Visión 3D

Estimación de la Matriz fundamental

Luis M. Jiménez – José M. Sebastián

Ingeniería de Sistemas y Automática (UMH)

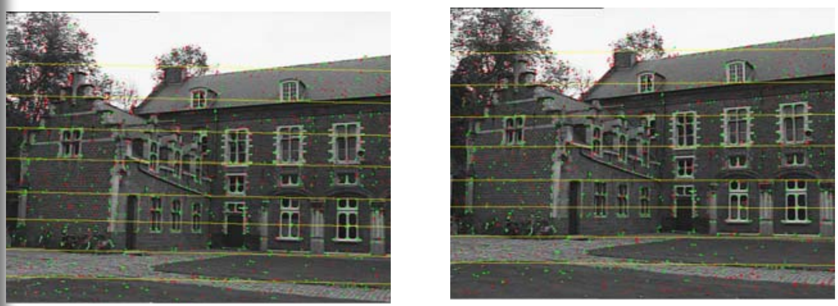
Objetivos

- Estimación de la matriz Fundamental a partir de un conjunto de puntos correspondientes en dos imágenes

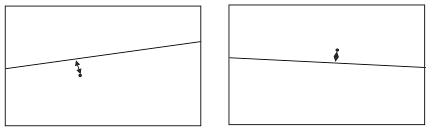
$$\tilde{m}'^{T}_i \, F \, \tilde{m}_i = 0$$

- Estimación de la matriz fundamental
  - Algoritmo de 8 puntos
  - Algoritmo de 7 puntos
  - Ajuste de epipolos (rango de F)
  - Normalización

Error de estimación



$$d^2 = d\left(\mathrm{m}'_i, F\mathrm{m}_i\right)^2 + d\left(\mathrm{m}_i, \mathrm{F}^{\mathrm{T}}\mathrm{m}'_i\right)^2$$



Cálculo de F

$$\tilde{m}'^T_i \, F \, \tilde{m}_i = 0 \qquad \tilde{m}' = \begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \tilde{m} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathrm{x'xf_{11} + x'yf_{12} + x'f_{13} + y'xf_{21} + y'yf_{22} + y'f_{23} + xf_{31} + yf_{32} + f_{33} = 0}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{x'_1 x_1} & \mathrm{x'_1 y_1} & \mathrm{x'_1} & \mathrm{y'_1 x_1} & \mathrm{y'_1 y_1} & \mathrm{y'_1} & \mathrm{x_1} & \mathrm{y_1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{x'_n x_n} & \mathrm{x'_n y_n} & \mathrm{x'_n} & \mathrm{y'_n x_n} & \mathrm{y'_n y_n} & \mathrm{y'_n} & \mathrm{x_n} & \mathrm{y_n} & 1 \end{bmatrix} f = 0$$

$$f = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}^T$$

$$\boxed{A \, f = 0}$$

Solución mínimos cuadrados: $SVD(A) \rightarrow A = UDV^T \Rightarrow f = v_n$

$\|f\| = 1$

No impone que F es singular

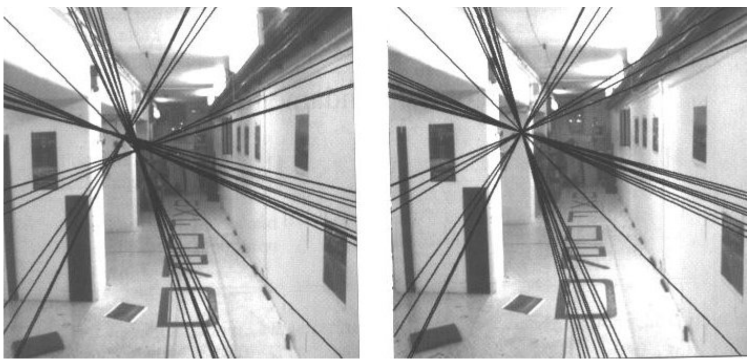
Imposición Restricciones de F

- La matriz F debe ser singular pero el algoritmo de mínimos cuadrados no impone esta restricción
- Solución:
  - Calcular la descomposición **SVD**(F) e imponer que el menor valor singular es cero.

$$F = UDV^T \longrightarrow F^* = UD^*V^T, \qquad |F^*| = 0$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \rightarrow D^* = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ajuste rango de F



Normalización

- La condición de la matriz A depende de los valores absolutos de x,y:
  - Puede haber columnas con valores muy elevados y otras con valores muy pequeños.
- Esto produce que la estimación sea muy sensible al ruido
- Solución: Normalizar las coordenadas

Normalización: Transformar las coordenadas de imagen: $\hat{m}_i = Tm_i, \hat{m}'_i = T'm'_i$

donde ***T*** y ***T'*** son trasformaciones lineales (traslación y escalado)

- Traslación: los centroides de los puntos $\hat{m}_i, \hat{m}'_i$ están en *(0,0)*
- Escalado: la distancia media de los puntos al origen es $\sqrt{2}$

Algoritmo 8 puntos normalizado

- Dadas n≥8 correspondencias de puntos en la imagen: $m_i \leftrightarrow m'_i$

(i) **Normalización**: calcular las transformaciones ***T***, ***T'*** (centroide en (0,0) y distancia media $\sqrt{2}$), y aplicarlas a cada una de las parejas de puntos $(m_i, m'_i) \rightarrow (\hat{m}_i, \hat{m}'_i)$

(ii) **Calcular la matriz fundamental** $\hat{F}'$ con las correspondencias $(\hat{m}_i, \hat{m}'_i)$ a partir del menor valor singular de la matriz $\hat{A}$ (último vector singular $\hat{v}_n$) *SVD(A)*

(iii) **Imponer la singularidad de F**: Reemplazar $\hat{F}'$ por $\hat{F} = UD^*V^T$ talque $|\hat{F}| = 0$ utilizando la *SVD(F).*

(iv) **Desnormalizar**: calcular $F = T'\hat{F}\,T$ correspondiente a las coordenadas originales.

Algoritmo 7 puntos normalizado

- Dadas n=7 correspondencias de puntos en la imagen:
  - El espacio nulo de A será de dimensión 2 (f_1, f_2)->(F_1, F_2)

$$\boxed{A\,f = 0}$$

  - La solución se obtiene imponiendo la singularidad de F

$$\det(\alpha\,F_1 + (1-\alpha)F_2) = 0$$

  - Es una ecuación cúbica en α-> (1 o 3 soluciones reales)

$$F = \alpha\,F_1 + (1-\alpha)F_2)$$

  - Se aplicaría el proceso de normalización y desnormalización indicado anteriormente

Otros métodos

- Minimización algebraica para imponer la singularidad de F:
  - Utiliza la distancia de Mahalanobis en lugar de la distancia cuadrática

- Minimizar la Distancia Geométrica

$$\sum_i \left(d(m_i,\hat{m}_i) + d(m_i',\hat{m}_i') \right)$$

$$m_i \leftrightarrow m_i' \quad \textit{correspondencias}$$

$$\hat{m}_i \leftrightarrow \hat{m}_i' \quad \textit{correspondencias "verdaderas" estimadas}$$

  - Algoritmo no lineal, se parte de la estimación de mínimos cuadrados
  - Requiere estimar P, P' a partir de F, para calcular las coordenadas "verdaderas"

Matriz Esencial

- Cuando las cámaras están calibradas (*A*, *A'*) (6 gdl)

$$\tilde{q}'_i \, E \, \tilde{q}_i = 0 \qquad \tilde{q}_i = A^{-1}\,\tilde{m} \qquad \tilde{q}'_i = A'^{-1}\,\tilde{m}'$$

  - Calcular la descomposición **SVD**(E) e imponer que el menor valor singular es cero y los otros dos son iguales.

$$E = UDV^T \longrightarrow E^* = UD^*V^T, \qquad \left|E^*\right| = 0$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \rightarrow D^* = \begin{bmatrix} \lambda_1+\lambda_2/2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1+\lambda_2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$