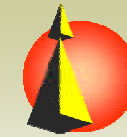


TEMA 4: CINEMÁTICA DEL ROBOT

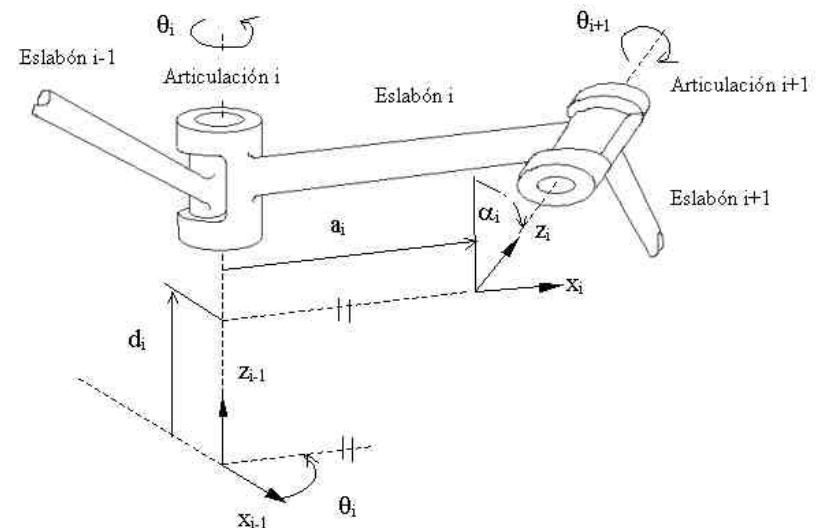


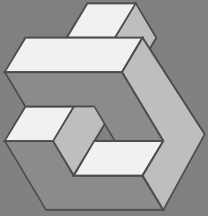
Ingeniería de
Sistemas y
Automática

Control de Robots y
Sistemas Sensoriales

Robótica Industrial

ISA.- Ingeniería de Sistemas y Automática



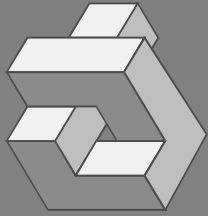


Cinemática del robot

Cinemática directa

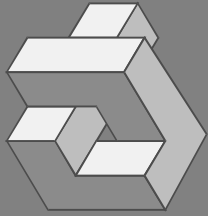
Cinemática Inversa

Matriz Jacobiana

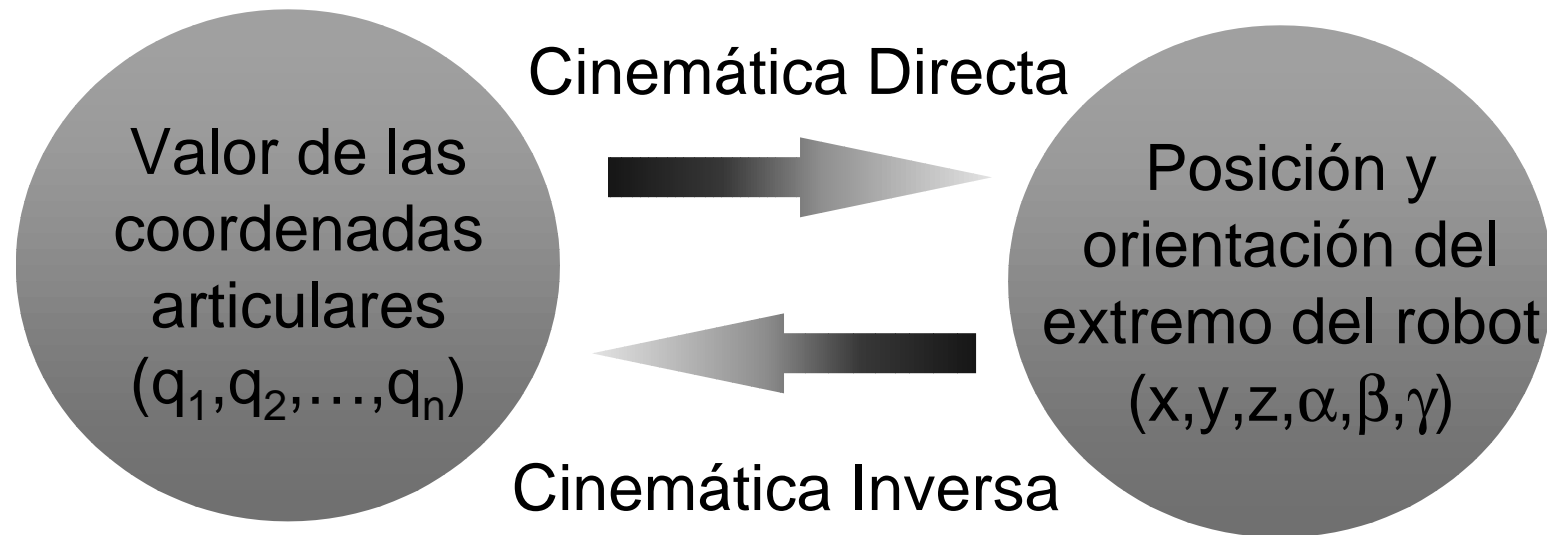


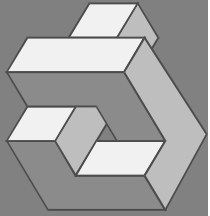
El problema cinemático de un robot

- **Cinemática del robot :** Estudio de su movimiento con respecto a un sistema de referencia
 - Descripción analítica del movimiento espacial en función del tiempo
 - Relaciones localización del extremo del robot-valores articulares
- **Problema cinemático directo:** Determinar la posición y orientación del extremo final del robot, con respecto a un sistema de coordenadas de referencia, conocidos los ángulos de las articulaciones y los parámetros geométricos de los elementos del robot
- **Problema cinemático inverso:** Determinar la configuración que debe adoptar el robot para una posición y orientación del extremo conocidas
- **Modelo diferencial (matriz Jacobiana):** Relaciones entre las velocidades de movimiento de las articulaciones y las del extremo del robot



Relación entre cinemática directa e inversa





Resolución del problema cinemático directo con matrices de transformación homogéneas

■ Objetivo:

Encontrar una matriz de transformación homogénea \mathbf{T} que relacione posición y orientación del extremo del robot con respecto a un sistema de referencia fijo situado en su base

$$x = f_x(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$$

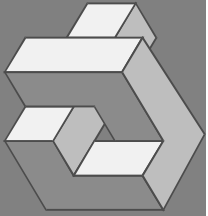
$$y = f_y(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$$

$$z = f_z(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$$

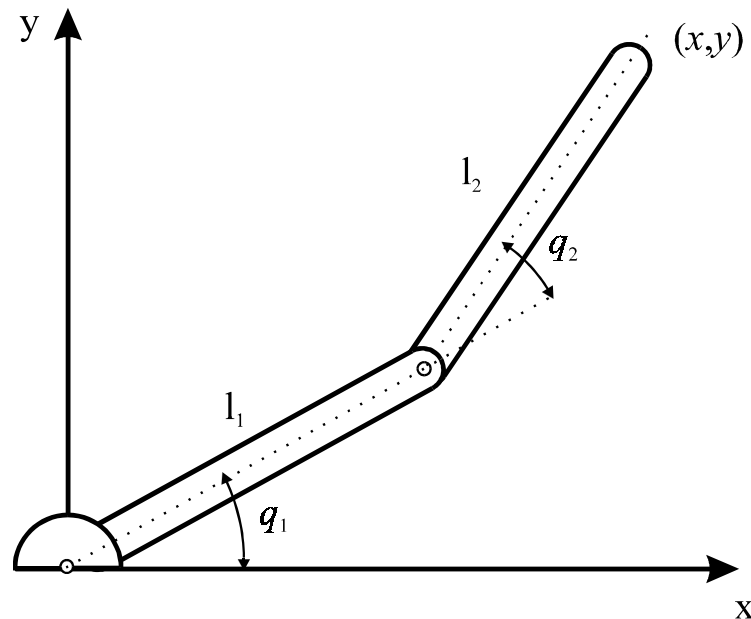
$$\alpha = f_\alpha(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$$

$$\beta = f_\beta(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$$

$$\gamma = f_\gamma(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$$

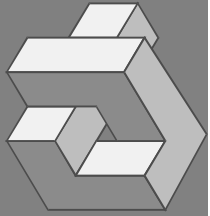


Modelo cinemático directo de un robot planar de 2 gdl



$$x = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2)$$

$$y = l_1 \operatorname{sen} q_1 + l_2 \operatorname{sen}(q_1 + q_2)$$



Las matrices de transformación

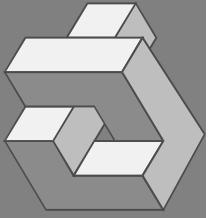
A y **T**

- Matriz ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$: matriz de transformación homogénea que representa la posición y orientación relativa entre los sistemas asociados a dos eslabones consecutivos del robot
- Conexión de matrices A:

$${}^0\mathbf{A}_3 = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3$$

- Matriz **T** : matriz ${}^0\mathbf{A}_n$ cuando se consideran todos los grados de libertad del robot

$$\mathbf{T} = {}^0\mathbf{A}_6 = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3 {}^3\mathbf{A}_4 {}^4\mathbf{A}_5 {}^5\mathbf{A}_6$$

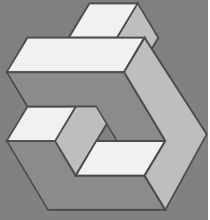


Convenio de conexión de elementos contiguos de Denavit-Hartenberg

■ Transformaciones básicas de paso de eslabón:

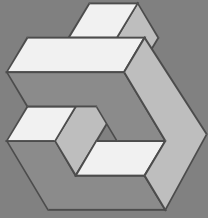
- ❶ Rotación alrededor del eje z_{i-1} un ángulo θ_i
- ❷ Traslación a lo largo de z_{i-1} una distancia d_i ; vector \mathbf{d}_i (0,0, d_i)
- ❸ Traslación a lo largo de x_i una distancia a_i ; vector \mathbf{a}_i (0,0, a_i)
- ❹ Rotación alrededor del eje x_i un ángulo α_i

$$\begin{aligned}
 {}^{i-1}\mathbf{A}_i &= \mathbf{T}(z, \theta_i) \mathbf{T}(0, 0, d_i) \mathbf{T}(a_i, 0, 0) \mathbf{T}(x, \alpha_i) \\
 {}^{i-1}\mathbf{A}_i &= \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



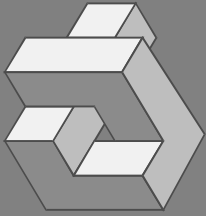
Parámetros de Denavit-Hartenberg (I)

- Definen el paso de un sistema de referencia asociado a una articulación al siguiente
- Sólo dependen de las características geométricas de cada eslabón y de las articulaciones que le unen con el anterior y siguiente (no dependen de la posición del robot)
- Definen las matrices A que permiten el paso de un sistema de referencia asociado a una articulación al siguiente y por tanto definen las matrices T
- Son 4:
 - Dos ángulos (θ_i, α_i)
 - Dos distancias (d_i, a_i)

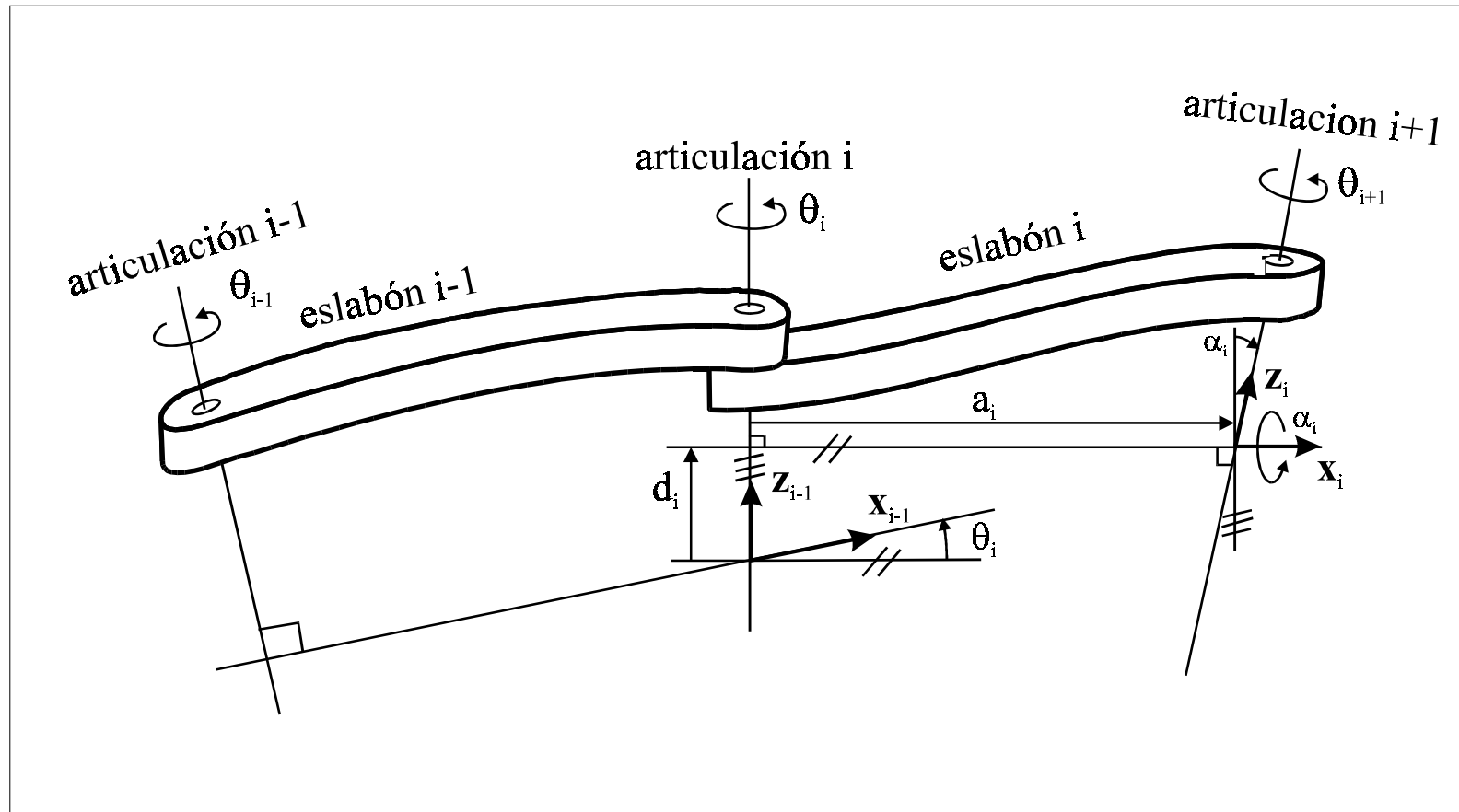


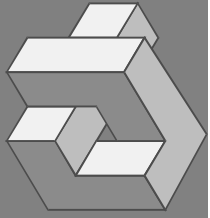
Parámetros de Denavit-Hartenberg (II)

- θ_i : Es el ángulo que forman los ejes \mathbf{x}_{i-1} y \mathbf{x}_i medido en un plano perpendicular al eje \mathbf{z}_{i-1} , utilizando la regla de la mano derecha. Se trata de un parámetro variable en articulaciones giratorias.
- d_i : Es la distancia a lo largo del eje \mathbf{z}_{i-1} desde el origen del sistema de coordenadas (i-1)-ésimo hasta la intersección del eje \mathbf{z}_{i-1} con el eje \mathbf{x}_i . Se trata de un parámetro variable en articulaciones prismáticas.
- a_i : Es la distancia a lo largo del eje \mathbf{x}_i que va desde la intersección del eje \mathbf{z}_{i-1} con el eje \mathbf{x}_i hasta el origen del sistema i-ésimo, en el caso de articulaciones giratorias. En el caso de articulaciones prismáticas, se calcula como la distancia más corta entre los ejes \mathbf{z}_{i-1} y \mathbf{z}_i .
- α_i : Es el ángulo de separación del eje \mathbf{z}_{i-1} y el eje \mathbf{z}_i , medido en un plano perpendicular al eje \mathbf{x}_i , utilizando la regla de la mano derecha.



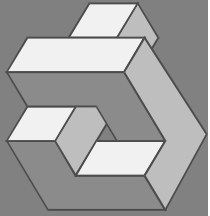
Parámetros de Denavit-Hartenberg para un eslabón giratorio





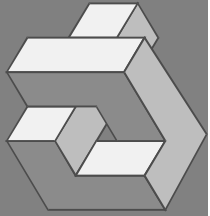
Obtención del modelo cinemático directo de un robot

- ➊ Establecer para cada elemento del robot un sistema de coordenadas cartesiano ortonormal (x_i, y_i, z_i) donde $i=1, 2, \dots, n$ (n =número de gdl). Cada sistema de coordenadas corresponderá a la articulación $i+1$ y estará fijo en el elemento i
- ➋ Encontrar los parámetros D-H de cada una de las articulaciones
- ➌ Calcular las matrices \mathbf{A}_i
- ➍ Calcular la matriz $\mathbf{T}_n = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 \dots {}^{n-1}\mathbf{A}_n$



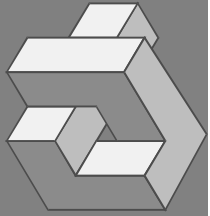
Algoritmo de Denavit-Hartenberg (I)

- **D-H 1.-** Numerar los eslabones comenzando con 1 (primer eslabón móvil de la cadena) y acabando con n (último eslabón móvil). Se numerará como eslabón 0 a la base fija del robot.
- **D-H 2.-** Numerar cada articulación comenzando por 1 (la correspondiente al primer grado de libertad) y acabando en n
- **D-H 3.-** Localizar el eje de cada articulación. Si ésta es rotativa, el eje será su propio eje de giro. Si es prismática, será el eje a lo largo del cual se produce el desplazamiento.
- **D-H 4.-** Para i de 0 a n-1 situar el eje z_i sobre el eje de la articulación i+1.
- **D-H 5.-** Situar el origen del sistema de la base $\{S_0\}$ en cualquier punto del eje z_0 . Los ejes x_0 e y_0 se situarán de modo que formen un sistema dextrógiro con z_0



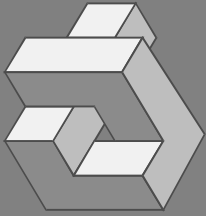
Algoritmo de Denavit-Hartenberg (II)

- **D-H 6.-** Para i de 1 a $n-1$, situar el sistema $\{S_i\}$ (solidario al eslabón i) en la intersección del eje z_i con la línea normal común a z_{i-1} y z_i . Si ambos ejes se cortasen se situaría $\{S_i\}$ en el punto de corte. Si fuesen paralelos $\{S_i\}$ se situaría en la articulación $i+1$
- **D-H 7.-** Situar x_i en la línea normal común a z_{i-1} y z_i
- **D-H 8.-** Situar y_i de modo que forme un sistema dextrógiro con x_i y z_i .
- **D-H 9.-** Situar el sistema $\{S_n\}$ en el extremo del robot de modo que z_n coincida con la dirección de z_{n-1} y x_n sea normal a z_{n-1} y z_n .
- **D-H 10.-** Obtener θ_i como el ángulo que hay que girar en torno a z_{i-1} para que x_{i-1} y x_i queden paralelos.
- **D-H 11.-** Obtener d_i como la distancia, medida a lo largo de z_{i-1} , que habría que desplazar $\{S_{i-1}\}$ para que x_i y x_{i-1} quedasen alineados.

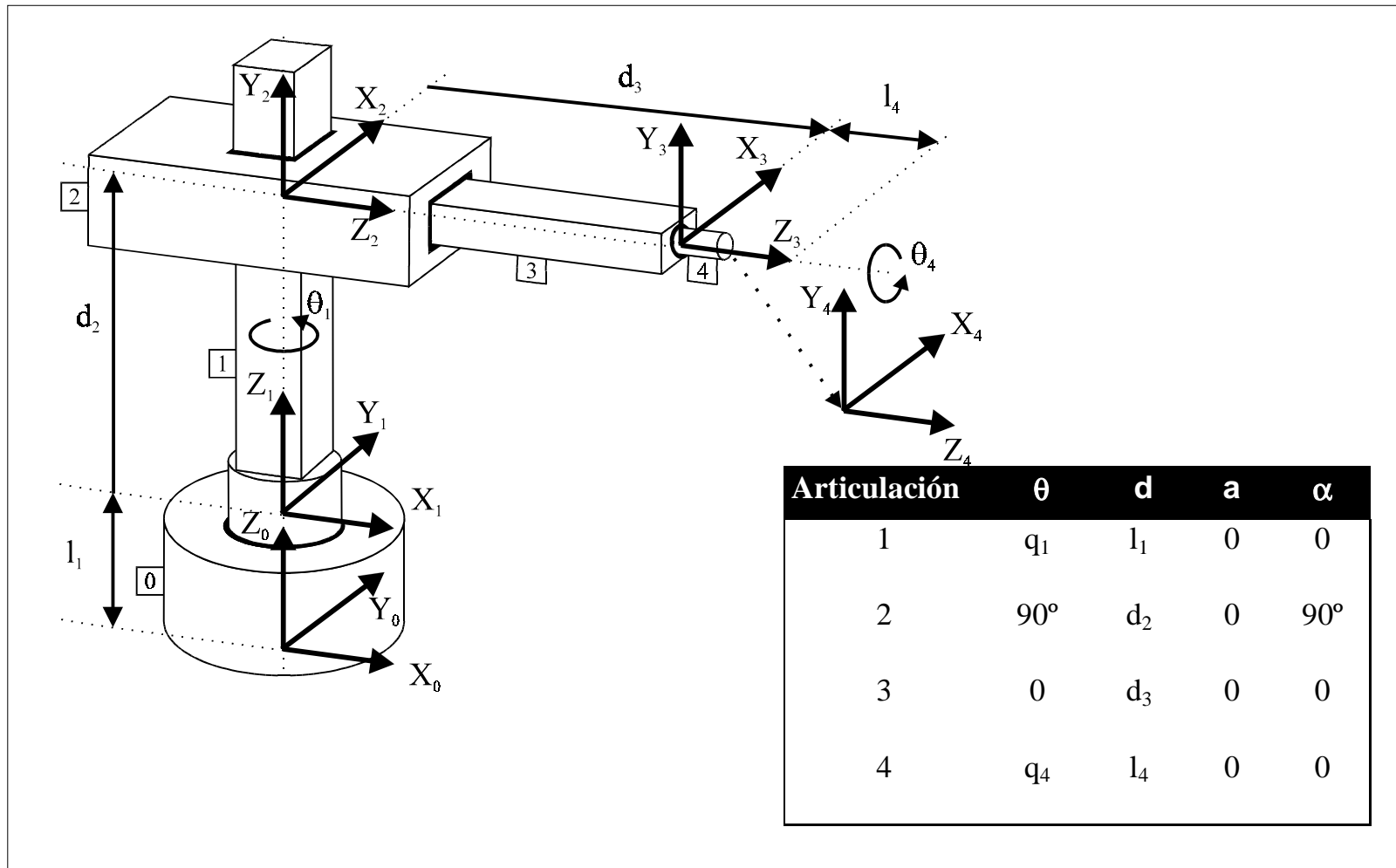


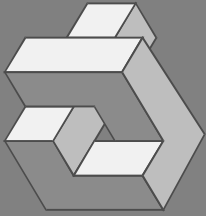
Algoritmo de Denavit-Hartenberg (III)

- **DH 12.-** Obtener a_i como la distancia medida a lo largo de \mathbf{x}_i (que ahora coincidiría con \mathbf{x}_{i-1}) que habría que desplazar el nuevo $\{S_{i-1}\}$ para que su origen coincidiese con $\{S_i\}$.
- **DH 13.-** Obtener α_i como el ángulo que habría que girar entorno a \mathbf{x}_i (que ahora coincidiría con \mathbf{x}_{i-1}), para que el nuevo $\{S_{i-1}\}$ coincidiese totalmente con $\{S_i\}$.
- **DH 14.-** Obtener las matrices de transformación ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$
- **DH 15.-** Obtener la matriz de transformación entre la base y el extremo del robot $\mathbf{T} = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 \dots {}^{n-1}\mathbf{A}_n$.
- **DH 16.-** La matriz \mathbf{T} define la orientación (submatriz de rotación) y posición (submatriz de traslación) del extremo referido a la base en función de las n coordenadas articulares



Modelo cinemático directo de un robot cilíndrico (I)





Modelo cinemático directo de un robot cilíndrico (II)

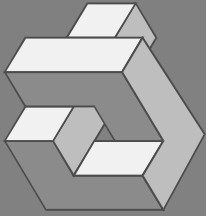
$${}^0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

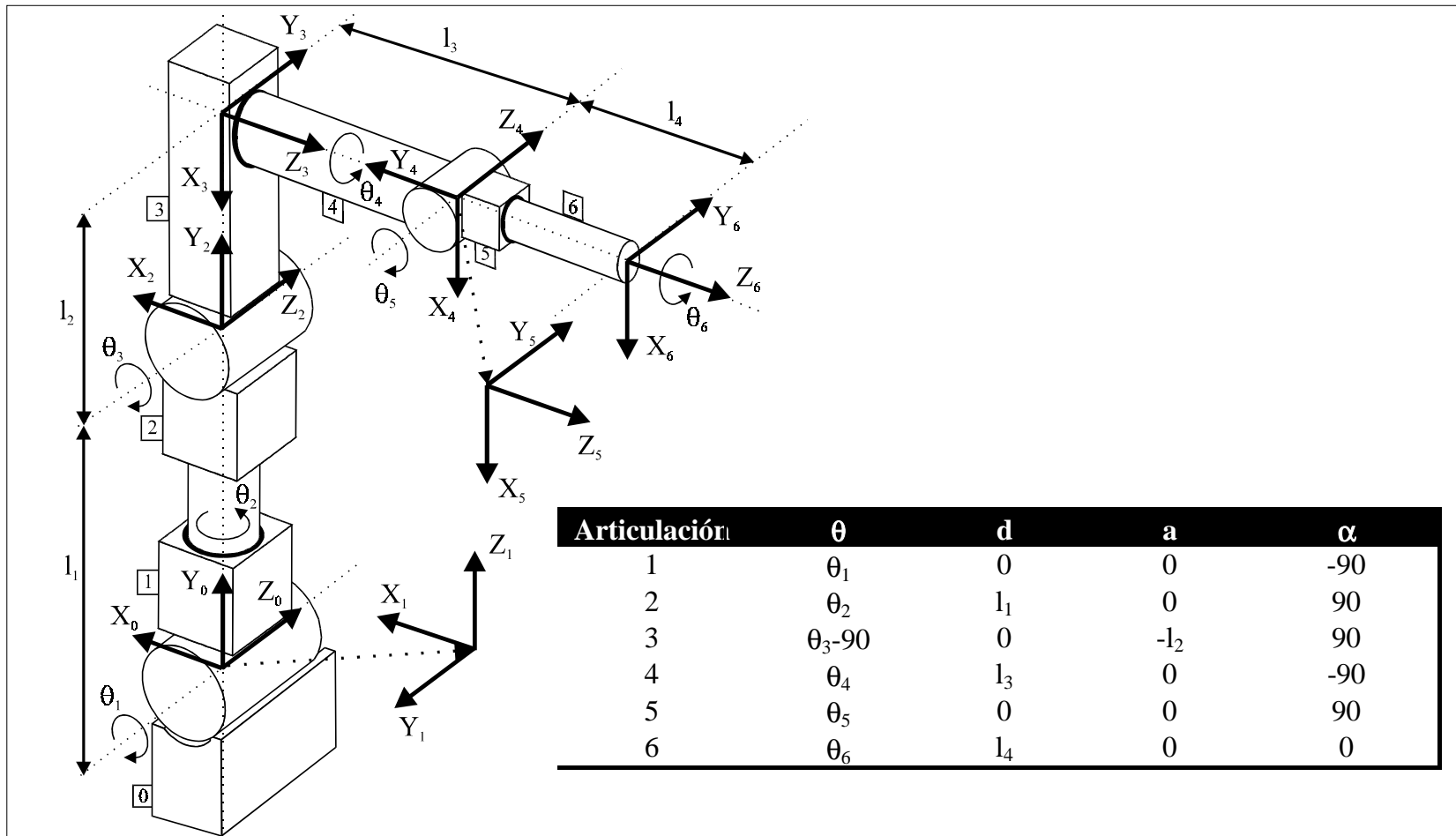
$${}^2\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

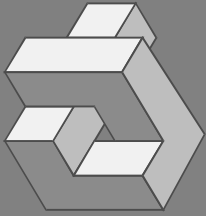
$${}^3\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} C_4 & -S_4 & 0 & 0 \\ S_4 & C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3 {}^3\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} -S_1 C_4 & S_1 S_4 & C_1 & C_1(d_3 + l_4) \\ C_1 C_4 & -C_1 S_4 & S_1 & S_1(d_3 + l_4) \\ S_4 & C_4 & 0 & d_2 + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Modelo cinemático directo de un robot ABB IRB 6400C (I)





Modelo cinemático directo de un robot ABB IRB 6400C (II)

$${}^0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

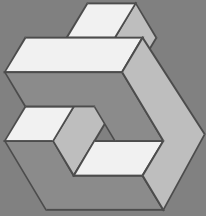
$${}^1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} S_3 & 0 & -C_3 & -l_2 S_3 \\ -C_3 & 0 & -S_3 & l_2 C_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^5\mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Modelo cinemático directo de un robot ABB IRB 6400C (III)

$$\mathbf{T} = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3 {}^3\mathbf{A}_4 {}^4\mathbf{A}_5 {}^5\mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$n_x = (C_1 C_2 S_3 + S_1 C_3)(C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + C_1 S_2 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + (-C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3) S_5 C_6$$

$$n_y = (-S_1 C_2 S_3 + S_1 C_3)(C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + S_1 S_2 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + (-S_1 C_2 C_3 - C_1 S_3) S_5 C_6$$

$$n_z = (-S_2 S_3)(C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + C_2 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + S_2 C_3 S_5 C_6$$

$$o_x = (C_1 C_2 S_3 + S_1 C_3)(-C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + C_1 S_2 (-S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + (-C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3)(-S_5 C_6)$$

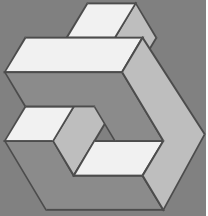
$$o_y = (-S_1 C_2 S_3 + S_1 C_3)(-C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + S_1 S_2 (-S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + (-S_1 C_2 C_3 - C_1 S_3)(-S_5 C_6)$$

$$o_z = (-S_2 S_3)(-C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + C_2 (-S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + S_2 C_3 (-S_5 C_6)$$

$$p_x = (C_1 C_2 S_3 + S_1 C_3)(l_4 C_4 S_5) + C_1 S_2 (l_4 S_4 S_5) + (C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3)(-l_4 C_5 + l_3) + (-l_2 C_1 C_2 S_3 - l_2 S_1 C_3 - l_1 S_1)$$

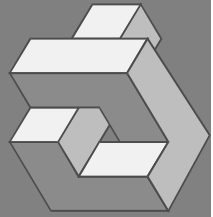
$$p_y = (-S_1 C_2 S_3 - C_1 C_3)(l_4 C_4 S_5) + S_1 S_2 (l_4 S_4 S_5) + (-C_1 C_2 C_3 - C_1 S_3)(-l_4 C_5 + l_3) + (-l_2 S_1 C_2 S_3 - l_2 C_1 C_3 + l_1 C_1)$$

$$p_z = (-S_2 S_3)(l_4 C_4 C_5) + C_2 (l_4 S_4 S_5) + S_2 C_3 (-l_4 C_5 + l_3) + l_2 S_2 S_3$$



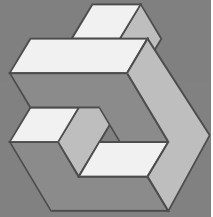
Cinemática Inversa

- **Objetivo:** encontrar los valores que deben adoptar las coordenadas articulares del robot para que su extremo se posicione y oriente según una determinada localización espacial
- La resolución no es sistemática
- Depende de la configuración del robot (soluciones múltiples)
- No siempre existe solución en forma cerrada.
 - Condiciones suficientes para que exista:
 - ❖ Tres ejes de articulación adyacentes interseccionan en un punto (robot PUMA y robot Stanford)
 - ❖ Tres ejes de articulación adyacentes son paralelos entre sí (robot Elbow)



Posibilidades de solución del problema cinemático inverso

- ① Procedimiento genérico a partir de los parámetros D-H
 - ✦ Método iterativo
 - ✦ Problemas de velocidad y convergencia
- ② Búsqueda de solución cerrada: $q_k = f_k(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$; $k = 1, \dots, n$
 - ✦ Posibilidad de resolución en tiempo real
 - ✦ Posibilidad de selección de la solución más adecuada
 - ✦ Posibilidad de simplificaciones
 - ✦ No siempre es posible



Métodos de solución del problema cinemático inverso

① Métodos geométricos

- Se suele utilizar para las primeras variables articulares
- Uso de relaciones geométricas y trigonométricas (resolución de triángulos)

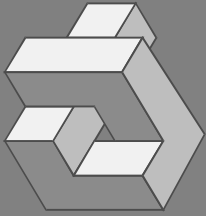
② Resolución a partir de las matrices de transformación homogénea

- Despejar las n variables q_i en función de las componentes de los vectores \mathbf{n} , \mathbf{o} , \mathbf{a} y \mathbf{p} .

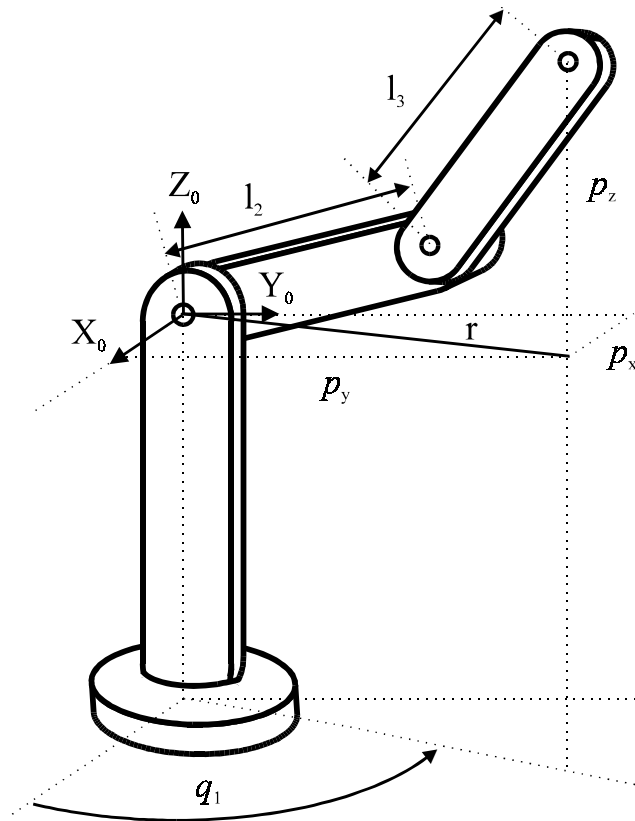
③ Desacoplamiento cinemático

- En robots de 6 GDL
- Separación de orientación y posicionamiento

④ Otros: álgebra de tornillo, cuaterniones duales, métodos iterativos...



Ejemplo de resolución de la cinemática inversa por métodos geométricos (I)



$$q_1 = \arctg\left(\frac{p_y}{p_x}\right)$$

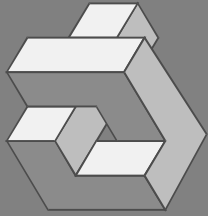
$$\left. \begin{aligned} r^2 &= p_x^2 + p_y^2 \\ r^2 + p_z^2 &= l_2^2 + l_3^2 + 2l_2l_3\cos q_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\cos q_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3}$$

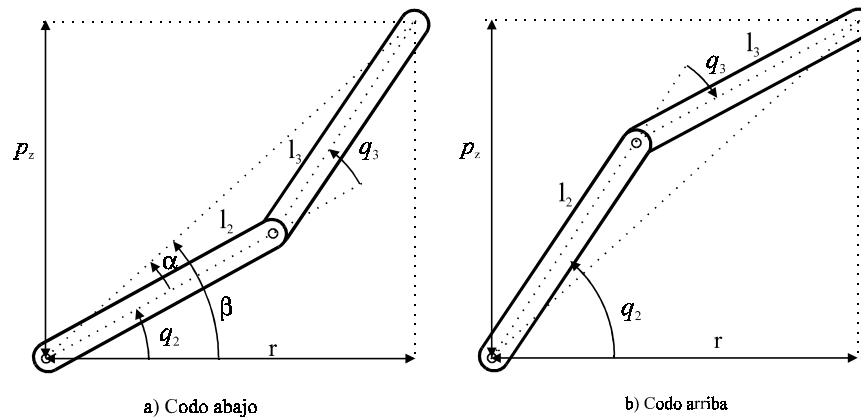
$$\text{sen } q_3 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 q_3}$$

$$q_3 = \arctg\left(\frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 q_3}}{\cos q_3}\right)$$

$$\text{con } \cos q_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3}$$



Ejemplo de resolución de la cinemática inversa por métodos geométricos (II)

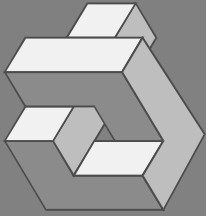


$$q_2 = \beta - \alpha$$

$$\beta = \arctg\left(\frac{p_z}{r}\right) = \arctg\left(\frac{p_z}{\pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right)$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{l_3 \sin q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right)$$

$$q_2 = \arctg\left(\frac{p_z}{\pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right) - \arctg\left(\frac{l_3 \sin q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right)$$



Ejemplo de resolución de la cinemática inversa a partir de las matrices de transformación homogénea (I)

Artic.	θ	d	a	α
1	q_1	l_1	0	90°
2	q_2	0	0	-90°
3	0	q_3	0	0

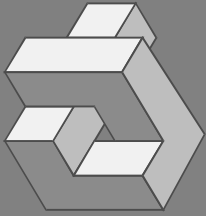
$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0A_2 = \begin{bmatrix} C_1C_2 & -S_1 & -C_1S_2 & 0 \\ S_1C_2 & C_1 & -S_1S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = {}^0A_3 = \begin{bmatrix} C_1C_2 & -S_1 & -C_1S_2 & -q_3C_1S_2 \\ S_1C_2 & C_1 & -S_1S_2 & -q_3S_1S_2 \\ S_2 & 0 & C_2 & q_3C_2 + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



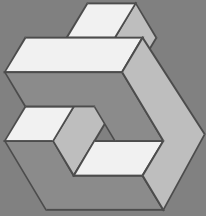
Ejemplo de resolución de la cinemática inversa a partir de las matrices de transformación homogénea (II)

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{T} = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3 \\
 & ({}^0\mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{T} = {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3 \quad \longrightarrow \\
 & ({}^1\mathbf{A}_2)^{-1} ({}^0\mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{T} = {}^2\mathbf{A}_3
 \end{aligned}
 \left| \begin{aligned}
 & ({}^0\mathbf{A}_1)^{-1} {}^0\mathbf{T}_3 = {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_1 \\ S_1 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & -S_2 q_3 \\ S_2 & 0 & C_2 & C_2 q_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \right.$$

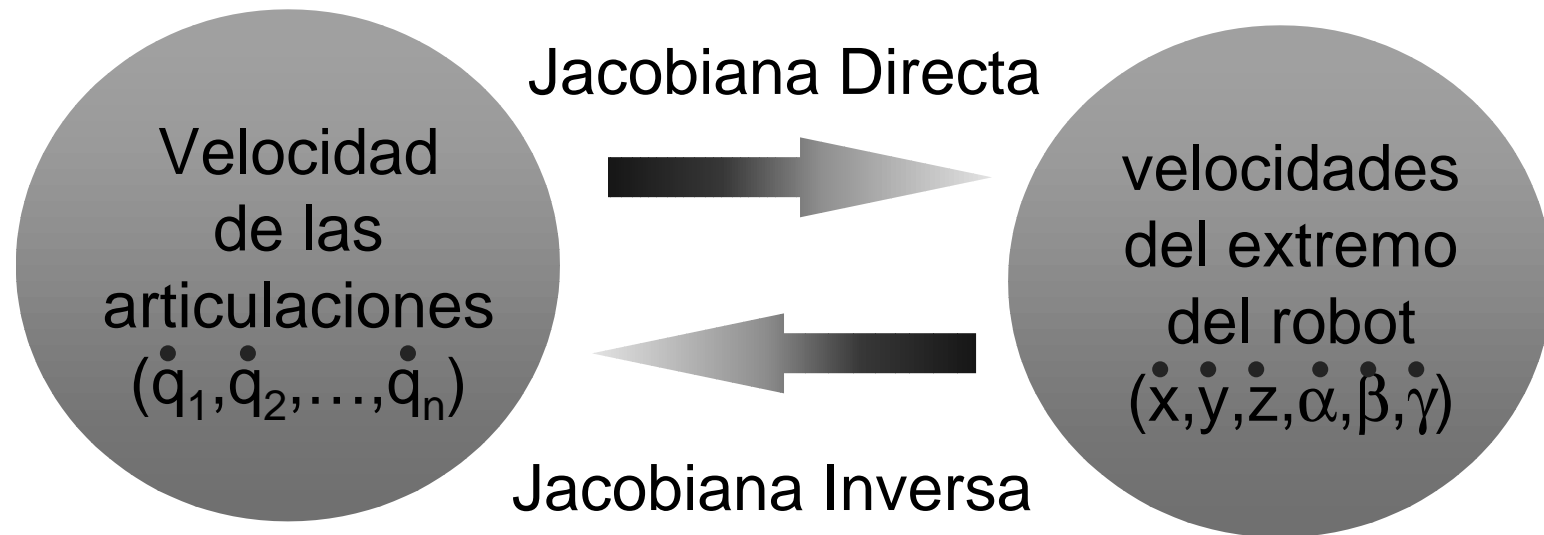
$$S_1 p_x - C_1 p_y = 0 \Rightarrow \tan(q_1) = \left(\frac{p_y}{p_x} \right) \Rightarrow q_1 = \arctan\left(\frac{p_y}{p_x} \right)$$

$$q_2 = \arctan \frac{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}{l_1 - p_z}$$

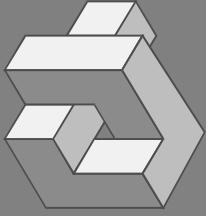
$$q_3 = C_2(p_z - l_1) - S_2 \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$



Matriz Jacobiana



Matriz Jacobiana: permite conocer las velocidades del extremo del robot a partir de las velocidades de cada articulación

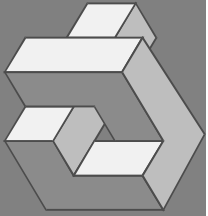


Relaciones diferenciales

$$\begin{aligned}x &= f_x(q_1, \dots, q_n) & y &= f_y(q_1, \dots, q_n) & z &= f_z(q_1, \dots, q_n) \\ \alpha &= f_\alpha(q_1, \dots, q_n) & \beta &= f_\beta(q_1, \dots, q_n) & \gamma &= f_\gamma(q_1, \dots, q_n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sum_1^n \frac{\partial f_x}{\partial q_i} \dot{q}_i & \dot{y} &= \sum_1^n \frac{\partial f_y}{\partial q_i} \dot{q}_i & \dot{z} &= \sum_1^n \frac{\partial f_z}{\partial q_i} \dot{q}_i \\ \dot{\alpha} &= \sum_1^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i} \dot{q}_i & \dot{\beta} &= \sum_1^n \frac{\partial f_\beta}{\partial q_i} \dot{q}_i & \dot{\gamma} &= \sum_1^n \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_i} \dot{q}_i\end{aligned}$$

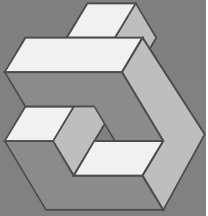
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad \text{con } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_x}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$



Jacobiana de un robot SCARA

$$\begin{aligned}
 x &= l_3 C_{12} + l_2 C_1 \\
 y &= l_3 S_{12} + l_2 S_1 \\
 z &= l_1 - q_3
 \end{aligned}$$

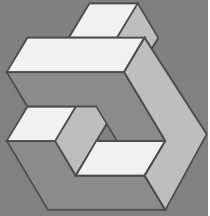
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(l_3 S_{12} + l_2 S_1) & -l_3 S_{12} & 0 \\ l_3 C_{12} + l_2 C_1 & l_3 C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$



Métodos de cálculo de la Jacobiana inversa

- Inversión simbólica de la matriz jacobiana
 - Gran complejidad (matriz 6x6)
- Evaluación numérica de \mathbf{J} e inversión numérica
 - Necesidad de recómputo continuo
 - En ocasiones \mathbf{J} no es cuadrada \rightarrow matriz pseudoinversa
 - En ocasiones $|\mathbf{J}| = 0$
- A partir del modelo cinemático inverso

$$\begin{array}{l} q_1 = f_1(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) \\ \vdots \\ q_n = f_n(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \vdots \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \end{array} \quad \mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \gamma} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial \gamma} \end{bmatrix}$$



Configuraciones singulares

- Aquellas en las que $|\mathbf{J}| = 0$ (Jacobiano nulo)
- Incremento infinitesimal coordenadas cartesianas implica incremento infinito coordenadas articulares
- Implica pérdida de algún grado de libertad
- Tipos
 - Singularidades en los límites del espacio de trabajo del robot
 - Singularidades en el interior del espacio de trabajo del robot
- Requieren su estudio y eliminación