

VISIÓN 3D

Calibración

DLT

Tsai



Ingeniería de Sistemas y Automática

Universidad Miguel Hernández

Método de Transformación Lineal Directa

- Transformación Lineal Directa (DLT)
 - Se realiza una calibración en dos pasos.
 - En primer lugar se calculan los elementos de la Matriz de Proyección
 - Sin imponer las restricciones físicas
 - A partir de ella se obtienen los parámetros intrínsecos y extrínsecos
 - Imponiendo restricciones físicas de la matriz P
 - Calcula los parámetros intrínsecos y extrínsecos a excepción de la distorsión.
 - Cálculo de la distorsión (si se modela) a posteriori
 - Cálculo de otros errores sistemáticos.

$$\begin{bmatrix} n & x_f \\ n & y_f \\ n & \end{bmatrix} = \tilde{P} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{p}_1 & p_{14} \\ \bar{p}_2 & p_{24} \\ \bar{p}_3 & p_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

Método de Transformación Lineal Directa

- Cálculo de la Matriz de Proyección sin considerar las restricciones: solución no homogénea

$$\frac{1}{p_{34}} \tilde{P} = \begin{bmatrix} p_{11}/p_{34} & p_{12}/p_{34} & p_{13}/p_{34} & p_{14}/p_{34} \\ p_{21}/p_{34} & p_{22}/p_{34} & p_{23}/p_{34} & p_{24}/p_{34} \\ p_{31}/p_{34} & p_{31}/p_{34} & p_{31}/p_{34} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{L} = \frac{1}{p_{34}} \tilde{P} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \\ L_5 & L_6 & L_7 & L_8 \\ L_9 & L_{10} & L_{11} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n & x_f \\ n & y_f \\ n & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fK_x \bar{\mathbf{r}}_1 + C_x \bar{\mathbf{r}}_3 & fK_x t_x + C_x t_z \\ fK_y \bar{\mathbf{r}}_2 + C_y \bar{\mathbf{r}}_3 & fK_y t_y + C_y t_z \\ \bar{\mathbf{r}}_3 & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$t_z = p_{34}$$

$$x_f = \frac{X_w L_1 + Y_w L_2 + Z_w L_3 + L_4}{X_w L_9 + Y_w L_{10} + Z_w L_{11} + 1}$$

$$y_f = \frac{X_w L_5 + Y_w L_6 + Z_w L_7 + L_8}{X_w L_9 + Y_w L_{10} + Z_w L_{11} + 1}$$

$$x_f \cdot X_w L_9 + x_f \cdot Y_w L_{10} + x_f \cdot Z_w L_{11} + x_f = X_w L_1 + Y_w L_2 + Z_w L_3 + L_4$$

$$y_f \cdot X_w L_9 + y_f \cdot Y_w L_{10} + y_f \cdot Z_w L_{11} + y_f = X_w L_5 + Y_w L_6 + Z_w L_7 + L_8$$

Método de Transformación Lineal Directa

- Cálculo de la Matriz de Proyección sin considerar las restricciones.
- Con n puntos (conocidos $X_w^i, Y_w^i, Z_w^i, x_f^i, y_f^i$) se obtiene un sistema con 11 incógnitas y $2n$ ecuaciones
- Solución mínimos cuadrados:

$$X_w L_1 + Y_w L_2 + Z_w L_3 + L_4 - x_f \cdot X_w L_9 - x_f \cdot Y_w L_{10} - x_f \cdot Z_w L_{11} = x_f$$

$$X_w L_5 + Y_w L_6 + Z_w L_7 + L_8 - y_f \cdot X_w L_9 - y_f \cdot Y_w L_{10} - y_f \cdot Z_w L_{11} = y_f$$

$$\begin{pmatrix} X_w^i & Y_w^i & Z_w^i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X_w^i x_f^i & -Y_w^i x_f^i & -Z_w^i x_f^i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_w^i & Y_w^i & Z_w^i & 1 & -X_w^i y_f^i & -Y_w^i y_f^i & -Z_w^i y_f^i \\ & & & & \cdot & & & & & & \\ & & & & \cdot & & & & & & \\ & & & & \cdot & & & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \\ L_6 \\ L_7 \\ L_8 \\ L_9 \\ L_{10} \\ L_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_f^i \\ y_f^i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

$$\text{Sistema } A_{xy} \mathbf{l} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{l} = (A_{xy}^T A_{xy})^{-1} A_{xy}^T \cdot \mathbf{b}$$

Método de Transformación Lineal Directa

- Restricciones de la matriz de proyección:

$$\begin{bmatrix} n & x_f \\ n & y_f \\ n & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fK_x \bar{\mathbf{r}}_1 + C_x \bar{\mathbf{r}}_3 & fK_x t_x + C_x t_z \\ fK_y \bar{\mathbf{r}}_2 + C_y \bar{\mathbf{r}}_3 & fK_y t_y + C_y t_z \\ \bar{\mathbf{r}}_3 & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n & x_f \\ n & y_f \\ n & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_1 & p_{14} \\ \bar{\mathbf{p}}_2 & p_{24} \\ \bar{\mathbf{p}}_3 & p_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

Restricciones:

$$\|\bar{\mathbf{p}}_3\| = 1$$

$$(\bar{\mathbf{p}}_1 \wedge \bar{\mathbf{p}}_3) \cdot (\bar{\mathbf{p}}_2 \wedge \bar{\mathbf{p}}_3) = 0$$

Método de Transformación Lineal Directa

- A partir de los parámetros **L** y considerando el significado físico de la matriz **P** se obtienen sus elementos.

$$\begin{bmatrix} n & x_f \\ n & y_f \\ n & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fK_x \bar{\mathbf{r}}_1 + C_x \bar{\mathbf{r}}_3 & fK_x t_x + C_x t_z \\ fK_y \bar{\mathbf{r}}_2 + C_y \bar{\mathbf{r}}_3 & fK_y t_y + C_y t_z \\ \bar{\mathbf{r}}_3 & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{p_{34}} \tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} p_{11}/p_{34} & p_{12}/p_{34} & p_{13}/p_{34} & p_{14}/p_{34} \\ p_{21}/p_{34} & p_{22}/p_{34} & p_{23}/p_{34} & p_{24}/p_{34} \\ p_{31}/p_{34} & p_{31}/p_{34} & p_{31}/p_{34} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{\mathbf{L}} = \frac{1}{p_{34}} \tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \\ L_5 & L_6 & L_7 & L_8 \\ L_9 & L_{10} & L_{11} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\|\bar{\mathbf{p}}_3\| = \|\bar{\mathbf{r}}_3\| = 1 \quad \Rightarrow \quad t_z = p_{34} = \frac{1}{\sqrt{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2}}$$

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{\sqrt{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2}} & \frac{L_2}{\sqrt{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2}} & \frac{L_3}{\sqrt{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2}} & \frac{L_4}{\sqrt{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2}} \\ \frac{L_5}{\sqrt{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2}} & \frac{L_6}{\sqrt{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2}} & \frac{L_7}{\sqrt{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2}} & \frac{L_8}{\sqrt{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2}} \\ \frac{L_9}{\sqrt{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2}} & \frac{L_{10}}{\sqrt{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2}} & \frac{L_{11}}{\sqrt{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2}} & 1 \end{bmatrix}$$

Método de Transformación Lineal Directa

- Cálculo de los parámetros intrínsecos y extrínsecos.

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} fK_x\bar{\mathbf{r}}_1 + C_x\bar{\mathbf{r}}_3 & fK_x t_x + C_x t_z \\ fK_y\bar{\mathbf{r}}_2 + C_y\bar{\mathbf{r}}_3 & fK_y t_y + C_y t_z \\ \bar{\mathbf{r}}_3 & t_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_1 & p_{14} \\ \bar{\mathbf{p}}_2 & p_{24} \\ \bar{\mathbf{p}}_3 & p_{34} \end{bmatrix}$$

- Cálculo inmediato de $\bar{\mathbf{r}}_3$ y de t_z
- Coordenadas del Punto Principal

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{p}}_1 \cdot \bar{\mathbf{p}}_3^T &= (fK_x\bar{\mathbf{r}}_1 + C_x\bar{\mathbf{r}}_3) \cdot \bar{\mathbf{r}}_3^T = fK_x\bar{\mathbf{r}}_1 \cdot \bar{\mathbf{r}}_3^T + C_x\bar{\mathbf{r}}_3 \cdot \bar{\mathbf{r}}_3^T = C_x \\ \bar{\mathbf{p}}_2 \cdot \bar{\mathbf{p}}_3^T &= (fK_y\bar{\mathbf{r}}_2 + C_y\bar{\mathbf{r}}_3) \cdot \bar{\mathbf{r}}_3^T = fK_y\bar{\mathbf{r}}_2 \cdot \bar{\mathbf{r}}_3^T + C_y\bar{\mathbf{r}}_3 \cdot \bar{\mathbf{r}}_3^T = C_y \end{aligned}$$

Método de Transformación Lineal Directa

- Calculo de los parámetros intrínsecos y extrínsecos:
 - Calculo de las distancias focales en x e y.

$$(*) \quad \bar{\mathbf{p}}_1 \cdot \bar{\mathbf{p}}_1^T - [\bar{\mathbf{p}}_1 \cdot \bar{\mathbf{p}}_3^T]^2 = (fK_x\bar{r}_1 + C_x\bar{r}_3) \cdot (fK_x\bar{r}_1 + C_x\bar{r}_3)^T - [(fK_x\bar{r}_1 + C_x\bar{r}_3) \cdot \bar{r}_3^T]^2 =$$

$$fK_x\bar{r}_1 \cdot fK_x\bar{r}_1^T + C_x\bar{r}_3 \cdot fK_x\bar{r}_1^T + fK_x\bar{r}_1 \cdot C_x\bar{r}_3^T + C_x\bar{r}_3 \cdot C_x\bar{r}_3^T - [fK_x\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_3^T - C_x\bar{r}_3 \cdot \bar{r}_3^T]^2 =$$

$$= f^2K_x^2 + C_x^2 - C_x^2 = f^2K_x^2 = f_x^2 \quad \Rightarrow \quad f_x$$

$$(*) \quad \bar{\mathbf{p}}_2 \cdot \bar{\mathbf{p}}_2^T - [\bar{\mathbf{p}}_2 \cdot \bar{\mathbf{p}}_3^T]^2 = (fK_y\bar{r}_2 + C_y\bar{r}_3) \cdot (fK_y\bar{r}_2 + C_y\bar{r}_3)^T - [(fK_y\bar{r}_2 + C_y\bar{r}_3) \cdot \bar{r}_3^T]^2 =$$

$$fK_y\bar{r}_2 \cdot fK_y\bar{r}_2^T + C_y\bar{r}_3 \cdot fK_y\bar{r}_2^T + fK_y\bar{r}_2 \cdot C_y\bar{r}_3^T + C_y\bar{r}_3 \cdot C_y\bar{r}_3^T - [fK_y\bar{r}_2 \cdot \bar{r}_3^T - C_y\bar{r}_3 \cdot \bar{r}_3^T]^2 =$$

$$= f^2K_y^2 + C_y^2 - C_y^2 = f^2K_y^2 = f_y^2 \quad \Rightarrow \quad f_y$$

Método de Transformación Lineal Directa

- Calculo de los parámetros intrínsecos y extrínsecos.
 - Calculo de los parámetros extrínsecos restantes.

$$\bar{\mathbf{p}}_1 = fK_x \bar{\mathbf{r}}_1 + C_x \bar{\mathbf{r}}_3 \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{r}}_1 = \frac{\bar{\mathbf{p}}_1 - C_x \bar{\mathbf{r}}_3}{fK_x}$$

$$\bar{\mathbf{p}}_2 = fK_y \bar{\mathbf{r}}_2 + C_y \bar{\mathbf{r}}_3 \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{r}}_2 = \frac{\bar{\mathbf{p}}_2 - C_y \bar{\mathbf{r}}_3}{fK_y}$$

$$p_{14} = fK_x t_x + C_x t_z \quad \Rightarrow \quad t_x = \frac{p_{14} - C_x t_z}{fK_x}$$

$$p_{24} = fK_y t_y + C_y t_z \quad \Rightarrow \quad t_y = \frac{p_{24} - C_y t_z}{fK_y}$$

Método de Transformación Lineal Directa

- **Calculo de la Distorsión**

- Un modelo mas completo al utilizado hasta el momento es el siguiente, despreciando todos los errores salvo la distorsión.

$$x_f - D_x = \frac{p_{11}X_w + p_{12}Y_w + p_{13}Z_w + p_{14}}{p_{31}X_w + p_{32}Y_w + p_{33}Z_w + p_{34}}$$

$$y_f - D_Y = \frac{p_{21}X_w + p_{22}Y_w + p_{23}Z_w + p_{24}}{p_{31}X_w + p_{32}Y_w + p_{33}Z_w + p_{34}}$$

$$x_f - x_{f \text{ sin distorsion}} = D_X = k_0 + k_1x_f + k_2y_f + k_3x_f^2 + k_4x_fy_f + k_5y_f^2 + k_6x_f^2y_f + k_7x_fy_f^2$$

$$y_f - y_{f \text{ sin distorsion}} = D_Y = q_0 + q_1y_f + q_2x_f + q_3y_f^2 + q_4x_fy_f + q_5x_f^2 + q_6y_f^2X_f + q_7y_fx_f^2$$

- Es conveniente calcular en pasos distintos los parámetros intrínsecos y extrínsecos, los coeficientes de distorsión y los coeficientes de otros errores sistemáticos para evitar inestabilidades.
- Distorsión: Algoritmo de Optimización NO Lineal (minimiza el error de reproyección)

Restricción de Alineamiento Radial (RAC)

- Restricción de Alineamiento Radial (RAC). **Método de Tsai**
 - Emplea un modelo de distorsión que solamente tiene en cuenta la distorsión radial.

$$\begin{aligned}x_u &= x_d(k_1 r^2 + k_2 r^4 + \dots) \\y_u &= y_d(k_1 r^2 + k_2 r^4 + \dots)\end{aligned}$$

Al existir solamente distorsión Radial se obtiene

$$\frac{x_d}{y_d} = \frac{x_u}{y_u} = \frac{r_{11}x_w + r_{12}y_w + r_{13}z_w + t_x}{r_{21}x_w + r_{22}y_w + r_{23}z_w + t_y}$$

Restricción de Alineamiento Radial (RAC)

- Procedimiento:
 - Se supone conocido C_x, C_y, K_y
- Determinación de $|R|, t_x, t_y$
 - Cálculo de coordenadas centrales con distorsión
 - Cálculo de incógnitas intermedias (a_j)
 - Cálculo de $|t_y|$
 - Determinación del signo de t_y
 - Cálculo de S_x
 - Cálculo de $|R|, t_x$
- Determinación de f, t_z, k_1
 - Aproximación inicial de f, t_z
 - Cálculo iterativo de f, t_z, k_1

Restricción de Alineamiento Radial (RAC)

- Cálculo de coordenadas centrales con distorsión

A partir de los puntos: (x_f^i, y_f^i)

$$\text{Se obtiene } \begin{cases} \hat{x}_d^i = (x_f^i - C_x) = K_x x_d^i \\ \hat{y}_d^i = (y_f^i - C_y) = K_y y_d^i \end{cases}$$

Si se forma el cociente:

$$\frac{\hat{x}_d^i}{\hat{y}_d^i} = \frac{K_x x_d^i}{K_y y_d^i} = S_x \frac{x_u^i}{y_u^i}$$

$$\text{con } S_x = \frac{K_x}{K_y}$$

Restricción de Alineamiento Radial (RAC)

- Cálculo de incógnitas intermedias (a_j)

Sustituyendo en el cociente

$$\frac{\hat{x}_d^i}{\hat{y}_d^i} = S_x \frac{x_u^i}{y_u^i} = S_x \frac{r_{11}x_w^i + r_{12}y_w^i + r_{13}z_w^i + t_x}{r_{21}x_w^i + r_{22}y_w^i + r_{23}z_w^i + t_y}$$

Si $t_y \neq 0$

$$\underbrace{\hat{x}_d^i + t_y^{-1}r_{21}x_w^i\hat{x}_d^i}_{a_4} + \underbrace{t_y^{-1}r_{22}y_w^i\hat{x}_d^i}_{a_5} + \underbrace{t_y^{-1}r_{23}z_w^i\hat{x}_d^i}_{a_6} =$$

$$\underbrace{t_y^{-1}S_xr_{11}x_w^i\hat{y}_d^i}_{a_1} + \underbrace{t_y^{-1}S_xr_{12}y_w^i\hat{y}_d^i}_{a_2} + \underbrace{t_y^{-1}S_xr_{13}z_w^i\hat{y}_d^i}_{a_3} + \underbrace{t_y^{-1}S_xt_x\hat{y}_d^i}_{a_7}$$

Restricción de Alineamiento Radial (RAC)

- Cálculo de incógnitas intermedias (a_j)

Se obtiene un sistema con n ecuaciones y 7 incógnitas:

$$\hat{x}_d^i = a_1 x_w^i \hat{y}_d^i + a_2 y_w^i \hat{y}_d^i + a_3 z_w^i \hat{y}_d^i - a_4 x_w^i \hat{x}_d^i - a_5 y_w^i \hat{x}_d^i - a_6 z_w^i \hat{x}_d^i + a_7 \hat{y}_d^i \hat{x}_d^i$$

- Cálculo de $|t_y|$

$$t_y = \frac{1}{\sqrt{a_4^2 + a_5^2 + a_6^2}}$$

- Determinación del signo de t_y

Para un punto cualquiera (alejado del centro de la imagen) se calcula su proyección sin distorsión, ensayando con el valor positivo y el valor negativo

Restricción de Alineamiento Radial (RAC)

- Cálculo de S_x

$$S_x = \sqrt{t_y^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}$$

- Cálculo de $|R|$, t_x

$$\begin{aligned} r_{11} &= a_1 \frac{t_y}{S_x} & r_{12} &= a_2 \frac{t_y}{S_x} & r_{13} &= a_3 \frac{t_y}{S_x} \\ r_{21} &= a_4 t_y & r_{22} &= a_5 t_y & r_{23} &= a_6 t_y \\ r_{31} &= \sqrt{1 - r_{11}^2 - r_{21}^2} & r_{32} &= \sqrt{1 - r_{12}^2 - r_{22}^2} & r_{33} &= \sqrt{1 - r_{13}^2 - r_{23}^2} \\ t_x &= a_7 \frac{t_y}{S_x} \end{aligned}$$

Restricción de Alineamiento Radial (RAC)

- Determinación de f , t_z , k_1
 - Aproximación inicial de f , t_z
 - Se obtiene f , t_z con distorsión nula, mediante mínimos cuadrados

Cálculo iterativo de f , k_1 , t_z

- Optimización no lineal del sistema

$$\hat{x}_d^i = K_x k_1 \left[(\hat{x}_d^i)^2 + (\hat{y}_d^i)^2 \right] + K_x f \frac{r_{11}x_w^i + r_{12}y_w^i + r_{13}z_w^i + t_x}{r_{31}x_w^i + r_{32}y_w^i + r_{33}z_w^i + t_z}$$

$$\hat{y}_d^i = K_y k_1 \left[(\hat{x}_d^i)^2 + (\hat{y}_d^i)^2 \right] + K_y f \frac{r_{21}x_w^i + r_{22}y_w^i + r_{23}z_w^i + t_x}{r_{31}x_w^i + r_{32}y_w^i + r_{33}z_w^i + t_z}$$