996) <https://hal.inria.fr/inria-00548361/PDF/Mohr-isprs96.pdf>*



Ingeniería de Sistemas y Automática

Universidad Miguel Hernández

Tabla de Contenidos

- **Introducción: ¿Qué es la Geometría Proyectiva?**
- Espacio Proyectivo P^n
- Recta Proyectiva P^1
- Plano Proyectivo P^2
- Espacio Proyectivo P^3

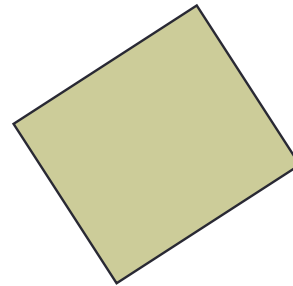
Qué es la Geometría Proyectiva

- **Geometría Euclídea:** Invarianza de longitudes y áreas. Se define el círculo. Transformaciones: rotación, traslación. Coordenadas cartesianas
- **Geometría Afín:** Invarianza del paralelismo, relación de distancias. Se define el paralelogramo, las parábolas, elipses e hipérbolas. Coordenadas cartesianas oblicuas.
- **Geometría Proyectiva:** Invarianza de la relación doble o “*cross-ratio*”. Se define la cónica, cuádricas. Coordenadas proyectivas u homogéneas

Qué es la Geometría Proyectiva

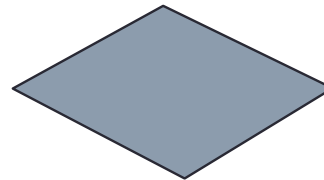
Transformación

Euclídea



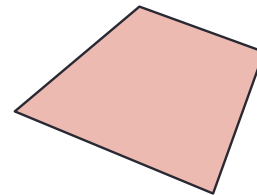
$$AD = cte$$

Afín



$$\frac{AB}{AD} = cte$$

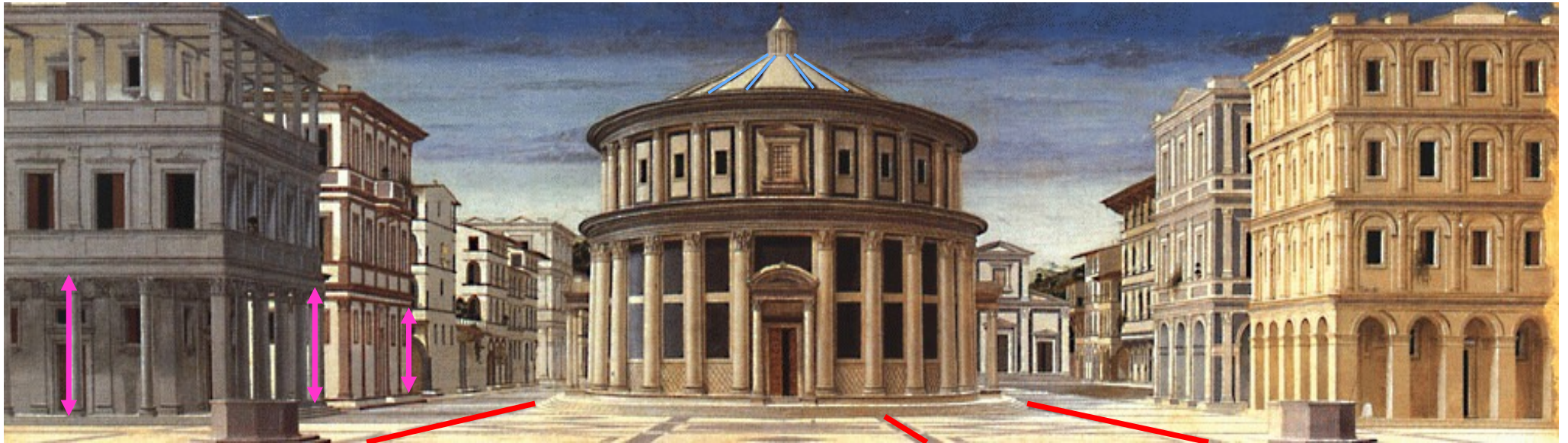
Proyectiva



$$\frac{AC/AD}{BC/BD} = cte$$



Geometría Projectiva



- No conserva la distancias
- No conserva las rectas paralelas
- No conserva los ángulos

Geometría Proyectiva

- Qué aporta la Geometría Proyectiva a la Visión Artificial
 - El proceso de proyección central (modelo pin-hole) es básicamente proyectivo: no es ni Euclídeo (no conserva las distancias) ni Afín (no conserva la noción de paralelismo)
 - El reconocimiento de formas del ser humano se basa en parte también en características proyectivas invariantes.
 - Suministra un modelo lineal (si no hay distorsiones) del proceso de captación de imágenes.
 - Permite estructurar la información según su robustez.
 - Homogenización de elementos. Dualidad entre puntos y rectas en un plano
 - Transformación entre planos proyectivos
 - Correlación entre puntos y rectas cuando se manejan distintos planos proyectivos

Qué es la Geometría Proyectiva

	Euclídeo	Similaridad	Afín	Proyectivo
Transformaciones:				
Rotación, traslación	X	X	X	X
Escalado isotrópico		X	X	X
Escalado en ejes			X	X
Transformaciones perspectiva				X
Invariantes:				
Distancia	X			
Ángulos, ratios de distancias	X	X		
Paralelismo, centro de masa	X	X	X	
Incidencia, cross-ratio	X	X	X	X

Tabla de Contenidos

- Introducción: ¿Qué es la Geometría Proyectiva?
- **Espacio Proyectivo P^n**
- Recta Proyectiva P^1
- Plano Proyectivo P^2
- Espacio Proyectivo P^3

Coordenadas Homogéneas (*Proyectivas*)

- Espacio Euclídeo R^n : $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in R^n$
- Espacio Proyectivo P^n $\tilde{x} = [x_1, \dots, x_n, 1]^T \in P^n$
- En coordenadas homogéneas un punto está definido con un factor de escala:
 $\tilde{x} \cong \tilde{y}$ si existe $\lambda \neq 0$ tal que $x_i = \lambda y_i$

$$\tilde{x} \in P^n \quad \text{si} \quad \tilde{x} = [x_1, \dots, x_{n+1}]^T \quad \text{con algún} \quad x_i \neq 0$$

- Subespacio Afín:

$$\tilde{x} = [x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]^T \Rightarrow x = \left[\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}} \right]^T \quad x_{n+1} \neq 0$$

$$\tilde{x} = [x_1, \dots, x_n, 0]^T$$

Punto en el infinito

$$\tilde{x} = [0, \dots, 0]^T$$

No existe

Espacio Proyectivo P^n

- Colineación:
 - Transformación proyectiva entre objetos (del mismo tipo) en el espacio proyectivo
 - Se representa mediante matrices

$$\tilde{A}_{(n+1) \times (n+1)} \quad (\text{normalmente invertible})$$

$$\rho \tilde{y} = \tilde{A} \tilde{x}$$

Conjunto de las matrices $\tilde{A} \Rightarrow$ Grupo Proyectivo

Espacio Proyectivo P^n

- Base Proyectiva:
 - Conjunto de $(n+2)$ puntos tal que $(n+1)$ sean linealmente independientes
 - Por ejemplo:

$$\tilde{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots \quad \tilde{e}_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{e}_{n+2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si se tiene $\tilde{x}_1 \dots \tilde{x}_{n+2}$ puntos tal que hay $(n + 1)$ l.i.

Existe una matriz $\tilde{A}$ tal que $\tilde{A} \tilde{e}_1 = \lambda_i \tilde{x}_i \quad i=1, \dots, n + 2$

Tabla de Contenidos

- Introducción: ¿Qué es la Geometría Proyectiva?
- Espacio Proyectivo P^n
- Recta Proyectiva P^1
- Plano Proyectivo P^2
- Espacio Proyectivo P^3

Recta Proyectiva P^1

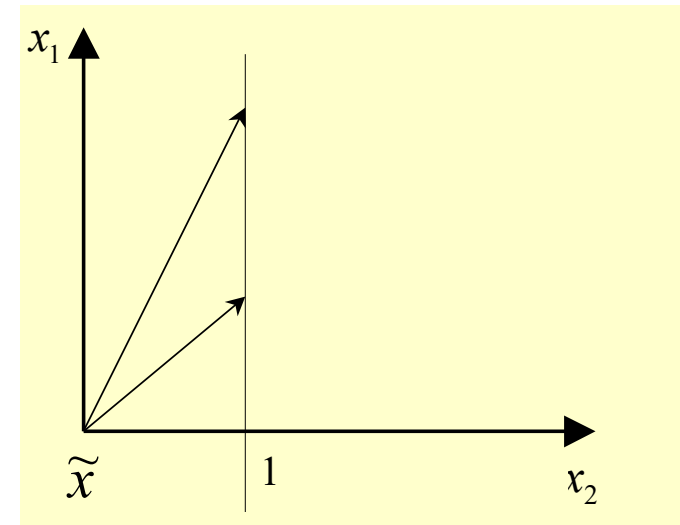
- Punto perteneciente a la recta proyectiva:

$$\tilde{x} \in P^1 \Rightarrow \tilde{x} \cong [x_1, x_2]^T$$

- Si $x_2 \neq 0$ se puede poner como:

$$\tilde{x} \cong x_2 \left[\frac{x_1}{x_2}, 1 \right]^T$$

- Si se representa $X_1 = \frac{x_1}{x_2} = \alpha$
 - X_1 es la coordenada de la recta afín
 - α es el parámetro proyectivo



- De esta forma cada punto representa una dirección
- Faltaría por considerar el punto $[x_1, 0]^T$ que no pertenece a la recta afín. Es el punto en el infinito

Recta Proyectiva P^1

- Cross-Ratio (razón doble de cuatro puntos):

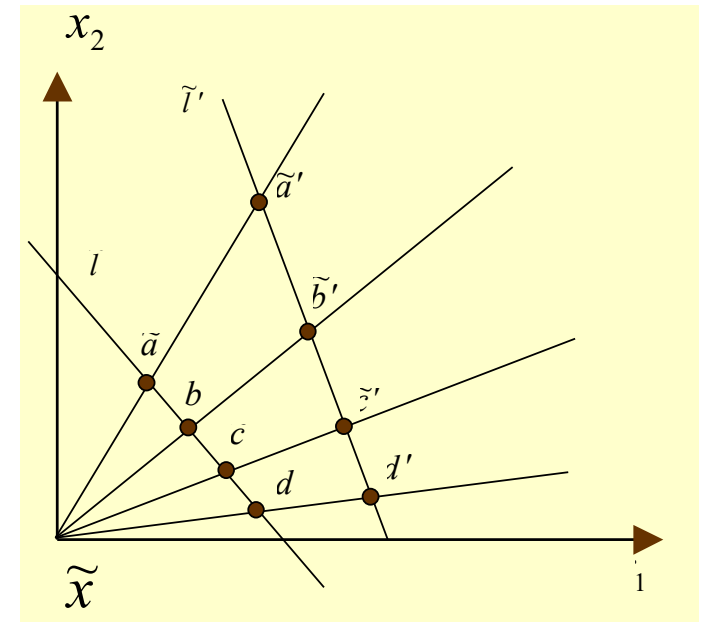
$$C_r\{ \tilde{a}, \tilde{b}; \tilde{c}, \tilde{d} \}$$

Si se denomina por $\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c, \alpha_d$ los parametros proyectivos de cada punto:

$$C_r\{ \tilde{a}, \tilde{b}; \tilde{c}, \tilde{d} \} = \frac{\alpha_a - \alpha_c}{\alpha_a - \alpha_d} : \frac{\alpha_b - \alpha_c}{\alpha_b - \alpha_d}$$

Es invariante ante cualquier colinealidad

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} r & s \\ u & v \end{bmatrix}$$



Recta Proyectiva P^1

- El “Cross-Ratio” o razón doble de cuatro puntos depende del orden en que se tomen los puntos:

$$C_r\{ \tilde{a}, \tilde{b}; \tilde{c}, \tilde{d} \} = \frac{\alpha_a - \alpha_c}{\alpha_a - \alpha_d} : \frac{\alpha_b - \alpha_c}{\alpha_b - \alpha_d} = \tau$$

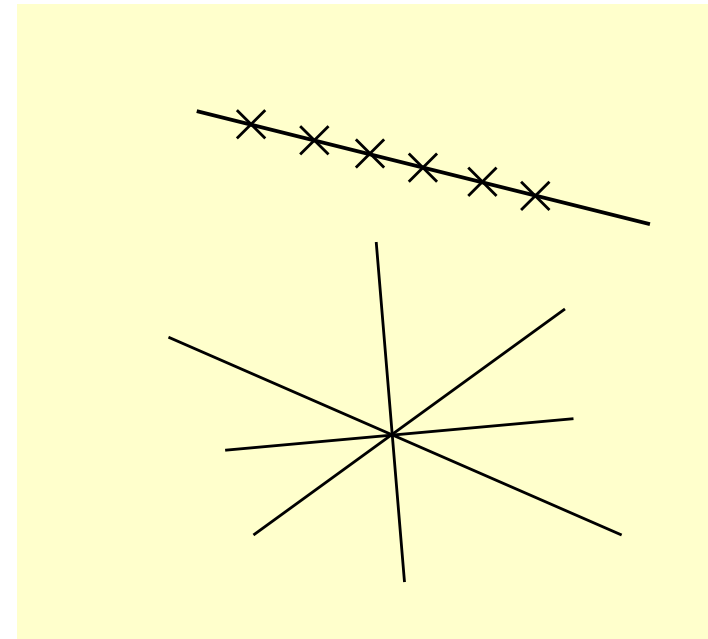
Se pueden obtener: τ , $\frac{1}{\tau}$, $1 - \tau$, $\frac{1}{1 - \tau}$, $\frac{\tau - 1}{\tau}$, $\frac{\tau}{\tau - 1}$

Tabla de Contenidos

- Introducción: ¿Qué es la Geometría Proyectiva?
- Espacio Proyectivo P^n
- Recta Proyectiva P^1
- Plano Proyectivo P^2
- Espacio Proyectivo P^3

Plano Proyectivo P^2

- Punto: $\tilde{x} \in P^2 \Rightarrow \tilde{x} \cong [x_1, x_2, x_3]^T$
- Recta: $\tilde{l} \in P^2 \Rightarrow \tilde{l} \cong [l_1, l_2, l_3]^T$
- Recta que pasa por un punto: $\tilde{l}^T \cdot \tilde{x} = 0$
- Dualidad entre puntos y rectas:
 - Conjunto de puntos que están en una recta
 - Conjunto de rectas que pasan por un punto

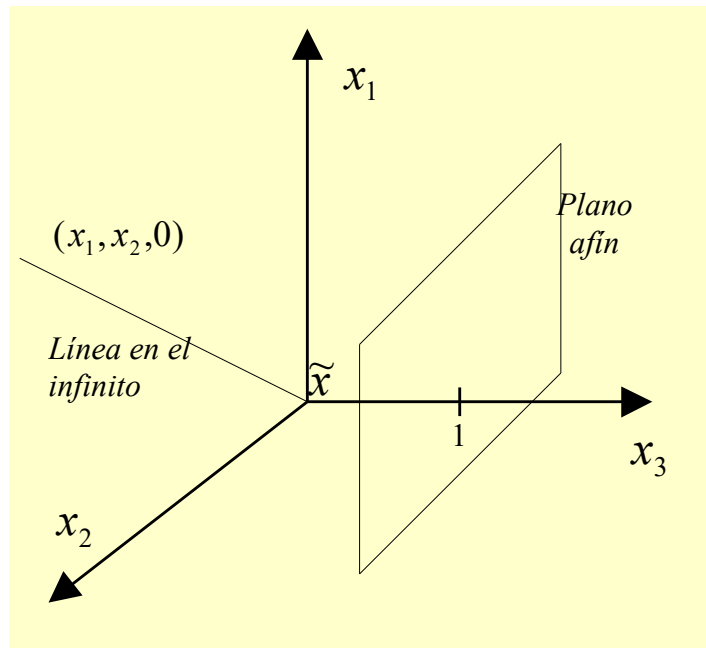


Plano Proyectivo P^2

- Plano Proyectivo P^2

$$\text{Si } x_3 \neq 0; \quad \tilde{x} \cong [x_1, x_2, x_3]^T \Rightarrow \tilde{x} \cong \left[\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1 \right]^T \cong [X_1, X_2, 1]^T$$

- Este conjunto de puntos define el plano Afín



Falta por considerar los puntos con $x_3=0$ que definen la recta del infinito.

Plano Projectivo P^2

- Plano Projectivo P^2

- Pertenencia de un punto a una recta en el plano projectivo:

$$\tilde{l}^T \cdot \tilde{x} = 0 \Rightarrow l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 = 0$$

- Pertenencia de un punto a una recta en el plano afín:

$$l_1 X_1 + l_2 X_2 + l_3 = 0$$

- Distancia punto a una recta:

$$dist(\tilde{x}, \tilde{l}) = \frac{\tilde{l}^T \cdot \tilde{x}}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} \quad \vec{n} \cong [l_1 \quad l_2] \quad \text{Normal a la recta}$$

- Punto que pertenece a la recta que pasa por los puntos $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$

$$\tilde{x} \cong \alpha \tilde{x}_1 + \beta \tilde{x}_2 \quad \text{ó} \quad \tilde{x} \cong \gamma \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$$

$$\text{línea} \rightarrow \tilde{l} \cong \tilde{x}_1 \wedge \tilde{x}_2 \Rightarrow \tilde{l}^T \cdot \tilde{x} = 0$$

Plano Proyectivo P^2

- Producto Vectorial:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} \quad [\tilde{x}]_{\wedge} = \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{x}_3 & \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 & 0 & -\tilde{x}_1 \\ -\tilde{x}_2 & \tilde{x}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

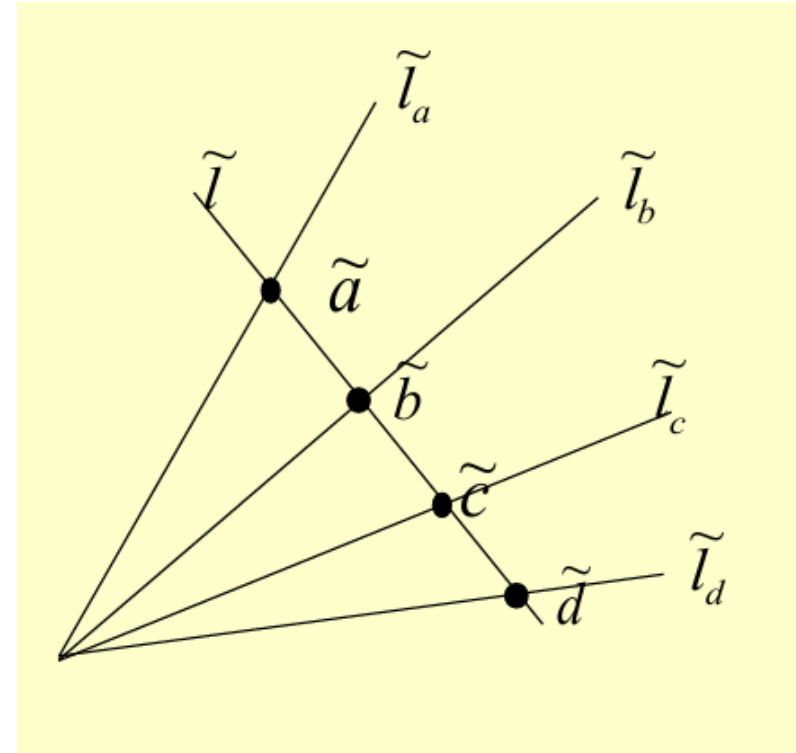
$$\tilde{l} \cong \tilde{x} \wedge \tilde{y} = [\tilde{x}]_{\wedge} \tilde{y}$$

Plano Proyectivo P^2

- 'Cross-Ratio' o razón doble de cuatro rectas que se cortan en un punto

$$Cr\{\tilde{l}_a, \tilde{l}_b; \tilde{l}_c, \tilde{l}_d\} = Cr\{\tilde{a}, \tilde{b}; \tilde{c}, \tilde{d}\}$$

Es independiente de la recta auxiliar $\tilde{l}$ que corte a las cuatro rectas



- Haz de rectas: rectas que pasan por un punto fijo. Es un elemento proyectivo de dimensión uno

$$\tilde{l} \cong \alpha \tilde{l}_1 + \beta \tilde{l}_2$$

Plano Proyectivo P^2

- Plano Proyectivo P^2

- Colineación en el plano proyectivo (Forma un grupo proyectivo):

$$\rho \tilde{y} = \tilde{A} \tilde{x} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Subgrupo Afín (Mantiene la recta en el infinito):

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{33}B_{2 \times 2} & a_{33}b_{2 \times 1} \\ 0_{1 \times 2} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Transformación de Similitud:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta \\ -\text{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + b_{2 \times 1}$$

rota (θ) Escala (c) Traslada (b)

- Transformación Euclídea: Transformación de Similitud con $c=1$

Plano Proyectivo P^2

- Correspondencia Homográfica u Homografía:

- Correspondencia uno a uno (lineal e invertible). Puede ser entre:

$$\tilde{m}' \cong \tilde{H}\tilde{m}$$

- Punto a punto
- Recta a recta
- Haz de rectas a haz de rectas

- Correlación:

- Transforma rectas en puntos y viceversa

$$\tilde{l} \cong \tilde{F}\tilde{x}$$

Plano Projectivo P^2

- Ángulo entre dos rectas: $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2$

- Se trazan dos rectas auxiliares:

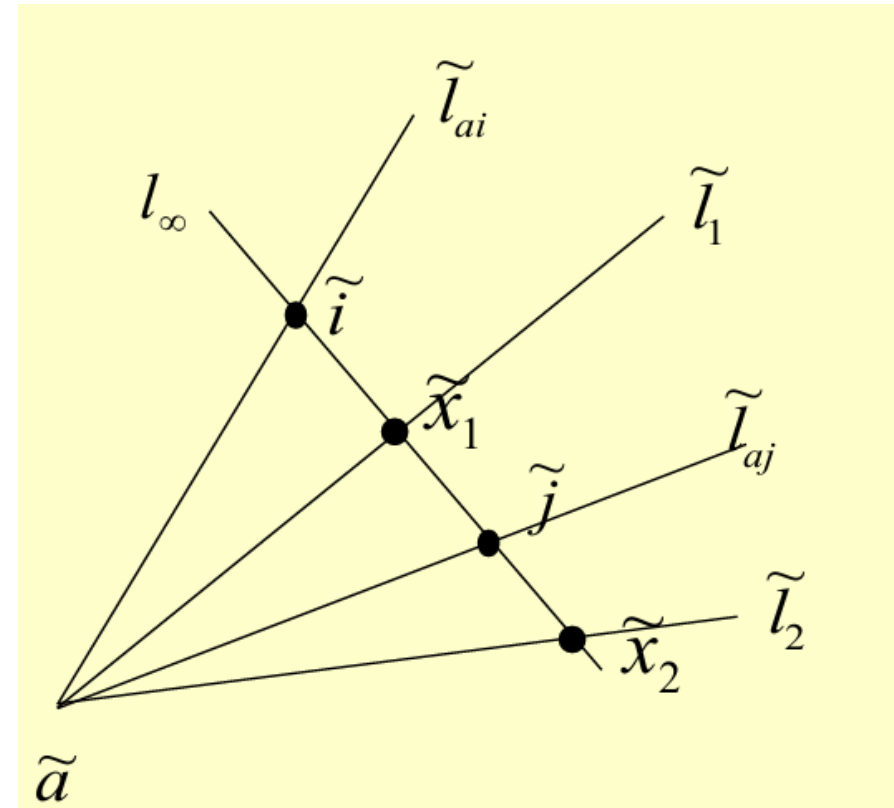
$\tilde{a}$ = punto de intersección
de las dos rectas

$\tilde{l}_{ai}$ = pasa por $\tilde{a}, \tilde{i}$

$\tilde{l}_{aj}$ = pasa por $\tilde{a}, \tilde{j}$

Se cumple:

$$\alpha = \frac{1}{2i} \log(Cr\{\tilde{l}_1, \tilde{l}_2; \tilde{l}_{ai}, \tilde{l}_{aj}\})$$



Puntos Absolutos (Circulares): Invariantes a transformaciones de similitud
Están en el plano del infinito

$$\tilde{i} = [1, +i, 0]^T$$

$$\tilde{j} = [1, -i, 0]^T$$

$$i = \sqrt{-1}$$

Plano Proyectivo P^2

- Cónicas: conjunto de puntos del plano proyectivo que cumplen:

$$S(\tilde{x}) = \sum_{i,j=1}^3 C_{ij} x_i x_j = 0 \quad ; \quad S(\tilde{x}) = \tilde{x}^T \tilde{C} \tilde{x} = 0 \quad \text{Matriz Simétrica}$$

- Intersección de una cónica con una recta:

$$\tilde{x} \cong \tilde{x}_1 + \theta \tilde{x}_2$$

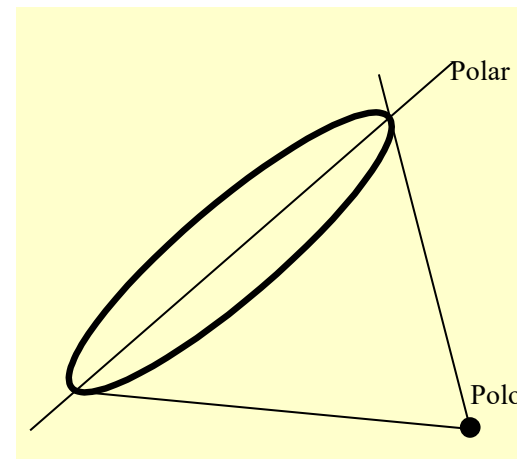
$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{21} \\ C_{13} & C_{21} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$S(\tilde{x}_1) + 2\theta S(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + \theta^2 S(\tilde{x}_2) = 0$$

- Tangente a una cónica: $S(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^2 - S(\tilde{x}_1)S(\tilde{x}_2) = 0$

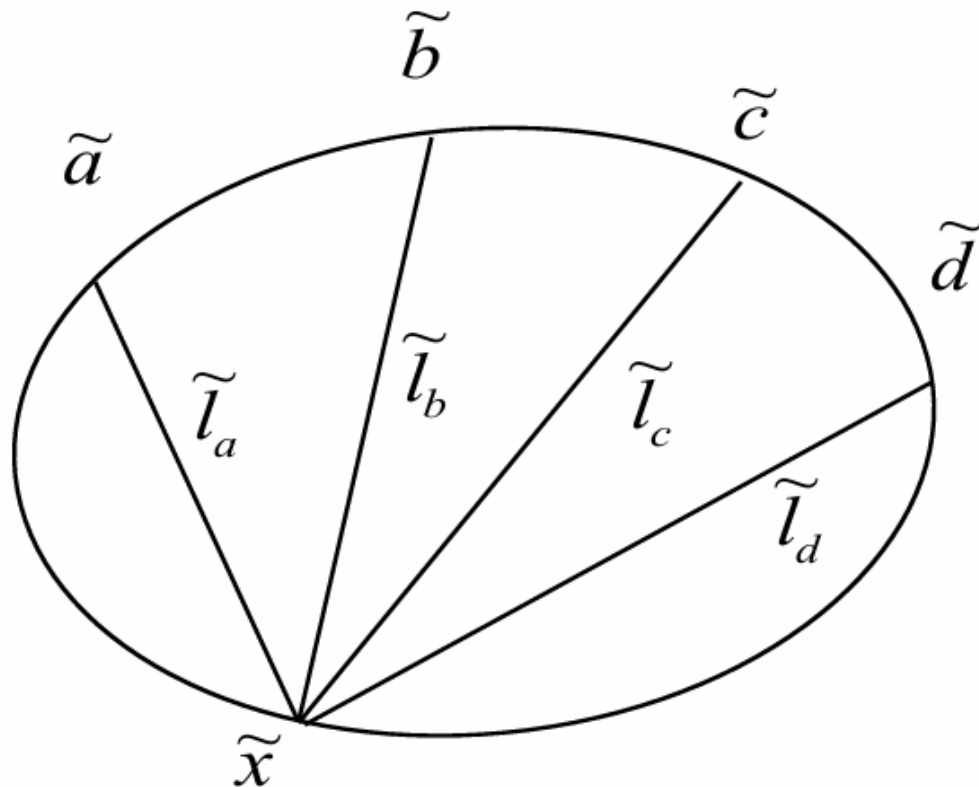
Se cumple:

$$\tilde{l}_{polar} \cong \tilde{C} \tilde{P}_{polo}$$



Plano Proyectivo P^2

- La matriz de la cónica posee seis variables, aunque sólo cinco grados de libertad (factor de escala). La cónica estará definida por cinco puntos.
- Definidos cuatro puntos de una cónica, cualquier otro punto de la cónica cumple:



$$\forall \tilde{x} \quad \text{tal que } s(\tilde{x}) = 0$$

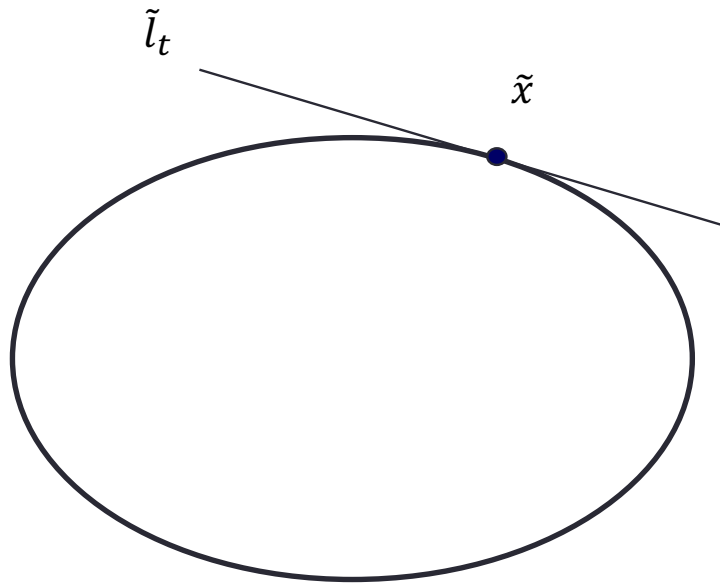
$$Cr\{\tilde{l}_a, \tilde{l}_b; \tilde{l}_c, \tilde{l}_d\} = cte$$

Plano Proyectivo P^2

- El objeto dual de la cónica es la envolvente a la cónica: conjunto de tangentes a todos los puntos de la cónica.

Se cumple:

$$s(\tilde{x}) = \tilde{x}^T \tilde{C} \tilde{x} \quad ; \quad \tilde{l}_t = \tilde{C} \tilde{x}$$



Si la cónica es no degenerada:

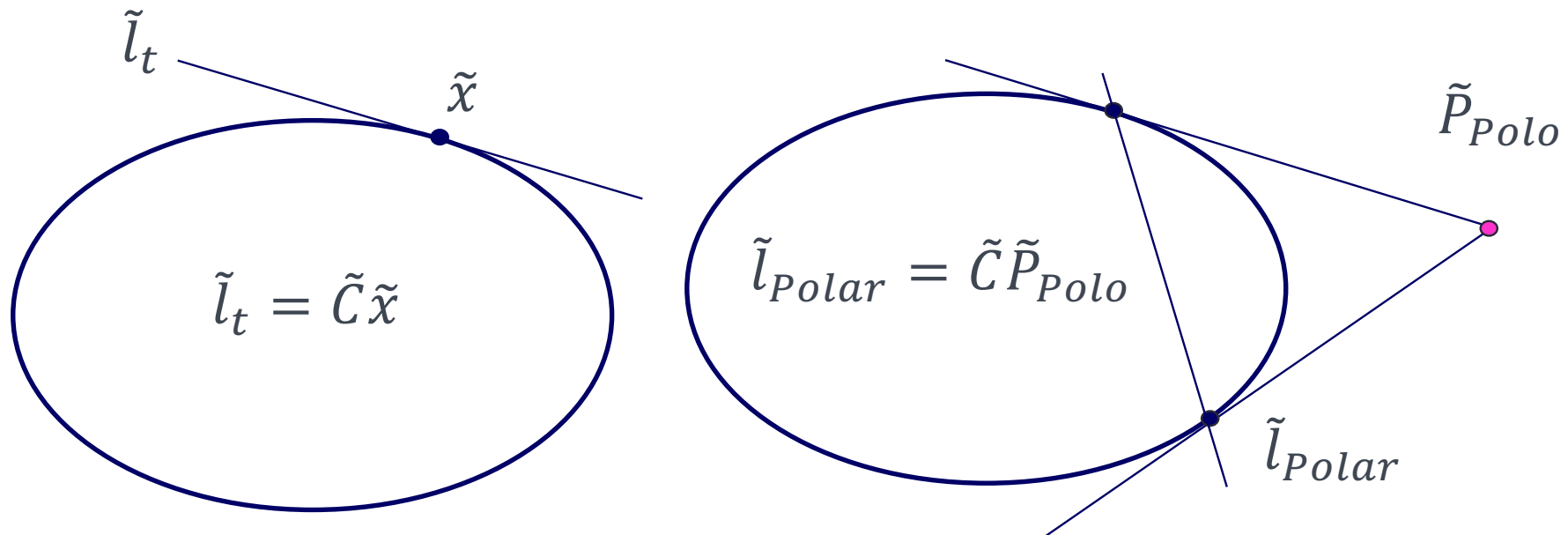
$$\tilde{x} = \tilde{C}^{-1} \tilde{l}_t$$

Sustituyendo:

$$s(\tilde{x}) = \tilde{l}_t^T \tilde{C}^{-T} \tilde{C} \tilde{C}^{-1} \tilde{l}_t = \tilde{l}_t^T \tilde{C}^{-T} \tilde{l}_t = s(\tilde{l}_t)$$

Plano Proyectivo P^2

- La cónica define una correlación entre puntos del plano y rectas polares:



- La cónica define una correlación entre sus puntos y sus tangentes:

Plano Proyectivo P^2

- Una transformación proyectiva convierte una cónica en otra:

$$s(\tilde{x}) = \tilde{x}^T \tilde{C} \tilde{x} \quad \text{Si} \quad \tilde{y} = \tilde{T} \tilde{x} \quad ; \quad \tilde{x} = \tilde{T}^{-1} \tilde{y}$$

$$s(\tilde{y}) = \tilde{y}^T \tilde{T}^{-T} \tilde{C} \tilde{T} \tilde{y} = \tilde{y}^T \tilde{C}' \tilde{y}$$

- Al ser la matriz simétrica, mediante una transformación proyectiva la matriz se puede diagonalizar.

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Plano Proyectivo P^2

- Si la cónica posee puntos reales, la matriz se puede expresar como:

$$C = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 \end{bmatrix}$$

- Mediante otra transformación se puede obtener

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Cualquier cónica puede ser transformada proyectivamente en un círculo

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

Plano Proyectivo P^2

- Transformando tres puntos de la cónica a los puntos de referencia (base)

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Con lo que la ecuación de la cónica será:

$$\begin{cases} x_2^2 - x_1 x_3 = 0 & \Rightarrow x_2^2 = x_1 x_3 \\ \text{Si } x_3 \neq 0 & \Rightarrow \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2 = \frac{x_1}{x_3} = \theta^2 \end{cases}$$
- Las coordenadas de la cónica se pueden expresar como:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \tilde{T} \begin{bmatrix} \theta^2 \\ \theta \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tabla de Contenidos

- Introducción: ¿Qué es la Geometría Proyectiva?
- Espacio Proyectivo P^n
- Recta Proyectiva P^1
- Plano Proyectivo P^2
- **Espacio Proyectivo P^3**

Espacio Proyectivo P^3

- Un punto: $\tilde{x} \in P^3 \Rightarrow \tilde{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$
- Un plano: $\tilde{u} \in P^3 \Rightarrow \tilde{u} = [u_1, u_2, u_3, u_4]^T$

- Plano que pasa por un punto:

$$\tilde{u}^T \cdot \tilde{x} = 0$$

$$\tilde{u}^T \cdot \tilde{x} = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$$

- Dualidad entre planos y puntos:
 - Conjunto de puntos que están en un plano
 - Conjunto de planos que pasan por un punto

Espacio Proyectivo P^3

- Subespacio Afín:

$$\text{si } x_4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{x} = \left[\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}, 1 \right]^T = [X_1, X_2, X_3, 1]^T$$

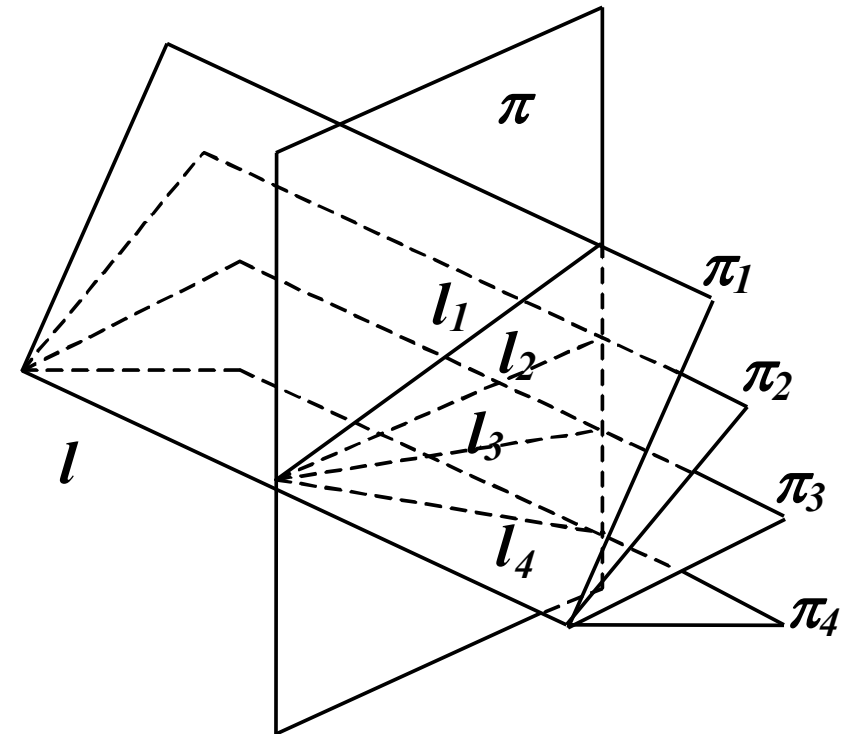
- Plano en el infinito: $\tilde{\Pi}_\infty$

$$\tilde{x} \in \tilde{\Pi}_\infty \quad \Rightarrow \quad \tilde{x} = [x_1, x_2, x_3, 0]^T$$

Espacio Proyectivo P^3

- 'Cross-Ratio' de cuatro planos:

$$\begin{aligned} Cr\{ \tilde{\Pi}_1, \tilde{\Pi}_2 ; \tilde{\Pi}_3, \tilde{\Pi}_4 \} &= \\ &= Cr\{ \tilde{l}_1, \tilde{l}_2 ; \tilde{l}_3, \tilde{l}_4 \} = \\ &= Cr\{ \tilde{P}_1, \tilde{P}_2 ; \tilde{P}_3, \tilde{P}_4 \} \end{aligned}$$



- Haz de planos
 - Conjunto de planos que intersectan en una recta
 - Esta estructura proyectiva tiene dimensión 1

Espacio Proyectivo P^3

- Colinealidad en P^3 . Grupo proyectivo

$$\rho \tilde{y} = \tilde{A} \tilde{x} \quad \text{con} \quad \tilde{A}_{4 \times 4} \quad \text{invertible}$$

- Transformación Afín: subgrupo afín

$$\rho \tilde{y} = \begin{pmatrix} B_{3 \times 3} & b_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{pmatrix} \tilde{x} \quad \Rightarrow \quad Y = B_{3 \times 3}X + b_{3 \times 1}$$

- Cualquier punto que pertenece al espacio afín permanece en él al sufrir una transformación afín.
- Cualquier punto que pertenece al plano del infinito Π_∞ permanece en él al sufrir una transformación afín

Espacio Proyectivo P^3

- Transformación Afín: subgrupo afín

$$\rho \tilde{y} = \begin{pmatrix} B_{3 \times 3} & b_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{pmatrix} \tilde{x} \quad \Rightarrow \quad Y = B_{3 \times 3}X + b_{3 \times 1}$$

- Transformación de Similitud:

$$B_{3 \times 3} \text{ es ortogonal} \quad B_{3 \times 3} B_{3 \times 3}^T = \lambda^2 I$$

- Transformación Eucídea:

$$B_{3 \times 3} \text{ es ortogonal con } \lambda^2 = 1$$

Espacio Proyectivo P^3

- Cuádrica, superficie (extensión de la cónica en un espacio 3D):

Conjunto de puntos $\tilde{x} \in P^3$ que cumplen:

$$S(\tilde{x}) = \sum_{i,j=1}^4 c_{ij} x_i x_j = 0 \quad \Rightarrow \quad S(\tilde{x}) = \tilde{x}^T \tilde{C} \tilde{x} = 0$$

- Curva Alabeada Cúbica (Twisted cubic)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \tilde{T} \begin{bmatrix} \theta^3 \\ \theta^2 \\ \theta \\ 1 \end{bmatrix}$$

Espacio Proyectivo P^3

- **Cónica Absoluta:** $\tilde{\Omega}_\infty$ (plano del infinito Π_∞)

$$\sum_{i=1}^4 x_i^2 = 0 = x_4 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tilde{x}^T \tilde{x} = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \tilde{\Omega}_\infty \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

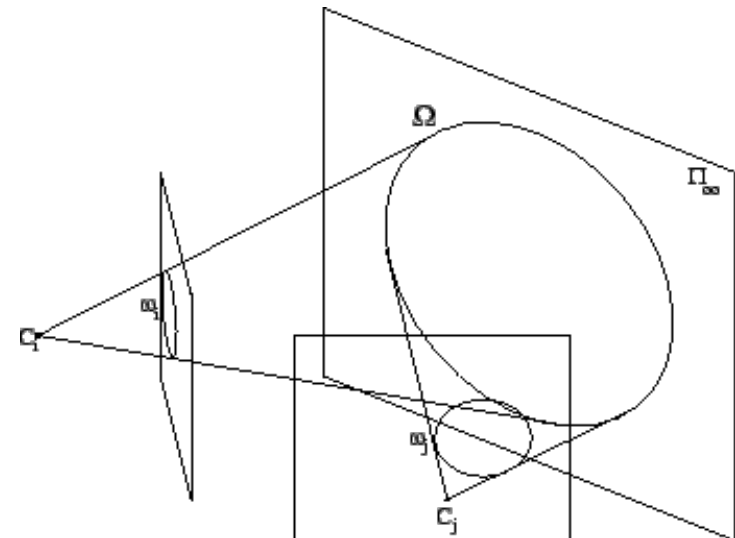
Puntos Absolutos (Circulares): Pertenecen a la cónica absoluta

$$\tilde{i} = [1, +i, 0]^T \quad \tilde{j} = [1, -i, 0]^T \quad i = \sqrt{-1}$$

- La cónica absoluta es invariante ante cualquier transformación Euclídea:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} B_{3 \times 3} & b_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \tilde{x}^T \cdot \tilde{x} = \tilde{y}^T B_{3 \times 3}^T B_{3 \times 3} \tilde{y} = \\ = \lambda^2 \tilde{y}^T I \tilde{y} = \lambda^2 \tilde{y}^T \tilde{y} = 0 \end{cases}$$



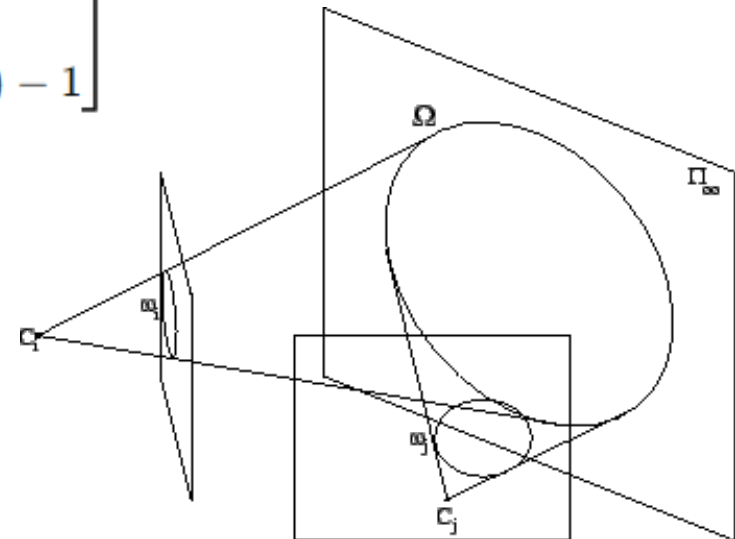
Espacio Proyectivo P^3

- Cónica Métrica: $\tilde{\omega}$
 - Es la proyección de la Cónica Absoluta en una cámara.
 - Depende solo de los parámetros intrínsecos de la cámara A
 - La cónica absoluta es invariante ante cualquier transformación Euclídea (R, t) :

$$\tilde{\omega} \cong A^{-T} A^{-1} \quad \tilde{\omega} \cong H_{\infty}^{-T} \tilde{\Omega}_{\infty} H_{\infty}^{-1} = H_{\infty}^{-T} H_{\infty}^{-1}$$

$$\omega = \begin{bmatrix} 1/f_x^2 & 0 & -c_x/f_x^2 \\ 0 & 1/f_y^2 & -c_y/f_y^2 \\ -c_x/f_x^2 & -c_y/f_y^2 & (c_x^2/f_x^2 + c_y^2/f_y^2) - 1 \end{bmatrix}$$

- Aplicaciones:
 - Medir distancias métricas
 - Medir ángulos
 - Ortogonalidad entre líneas



Espacio Proyectivo P^3

- Cónica Métrica: $\tilde{\omega}$

- Medir distancias métricas:

$$\text{dist}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \sqrt{\Delta \tilde{x}^T \tilde{\omega} \Delta \tilde{x}}$$
$$\Delta \tilde{x} = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2$$

- Medir ángulos:

$$\cos(\theta) = \frac{l_1^T \tilde{\omega} l_2}{\sqrt{(l_1^T \tilde{\omega} l_1)(l_2^T \tilde{\omega} l_2)}}$$

- Ortogonalidad entre líneas:

- Permite calibrar la cónica métrica

$$l_1^T \tilde{\omega} l_2 = 0$$

- Paralelismo entre líneas (puntos de desvanecimiento):

$$l_1^T H_{\infty} l_2 = 0$$

Tabla de Contenidos

- Introducción: ¿Qué es la Geometría Proyectiva?
- Espacio Proyectivo P^n
- Recta Proyectiva P^1
- Plano Proyectivo P^2
- Espacio Proyectivo P^3