3º INGENIERÍA TELECOMUNICACIÓN
2º ITT SISTEMAS ELECTRÓNICOS
2º ITT SISTEMAS DE TELECOMUNICACIÓN

AUTÓMATAS Y SISTEMAS DE CONTROL

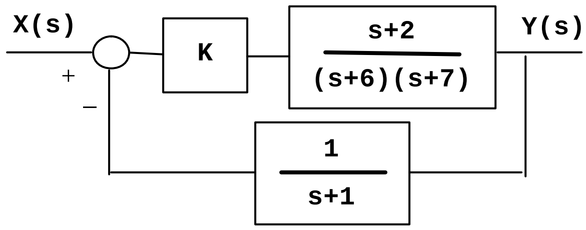
PROBLEMAS DE SISTEMAS

PARTE 2:

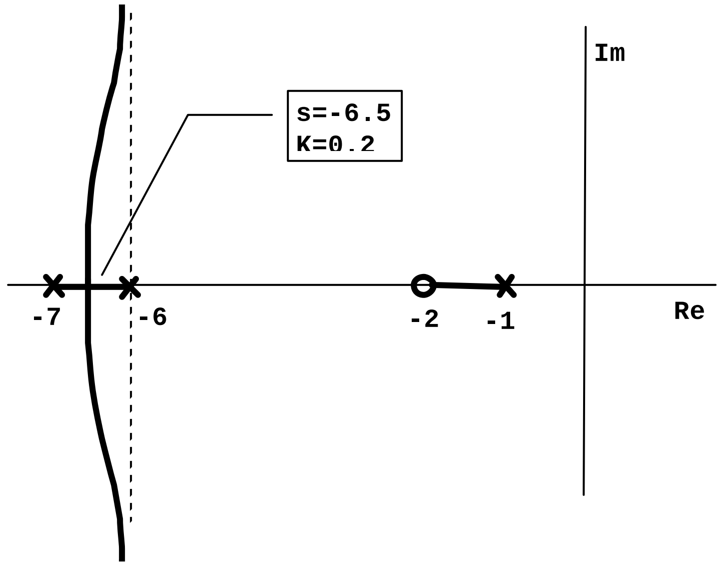
- **ERRORES EN REG. PERMANENTE**
- **LUGAR DE LAS RAICES**
- **DISEÑO REGULADORES PID**
- **ANÁLISIS EN FRECUENCIA**

PROBLEMA 1

Representar la situación de los polos del sistema realimentado al variar el parámetro K entre 0 e 8 :

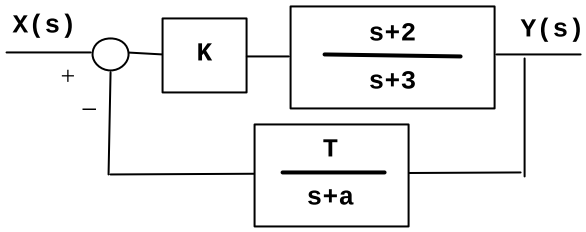


SOLUCIÓN



PROBLEMA 2

Considérese el sistema de la figura siguiente:

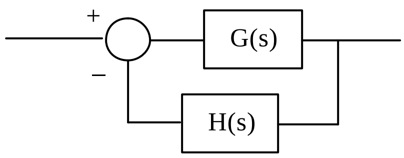


Se pide:

- Para T=1 y a=3, calcular la evolución de los polos del sistema en bucle cerrado si K varía entre 0 e 8 .
- Para K=1 y a=2, calcular la evolución de los polos del sistema en bucle cerrado si T varía entre 0 e 8 .
- Para K=1 y T=4, calcular la evolución de los polos del sistema en bucle cerrado si a varía entre 0 e 8 .

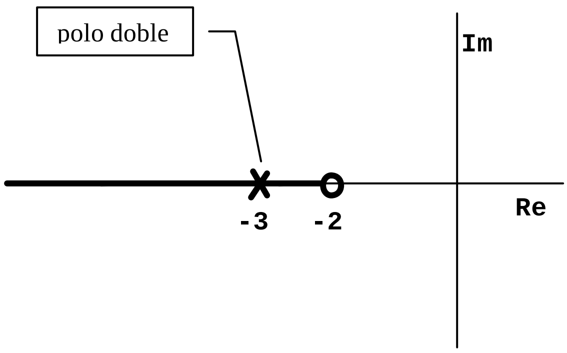
SOLUCIÓN

En el primero de los casos (variación de K) se trata de un lugar de las raíces simple. La ecuación característica sobre la que se debe trabajar es:



$$1 + K \cdot G(s) \cdot H(s) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 1 + K \cdot \frac{s+2}{(s+3)\cdot(s+3)} = 0$$

El lugar de las raíces que se obtiene es:



En el segundo caso (variación de T) se trata de un problema de <u>contorno</u> de las raíces. El objetivo es despejar la ecuación característica original:

$$1 + K \cdot G(s) \cdot H(s) = 0$$

… hasta obtener una nueva ecuación en la en que lugar del término K aparezca el término T:

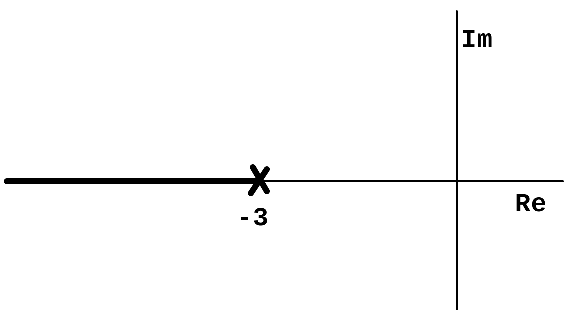
$$1 + T \cdot G_1(s) \cdot H_1(s) = 0$$

En el caso del problema se obtiene:

$$1 + T \cdot \frac{s+2}{(s+2)\cdot(s+3)} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 1 + T \cdot \frac{1}{s+3} = 0$$

(OJO:un polo de H(s) se puede cancelar con un cero de G(s) pero no al contrario)

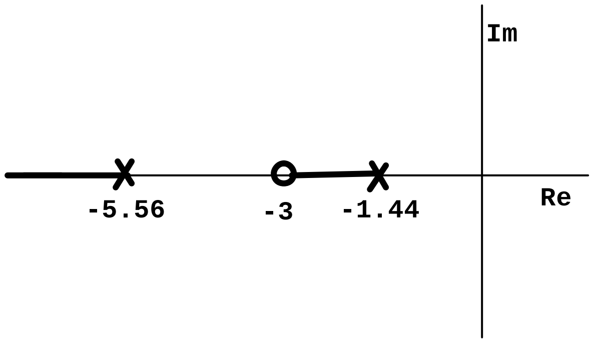
El lugar de las raíces resultante queda:



El tercer caso vuelve a ser un problema de contorno de las raíces, en este caso se debe despejar de modo que quede aislado el parámetro a. El resultado es:

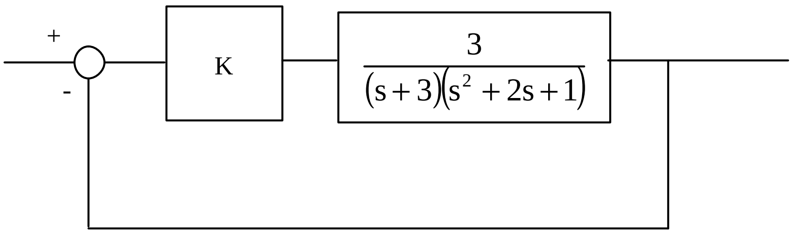
$$1 + a \cdot \frac{s+3}{s^2+7s+8} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + a \cdot \frac{s+3}{(s+5.56)\cdot(s+1.44)} = 0$$

Y el lugar de las raíces resulta:



PROBLEMA 3

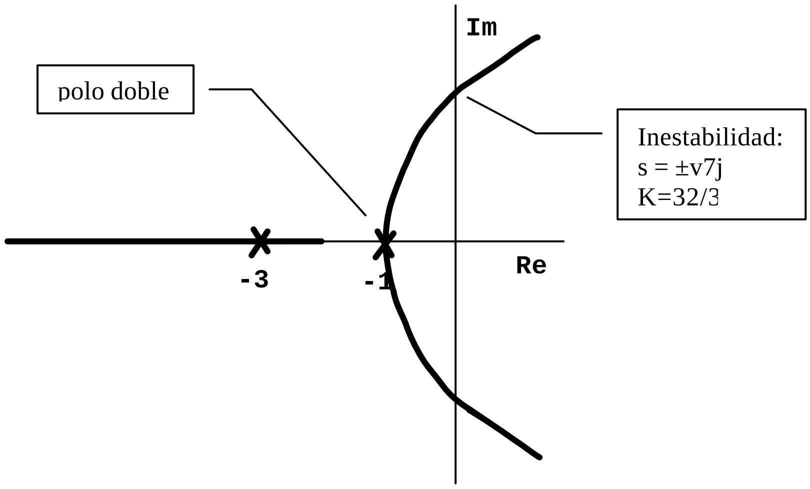
Dado el sistema de la figura siguiente:



- Representar el lugar de las raíces.
- Sobre el diagrama representado, calcular los valores de K a partir de los cuales el sistema se hace inestable. Calcular asimismo los polos conjugados del sistema para este valor de K.
- Calcular, a partir de los criterios del trazado del lugar de las raíces, el valor que ha de tener K para que el sistema tenga un polo en bucle cerrado en s = -4.
- Calcular el error de posición si la ganancia del sistema en bucle abierto es 9.

SOLUCIÓN

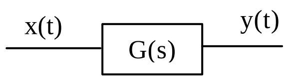
A continuación se representa el lugar de las raíces junto con los valores solicitados en el momento en el que el sistema se hace inestable. Estos valores se obtienen a partir de la tabla de Routh, buscando el valor de K que produce la aparición de una fila de ceros y solucionando la ecuación característica de la fila anterior para obtener el valor de s:



El valor de K que hace que exista un polo en s = -4 se obtiene aplicando el criterio del módulo para el punto s = -4:

$$K' = \frac{\prod |s - p_i|}{\prod |s - z_i|} \quad \Rightarrow \quad 3K = \frac{|-4+3| \cdot |-4+1| \cdot |-4+1|}{1} = 9 \quad \Rightarrow K = 3$$

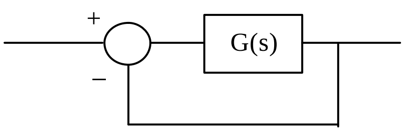
La ganancia en bucle abierto será el valor de la salida y(t) en régimen permanente del sistema G(s) si la entrada x(t) es un escalón unitario:



$$Y(s) = G(s) \cdot X(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{3K}{s(s^3 + 5s^2 + 7s + 3)}$$

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{S \to 0} s \cdot Y(s) = \lim_{S \to 0} \frac{3K}{s^3 + 5s^2 + 7s + 3} = K$$

Por tanto, el sistema tendrá ganancia en bucle abierto 9 para un valor de K=9. El error de posición para el sistema en bucle cerrado se calcula a partir de la constante de error de posición:



$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s) = \lim_{s \to 0} \frac{3 \cdot 9}{s^3 + 5s^2 + 7s + 3} = 9$$

$$e_p = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{10} = 0.1 = 10\%$$

PROBLEMA 4

De un sistema se conoce la respuesta impulsional de G(s), a la que llamamos g(t):

$$g(t) = 0.5 \cdot K \cdot e^{-t} - K \cdot e^{-2t} + 0.5 \cdot K \cdot e^{-3t}$$

Se pide:

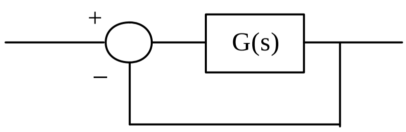
- Dibujar con precisión el lugar de las raíces para el sistema en bucle cerrado cuando el parámetro **K** varía de cero a infinito, especificando:
  - Rango de valores de **K** para los que el sistema es estable.
  - Rango de valores de **K** para los que todos los polos son reales.
- Calcular el error de posición del sistema en función del parámetro **K**. ¿Existe algún valor de **K** que haga el error de posición menor que el **5%**? ¿Por qué?

SOLUCIÓN

La función de transferencia del sistema será la transformada de Laplace de la respuesta impulsional:

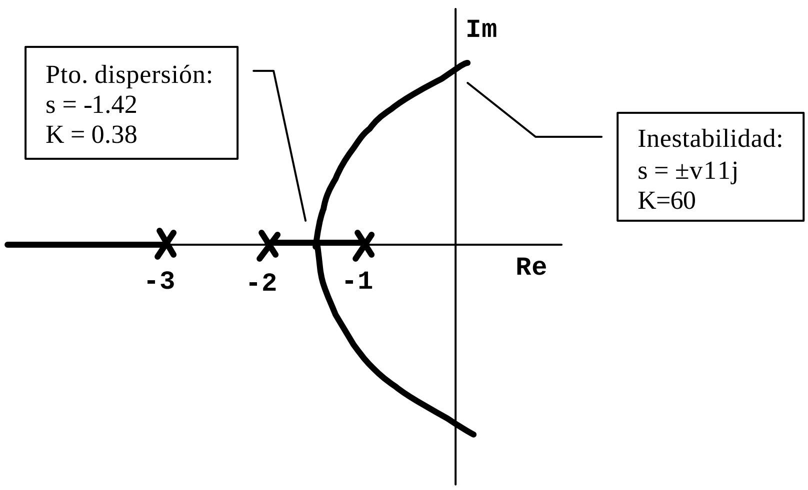
$$G(s) = \frac{0.5K}{s+1} - \frac{K}{s+2} + \frac{0.5K}{s+3} = K \cdot \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

El sistema en bucle cerrado será el siguiente:



$$M(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + K}$$

El lugar de las raíces resultante se muestra a continuación. Se marcan los puntos de comienzo de inestabilidad, que se deben obtener sobre la tabla de Routh del sistema en bucle cerrado M(s) imponiendo la condición de que aparezca una fila de ceros:



A la vista del lugar de las raíces se puede concluir:

- El sistema es estable para K<60
- Todos los polos son reales para K<0.38

Para el cálculo del error de posición se partirá de la constante K_P:

$$K_P = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{K}{(s+3)(s+2)(s+1)} = \frac{K}{6}$$

$$e_p = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+K/6} < 0.05 \quad \Rightarrow \quad K > 114$$

El valor necesario para el parámetro K se encuentra fuera del rango de estabilidad, por lo que es imposible conseguir un error de posición menor del 5%.

PROBLEMA 5

Sea el modelo de una planta continua:

$$G_p(s) = \frac{3}{(s+1)(s+2)}$$

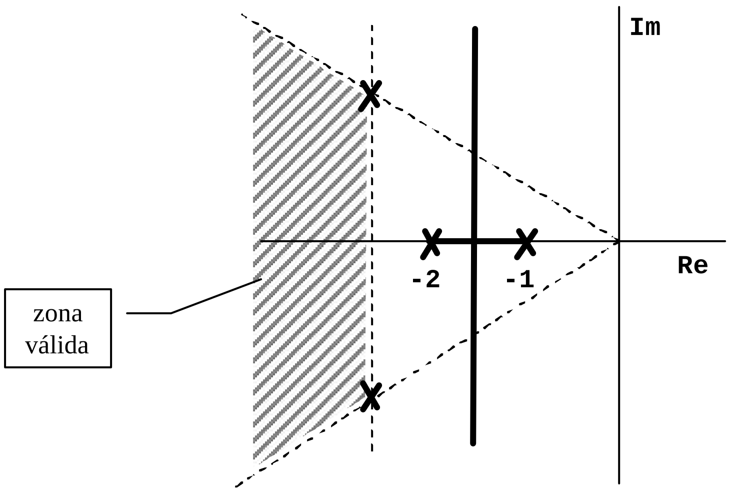
Se pide diseñar el regulador continuo más sencillo posible de forma que se consigan para el sistema realimentado las siguientes especificaciones:

- Sobreoscilación menor de un 4.3%   Mp<4.3%
- Tiempo de establecimiento de 1.256 s.
- Error de posición ante entrada escalón menor de un 50%

SOLUCIÓN

Las especificaciones en régimen transitorio equivalen a unos polos dominantes en cadena cerrada en la posición s = 2.5 ± 2.5j o en una posición más favorable.

En primer lugar se comprueba que un regulador tipo P no es suficiente, porque el lugar de las raíces de la planta sin controlador no pasa por los polos deseados.



Como siguiente paso se prueba con un regulador tipo PD, que es dimensionado mediante la técnica del lugar de las raíces. A continuación se muestra C(s) o la función de transferencia del controlador obtenido:

$$C(s) = 2.17\frac{s+1}{s+3}$$

Falta por verificar que se cumplen las especificaciones de régimen permanente. El error de posición será:

$$K_P = \lim_{s\to 0} C(s)\cdot G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{3}{(s+1)(s+2)}\cdot\frac{2.17(s+1)}{(s+3)} = 1.08$$

$$e_p = \frac{1}{1+K_p} = 0.48 = 48\%$$

Por lo tanto, se cumplen las especificaciones.

PROBLEMA 6

De un sistema desconocido G(s) se tienen los siguientes datos:

- G(s) presenta en cadena abierta dos polos: uno en s=0 y otro en s=-4 y ningún cero
- Aplicando una realimentación unitaria a G(s) el sistema resultante M(s) presenta un error de velocidad de 0.125s

Se pide:

- Obtener la función de transferencia del sistema G(s)
- Obtener la función de transferencia del sistema M(s)
- Determinar si la respuesta del sistema M(s) ante entrada escalón presentará o no presentará sobreoscilaciones.

SOLUCIÓN

De acuerdo con los datos, G(s) será un sistema de segundo orden como el siguiente:

$$G(s) = \frac{K}{s\cdot(s+4)}$$

El valor de K se obtiene considerando el error de velocidad que se ofrece como dato:

$$e_v = \frac{1}{K_V} = \frac{1}{lim_{s\to 0}\left(s\cdot G(s)\right)} = \frac{1}{lim_{s\to 0}\left(\frac{K}{s+4}\right)} = \frac{4}{K} \qquad K = \frac{4}{e_v} = 32$$

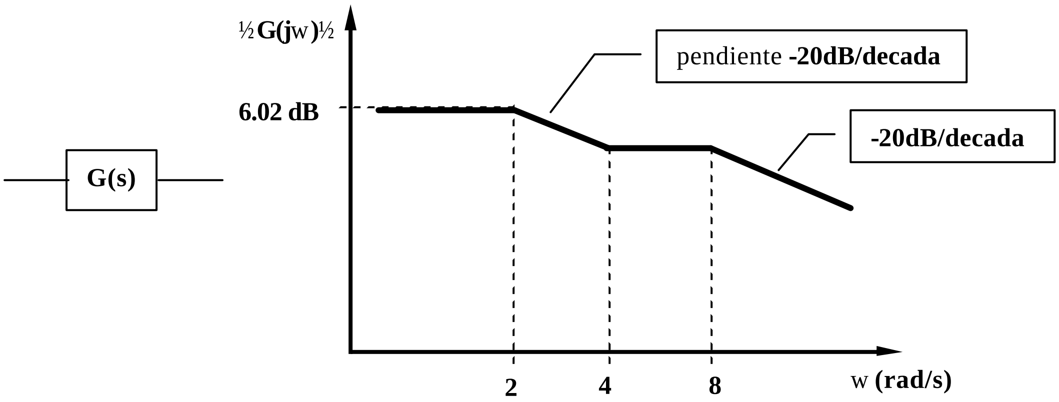
Por lo tanto los sistemas que se piden son:

$$G(s) = \frac{32}{s\cdot(s+4)} \qquad M(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{32}{s^2+4s+32}$$

M(s) tiene dos polos complejos conjugados, por lo que su respuesta ante escalón presentará sobreoscilaciones.

PROBLEMA 7

Del sistema G(s) se conoce la curva de módulos de su respuesta en frecuencia (Bode) y se sabe que tiene un cero y dos polos todos ellos de parte real negativa.



Se pide:

- Representar la curva de argumentos para dicho sistema.
- Determinar la función de transferencia de este sistema.
- Representar el diagrama de Nyquist, y calcular el margen de fase y margen de ganancia del sistema.

SOLUCIÓN

A partir de la curva de módulos se puede deducir la función de transferencia del sistema:

- Un polo en s = -1/2
- Un cero en s = -1/4
- Un polo en s = -1/8

$$G(s) = K \cdot \frac{(1+0.25s)}{(1+0.5s)(1+0.125s)}$$

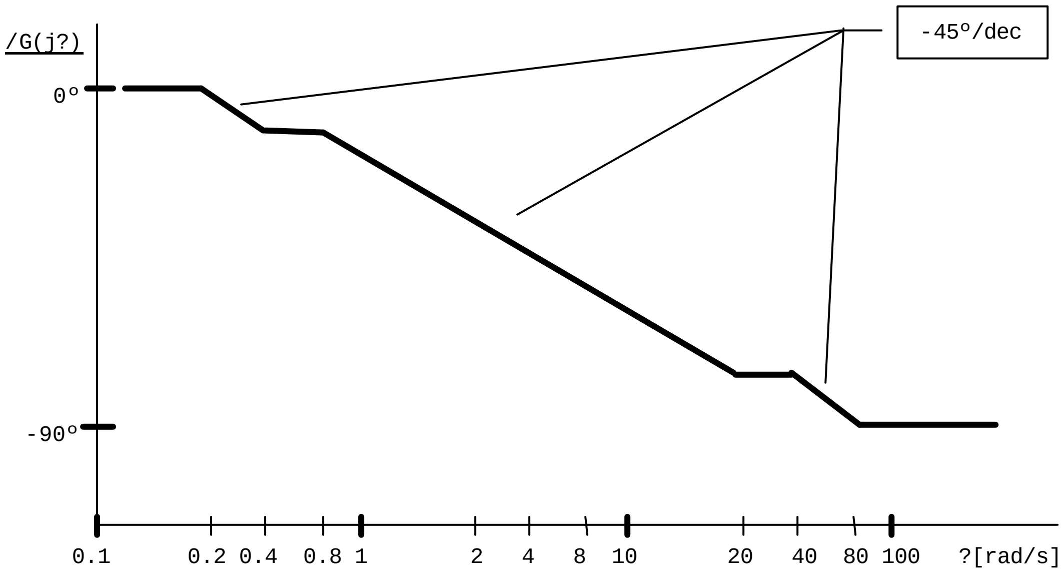
El valor de la constante K se obtiene a partir del módulo a bajas frecuencias, donde no afectan ni los polos ni los ceros:

$$6.02dB = 20 \cdot \log_{10} K \quad \Rightarrow \quad K = 2$$

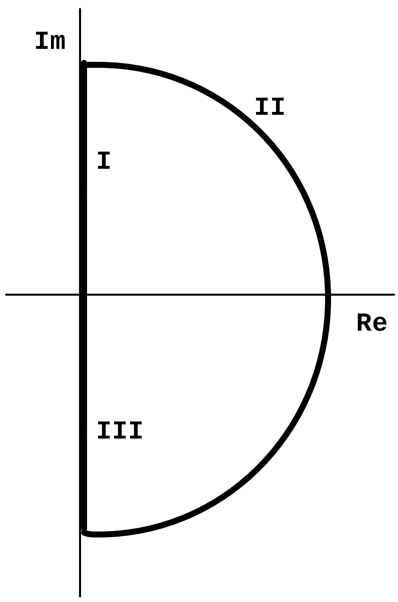
Por tanto, la función de transferencia queda:

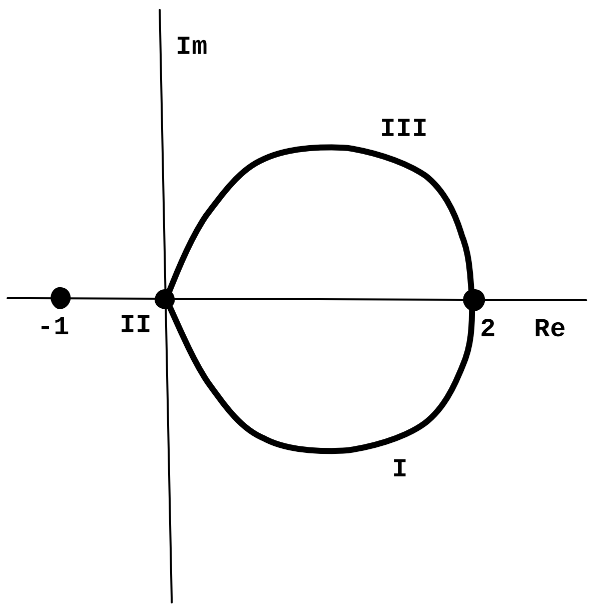
$$G(s) = 2 \cdot \frac{(1+0.25s)}{(1+0.5s)(1+0.125s)}$$

A partir de esta función de transferencia es inmediato dibujar la curva de fases:



El diagrama de Nyquist también se puede obtener fácilmente a partir de la función de transferencia. A continuación se muestran tanto el camino origen como la imagen:





El margen de ganancia K_G es infinito, ya que la fase nunca alcanza 180º (no se alcanza la frecuencia de cruce de fase $?_f$).

El margen de fase ? se puede calcular buscando la frecuencia $?_G$ de cruce de ganancia en el primer tramo (la frecuencia a la que la ganancia se hace 1, que en decibelios equivale a 0dB):

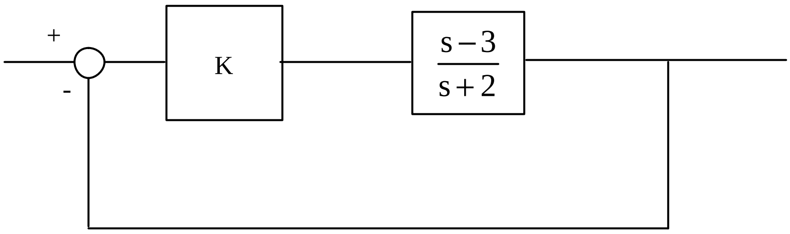
$$|G(jw)| = \frac{2\cdot\sqrt{1+0.25^2 w^2}}{\sqrt{1+0.5^2 w^2}\cdot\sqrt{1+0.125^2 w^2}} = 1 \quad \Rightarrow \quad w = 5.08\,{}^{rad}\!/_{s}$$

$$\angle G(jw) = \arctan(0.25w) - \arctan(0.5w) - \arctan(0.125w) = -49^{\circ}$$

$$g = 180^{\circ} - 49^{\circ} = 131^{\circ}$$

PROBLEMA 8

Para el sistema representado en la siguiente figura



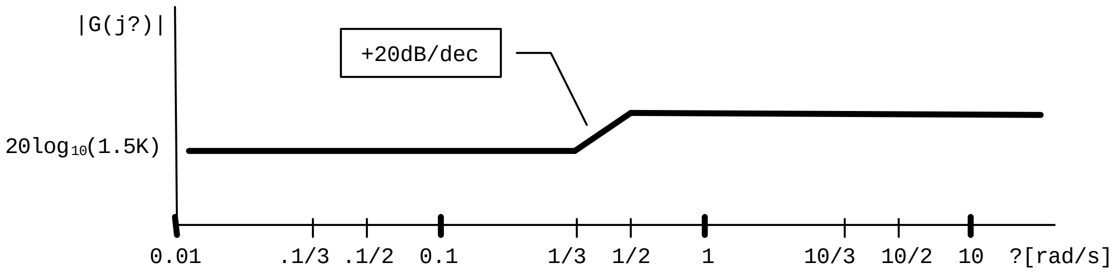
- Representar el diagrama de Bode de su función de transferencia en bucle abierto (K=1).
- Analizar mediante el método de Nyquist la estabilidad del sistema representado (K=1).
- Calcular razonadamente a partir del diagrama de Nyquist los valores de la ganancia K que posibilitan que el sistema sea estable.

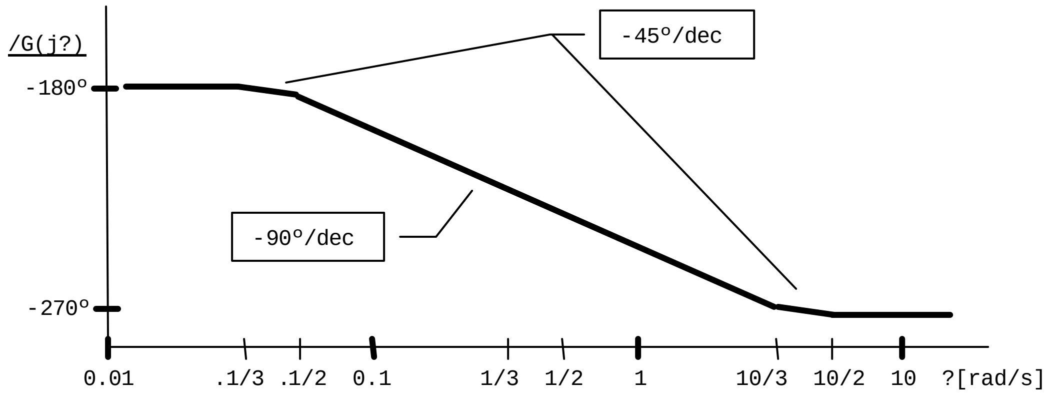
SOLUCIÓN

La función de transferencia sobre la que se debe trabajar es:

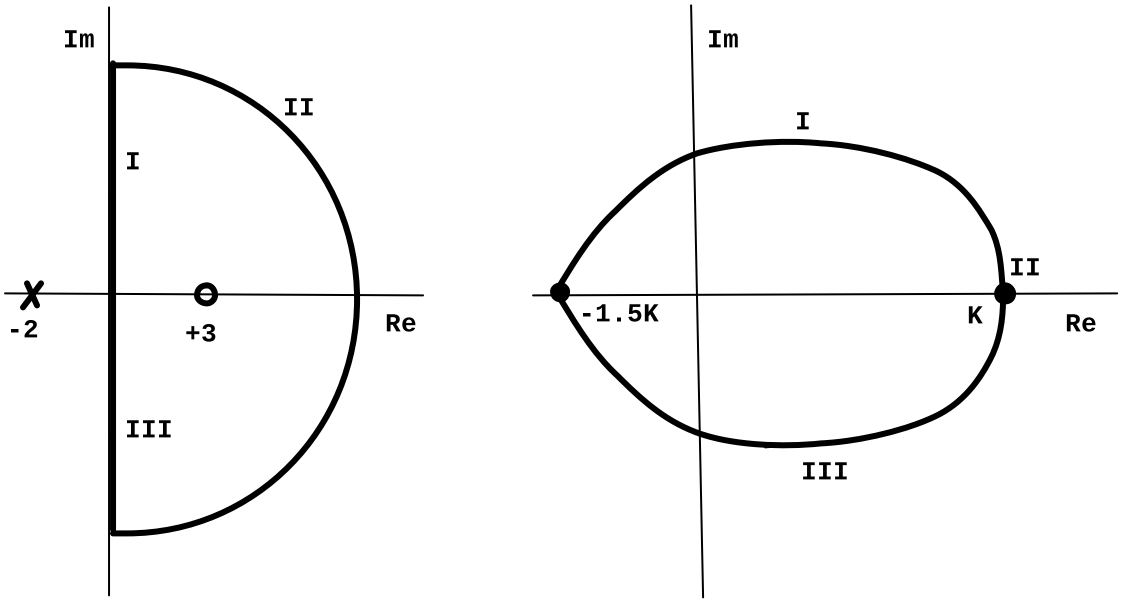
$$G(s) = -1.5K \cdot \frac{1-\frac{1}{3}s}{1+\frac{1}{2}s}$$

Los diagramas de Bode de amplitud y fase resultan:





A continuación se representan tanto el camino origen como la imagen del diagrama de Nyquist:



En el camino origen se han dibujado los polos y ceros de la función de transferencia en bucle abierto. Para el cálculo de la estabilidad debe ser tenido en cuenta que el número de polos P dentro del contorno origen es igual a 0.

El número N de rodeos alrededor del punto -1 será:

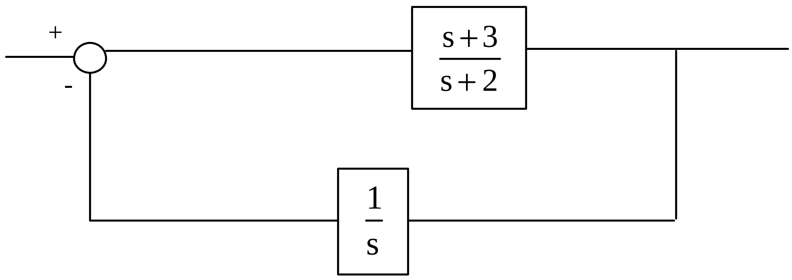
- Si 1.5K<1 (K<2/3) cero rodeos: N = 0
- Si 1.5K>1 (K>2/3) un rodeo en sentido de giro positivo: N = 1

Aplicando la fórmula de Cauchy: N = Z – P (donde P=0 como se ha visto) resulta:

- Si K>2/3 N=1 **Z=1** luego el sistema es inestable
- Si K<2/3 N=0 **Z=0** luego el sistema es estable

PROBLEMA 9

Para el sistema representado en la figura siguiente:

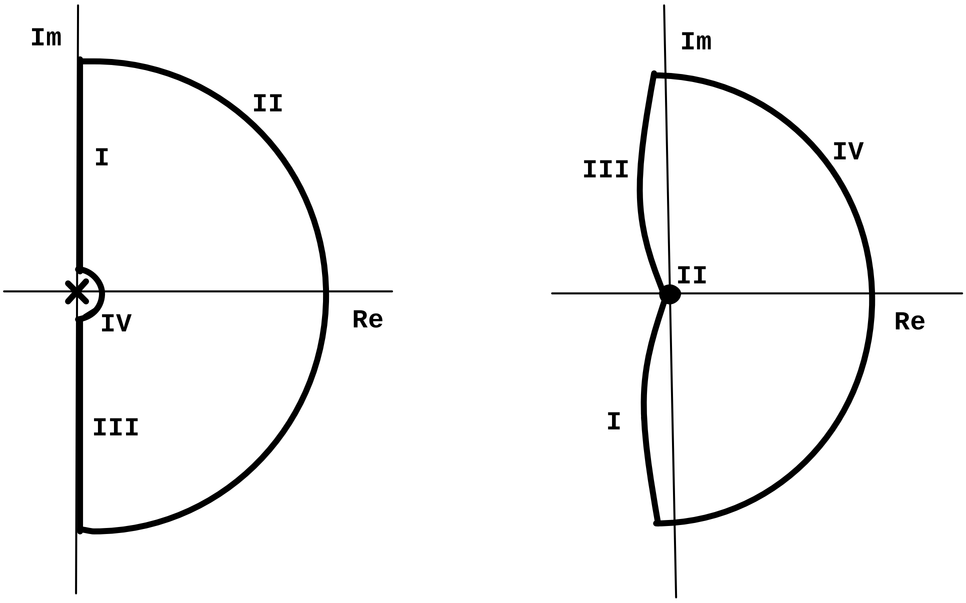


Se pide:

- Representar el diagrama de Nyquist
- Calcular el margen de fase y margen de ganancia del sistema

SOLUCIÓN

El camino origen y la imagen del diagrama de Nyquist se muestran a continuación:



El margen de ganancia K_G es infinito, ya que la fase nunca alcanza 180º (no se alcanza la frecuencia de cruce de fase ? $_f$).

El margen de fase ? se puede calcular buscando la frecuencia ? $_G$ de cruce de ganancia en el primer tramo (la frecuencia a la que la ganancia se hace 1, que en decibelios equivale a 0dB):

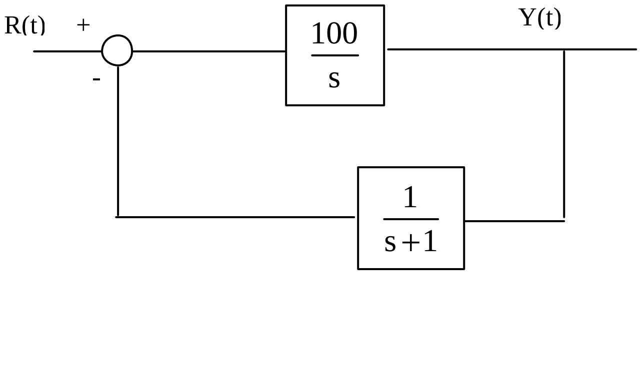
$$|G(jw)| = \frac{\sqrt{w^2+3^2}}{w\cdot\sqrt{w^2+2^2}} = 1 \quad \Rightarrow \quad w = 1.36\, {}^{rad}\!/\!_{s}$$

$$\angle G(jw) = \arctan\left(\frac{w}{3}\right) - 90º - \arctan\left(\frac{w}{2}\right) = -99.8º$$

$$g = 180º - 99.8º = 80.2º$$

PROBLEMA 10

Dado el sistema representado en la siguiente figura:



Se pide:

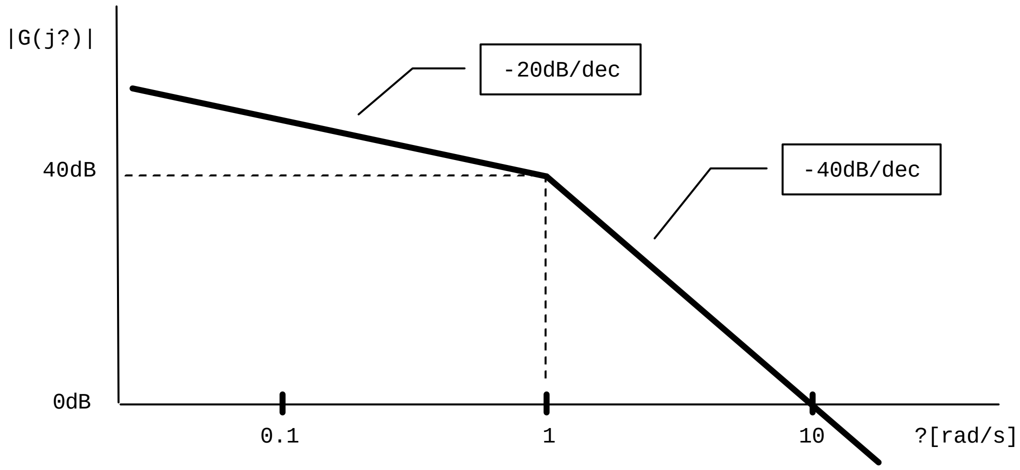
- Dibujar el diagrama de Bode asintótico de la función de transferencia en bucle abierto.
- Estudiar por Nyquist la estabilidad del sistema total.
- Calcular los márgenes de ganancia y fase sobre el diagrama de Bode asintótico y sobre el diagrama de Nyquist.

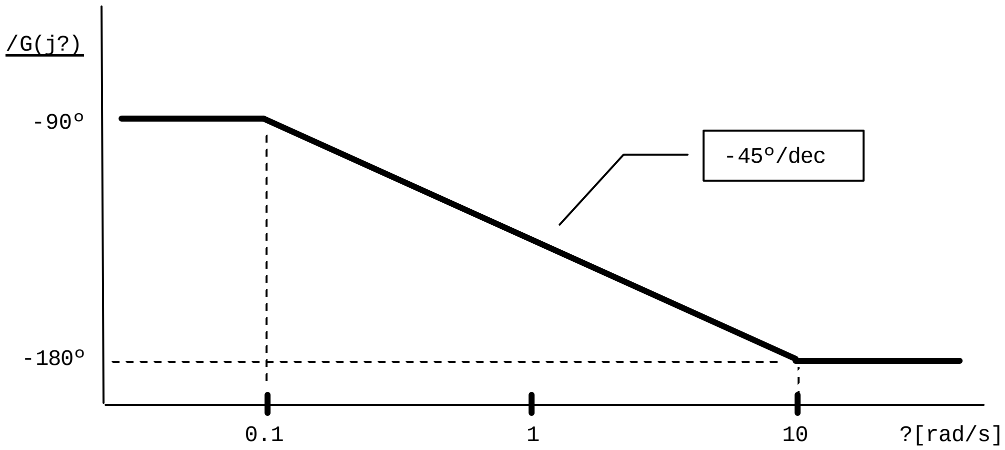
<u>SOLUCIÓN</u>

La función de transferencia en bucle abierto a utilizar es:

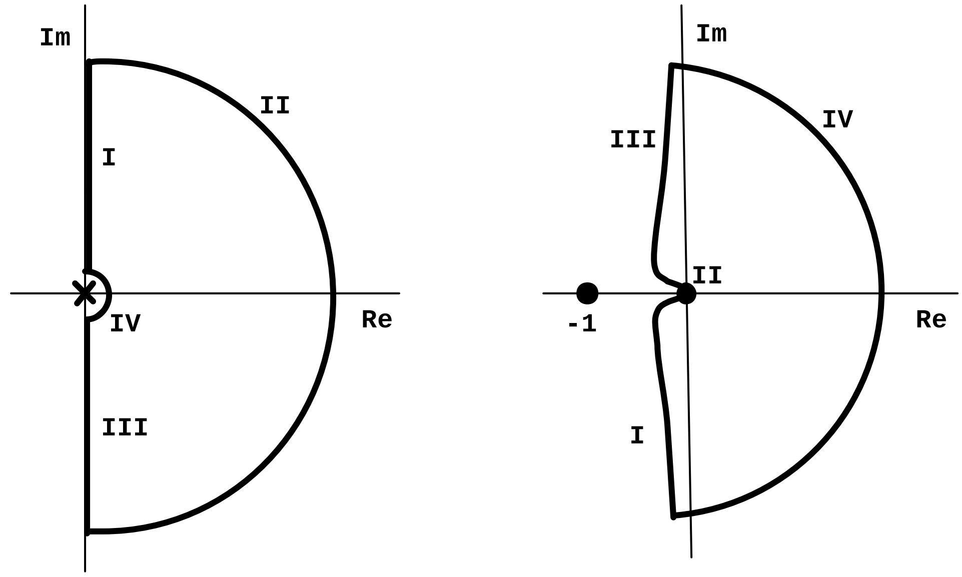
$$G(s)\cdot H(s) = \frac{100}{s(s+1)}$$

Los diagramas de Bode de amplitud y fase se representan a continuación:





El diagrama de Nyquist se muestra en la figura siguiente, tanto el camino origen como el camino imagen:



No existe ningún polo de la función de transferencia en bucle abierto dentro del camino origen, por lo tanto, P=0. Y la imagen no rodea al punto -1, por lo tanto N=0. Aplicando la fórmula de Cauchy: N = Z – P, se obtiene que Z=0. Por lo tanto, no hay ningún polo inestable y el sistema en bucle cerrado es estable.

El margen de ganancia K_G es infinito, ya que la fase nunca alcanza 180º (no se alcanza la frecuencia de cruce de fase $?_f$).

El margen de fase ? se puede calcular buscando la frecuencia $?_G$ de cruce de ganancia en el primer tramo (la frecuencia a la que la ganancia se hace 1, que en decibelios equivale a 0dB):

$$|G(jw)| = \frac{100}{w \cdot \sqrt{w^2 + 1^2}} = 1 \quad \Rightarrow \quad w = 9.97 \, {}^{rad}\!/_{s}$$

$$\angle G(jw) = -90º - \arctan(w) = -174.3º$$

$$g = 180º - 174.3º = 5.7º$$

Si intentamos estudiar la estabilidad no sobre el Nyquist sino sobre los diagramas asintóticos de Bode se obtendrían las siguientes frecuencias de cruce:

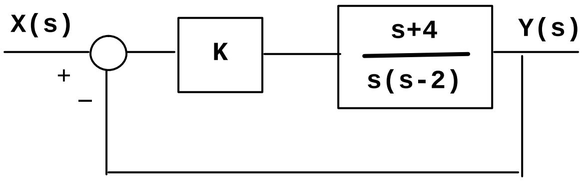
- Frecuencia $?_f$ de cruce de ganancia (0 dB): 10 rad/s
- Frecuencia $?_G$ de cruce de fase (-180º): 10 rad/s

De estos dos valores la frecuencia de cruce de ganancia es fiable, porque se produce en un punto del trazado asintótico en el que la diferencia respecto del trazado real es pequeña. Sin embargo la frecuencia de cruce de fase no es fiable, dado que se produce justo en un punto de cambio de pendiente, donde el error es máximo. De hecho, se obtiene una frecuencia de cruce de fase de 10 rad/s cuando en realidad este valor debe ser 8, ya que la fase real nunca alcanza los -180º.

Por tanto, si se desea calcular márgenes de ganancia y de fase sobre el diagrama de Bode, ha de hacerse sobre el diagrama real y no sobre el asintótico.

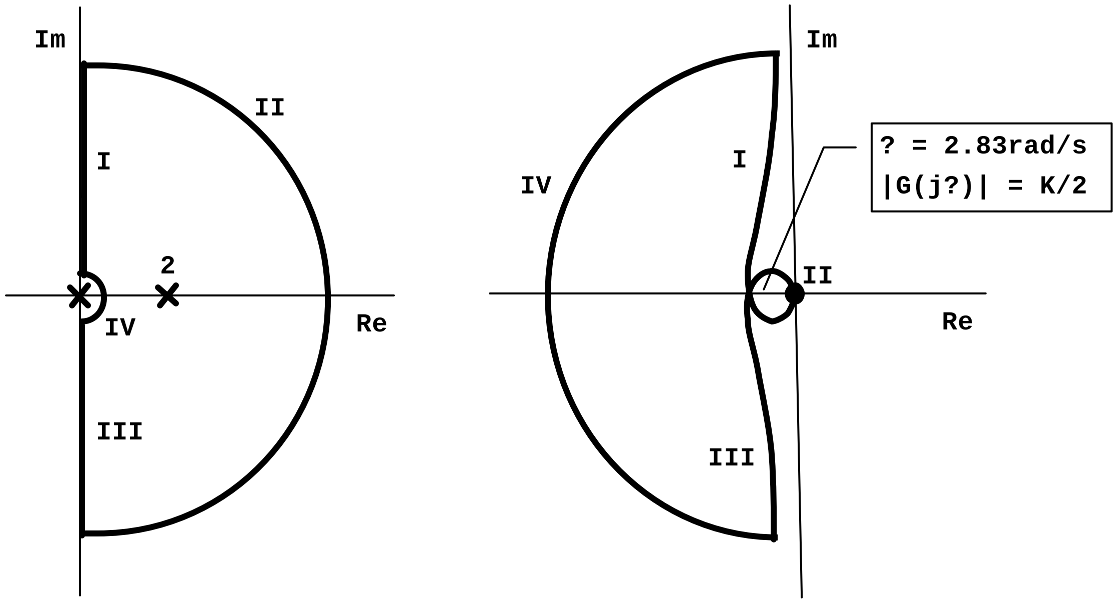
PROBLEMA 11

Estudiar por Nyquist la estabilidad del siguiente sistema en función del valor del parámetro K (K>0):



SOLUCIÓN

A continuación se representan el camino origen y el camino imagen de Nyquist para la función de transferencia considerada:



En el camino origen se han dibujado los polos de la función de transferencia en bucle abierto, s = 0 y s = 2. El polo en el origen se debe rodear y el polo en s=2 debe ser tenido en cuenta al calcular la estabilidad: el número de polos P dentro del contorno origen será igual a 1.

En la imagen se ha calculado la frecuencia para la que la fase es 180º, que ha resultado ser de 2.83rad/s. También se ha calculado el módulo de G(j?) a esa frecuencia, que ha resultado ser K/2.

El número N de rodeos alrededor del punto -1 será:

- Si K/2<1 (K<2) cero rodeos: N = 0
- Si K/2>1 (K>2) un rodeo en sentido de giro negativo: N = -1

Aplicando la fórmula de Cauchy: N = Z – P (donde P=1 como se ha visto) resulta:

- Si K>2 N=-1 **Z=0** luego el sistema es estable
- Si K<2 N=0 **Z=1** luego el sistema es inestable