Escuela Politécnica Superior de Elche

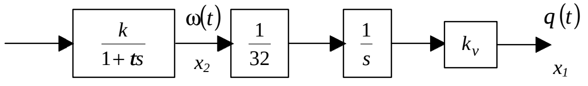
I.T. Telecomunicación. Esp. Sist. Electrónicos

EXAMEN DE SISTEMAS ELECTRÓNICOS DE CONTROL

(1ª Parte) Septiembre 2001

Problema 1

Para el sistema indicado en la figura compuesto por un motor de corriente continua acoplado a una reductora:



Se pide:

a) Obtener el modelo de estado continuo del sistema indicado anteriormente considerando como variables de estado las variables x_1 (posición angular a la salida de la reductora) y x_2 (velocidad de giro del motor).

(1.5 puntos)

Directamente del sistema se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$x_2(t)=\frac{k}{1+t\,s}u(t)\rightarrow x_2(t)+t\,\dot{x}_2(t)=ku(t)\rightarrow \dot{x}_2(t)=-\frac{1}{t}x_2(t)+\frac{k}{t}u(t)$$

$$\dot{x}_1(t)=\frac{k_v}{32}x_2(t)$$

Por tanto el modelo de estado continuo del sistema es:

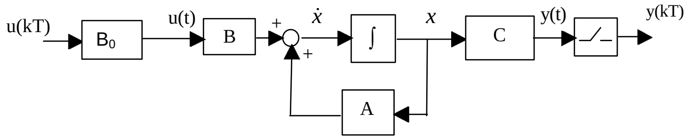
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{k_v}{32}\\ 0 & -\frac{1}{t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{k}{t}\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

b) Se desea realizar un control por computador para el sistema propuesto. Indicar simbólicamente el método de obtención del sistema discreto equivalente.

(1.5 puntos)

Puesto que se desea realizar un control por computador, es necesario convertir la señal de control discreta que proporciona el sistema de control, a continua. Esto se realiza utilizando un bloqueador de orden 0. Del mismo modo, hay que convertir la señal continua de salida del sistema a discreta, con el fin de que pueda ser utilizada por el sistema de control. Esto se efectúa utilizando un muestreador.



Para efectuar el diseño del sistema de control se debe discretizar el sistema continuo, es decir, hay que obtener el sistema discreto que sustituye al conjunto bloqueador de orden cero, sistema continuo y muestreador. Considerando el sistema continuo:

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$
$$y(t)=Cx(t)$$

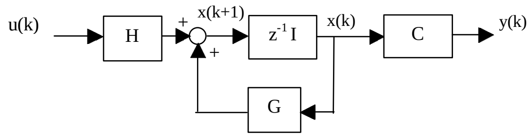
el sistema discreto que sustituye al conjunto bloqueador de orden cero, sistema continuo y muestreador viene dado por:

$$x[(k+1)T]=G(T)x(kT)+H(T)u(kT)$$
$$y(kT)=Cx(kT)$$

donde

$$G(T)=e^{AT}$$
$$H(T)=\left(\int_0^T e^{At}\,dt\right)B$$

El diagrama de bloques del sistema discreto equivalente al sistema continuo es:



c) *Representar el diagrama de bloques del esquema de control por realimentación del estado y de la salida, de forma que se elimine el error en régimen permanente a la vez que se ubican los polos del sistema. (<u>Debe utilizarse el propio integrador del sistema no pudiéndose añadir ningún integrador adicional</u>):*

(2 puntos)

El sistema a controlar posee un integrador en bucle abierto, es decir, es un sistema de tipo 1, por lo que ante una entrada en escalón con realimentación unitaria, el sistema no presenta error en estado estacionario.

Para ubicar los polos del sistema en el lugar deseado y que la salida del sistema siga en todo momento a la entrada, se va a diseñar un servosistema de tipo 1.

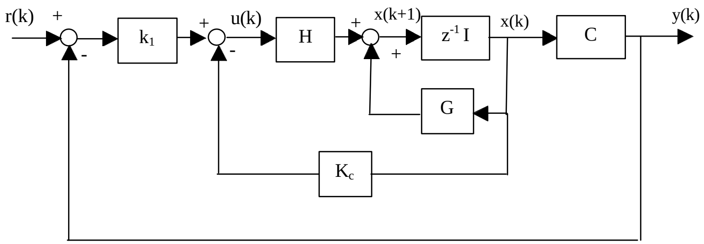
El sistema a controlar es modelado por las siguientes ecuaciones de estado y de salida:

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$$
$$y(k) = Cx(k)$$

Además la salida del sistema es igual a la primera variable de estado:

$$y(k) = x_1(k)$$

El esquema de control para eliminar el error en régimen permanente es el siguiente:



donde la matriz de realimentación del estado K_c tiene la siguiente forma:

$$K_c = [0 \quad k_2]$$

d) *Explicar detalladamente el método de cálculo de las matrices de realimentación del modelo propuesto.*

(3 puntos)

La acción de control viene dada por:

$$u(k) = -[0 \quad k_2]\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + k_1(r(k) - x_1(k))$$

que puede expresarse en notación matricial de la siguiente manera:

$$u(k) = -Kx(k) + k_1 r(k)$$

donde

$$K = [k_1 \quad k_2]$$

Si se sustituye, en la ecuación de estado del sistema, el valor de la entrada *u(k)* se obtiene:

$$x(k+1) = Gx(k) + H(-Kx(k) + k_1 r(k))$$

Ordenando términos:

$$x(k+1) = (G - HK)x(k) + Hk_1 r(k) \tag{1}$$

En estado estable la ecuación de estado del sistema será:

$$x(\infty) = (G - HK)x(\infty) + Hk_1 r(\infty) \tag{2}$$

Considerando que la referencia es un escalón, por lo que $r(k) = r(\infty)$, se puede establecer la diferencia entre (1) y (2):

$$x(k+1) - x(\infty) = (G - HK)[x(k) - x(\infty)] \tag{3}$$

Por tanto, la señal de error entre el estado en el instante *k* y el valor estable de dicho estado vendrá dada por:

$$e(k) = x(k) - x(\infty) \tag{4}$$

Utilizando las ecuaciones (3) y (4) se obtiene la expresión que relaciona la señal de error entre los instantes *k+1* y *k*:

Campus de Elche. Avda. del Ferrocarril s/n – 03202 ELCHE

$$e(k+1) = (G - HK)e(k)$$

Por tanto, el diseño de un servosistema de tipo 1, cuando el proceso tiene un integrador, se convierte en el diseño de un sistema regulador estable de forma que la señal de error *e(k)* tiende a 0 a partir de cualquier condición inicial. El cálculo de la matriz *K* se puede realizar ubicando los valores propios de la matriz de estado del error en la posición deseada.

e) Realizar el calculo del esquema de control diseñado anteriormente que ubique los polos del sistema en $z_{1,2}=0.9$ *partiendo de los siguientes datos:*

$$k = 0.857$$
$$\tau = 0.43 \qquad T = 0.01$$
$$K_v = 163$$

(2 puntos)

Sustituyendo los valores numéricos en las matrices mostradas en el apartado a) se obtiene el siguiente modelo de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5.09 \\ 0 & -2.325 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1.993 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

A continuación se va a discretizar el sistema. Para ello hay que calcular:

$$G(T) = e^{AT}$$
$$H(T) = \left(\int_0^T e^{At}\, dt \right) B$$

Se va a calcular la matriz de transición de estados utilizando el enfoque de la transformada de Laplace:

$$e^{AT} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1} \right]$$

Si se efectúan cálculos se obtiene:

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 5.09 \\ 0 & -2.325 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -5.09 \\ 0 & s+2.325 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 5.09 \frac{1}{s(s+2.325)} \\ 0 & \frac{1}{2.325} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 2.1892\left(1 - e^{-2.325T}\right) \\ 0 & e^{-2.325T} \end{bmatrix}$$

Por tanto:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0.0503 \\ 0 & 0.977 \end{bmatrix}$$

A continuación se va a calcular la matriz *H(T)*:

$$\int_0^T e^{At}\, dt = \begin{bmatrix} T & 2.1892T + 0.9416e^{-2.325T} - 0.9416 \\ 0 & -0.4301e^{-2.325T} + 0.4301 \end{bmatrix}$$

Por tanto:

$$H = \left(\int_0^T e^{At}\, dt \right) B = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.0002525 \\ 0 & 0.0099 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1.993 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0005 \\ 0.0197 \end{bmatrix}$$

Para poder implantar un control por realimentación del estado, el sistema debe ser controlable. Si el sistema no fuera controlable, su comportamiento sería independiente de la entrada, por lo que no sería modificable a pesar de realizar una realimentación del estado sobre ella.

Como es conocido, para saber si un sistema lineal e invariante en el tiempo es controlable, únicamente hay que comprobar que el rango de la matriz de controlabilidad *Q* coincida con el orden del sistema:

$$Q = \begin{bmatrix} H & GH \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0005 & 0.001494 \\ 0.0197 & 0.0192 \end{bmatrix} \rightarrow rango = 2 \rightarrow Sistema\ controlable$$

<u>Diseño de la matriz de realimentación del estado</u>

Para diseñar la matriz de realimentación del estado se va a calcular la matriz de transformación a forma canónica controlable:

$$x(k)=T\tilde{x}(k)$$

Esta matriz se calcula a partir de la matriz de controlabilidad:

$$Q^{-1}=\begin{bmatrix}-974.353 & 75.654\\ 997.272 & -25.47\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e_1^T\\ e_2^T\end{bmatrix}$$

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}e_2^T\\ e_2^T G\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}997.2724 & -25.4789\\ 997.2724 & 25.2822\end{bmatrix}\rightarrow T=\begin{bmatrix}0.0005 & 0.0005\\ -0.0197 & 0.0197\end{bmatrix}$$

Se realiza la transformación a forma canónica controlable:

$$\tilde{x}(k+1)=T^{-1}GT\tilde{x}(k)+T^{-1}Hu(k)=\tilde{G}\tilde{x}(k)+\tilde{H}u(k)$$
$$y(k)=CT\tilde{x}(k)=\tilde{C}\tilde{x}(k)$$

Obteniéndose las siguientes matrices:

$$\tilde{G}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.977 & 1.977\end{bmatrix}\qquad \tilde{H}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\qquad \tilde{C}=\begin{bmatrix}0.4994\cdot 10^{-3} & 0.5033\cdot 10^{-3}\end{bmatrix}$$

Como puede observarse la transformación es correcta.

Se va a diseñar la matriz K de forma que se coloquen los polos del sistema según las especificaciones dadas. Recordemos que se desea que los polos se localicen en:

$$z_{1,2}=0.9$$

Por tanto el polinomio buscado es:

$$p(z)=(z-0.9)^2=z^2-1.8z+0.81$$

$\tilde{K}$ se calcula de la siguiente manera:

$$\tilde{G}-\tilde{H}\tilde{K}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.977-\tilde{k}_1 & 1.977-\tilde{k}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.81 & 1.8\end{bmatrix}$$

De aquí se deduce:

$$\tilde{K}=\begin{bmatrix}\tilde{k}_1 & \tilde{k}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.1664 & 0.176369\end{bmatrix}$$

Por lo tanto la matriz K es:

$$K=\tilde{K}T^{-1}=\begin{bmatrix}9.9418 & 8.6987\end{bmatrix}$$