

# Visión 3D

Modelo de Captación de Imágenes basadas  
en un Par Estereoscópico mediante  
Geometría Projectiva



Luis M. Jiménez – José M. Sebastián

Ingeniería de Sistemas y Automática (UMH)

1

## Tabla de Contenidos

- **Introducción**
- Modelo de una Cámara
- Modelo de dos Cámaras
- Homografía entre planos
- Condición de epipolaridad
- Calibración

Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

2

## Introducción

- *Reconstrucción 3D mediante múltiples vistas:*
  - *Disposición Binocular* (Pasiva). Reconstrucción 3D por triangulación de puntos correspondientes.
  - *Disposición Trinocular* (Pasiva). Resuelve el problema de la correspondencia, con información adicional.
  - *Secuencia de Imágenes* (Activa). Extensión a sistemas móviles.

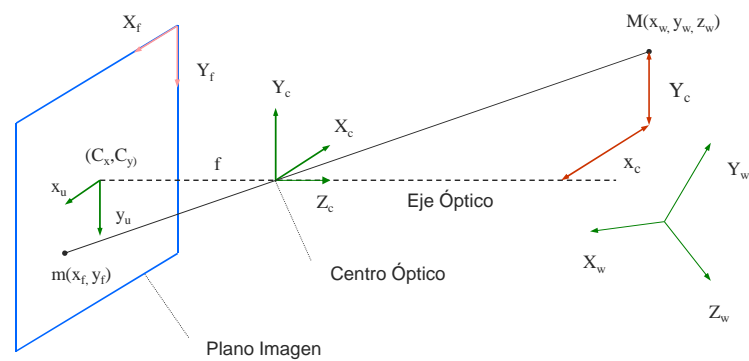
## Introducción

- La Visión Estereoscópica se basa en el principio de *Disparidad*: Reconstrucción 3D por triangulación de puntos correspondientes a partir de la escena observada por dos o más captadores.
- Etapas:
  - Preprocesamiento: Determinación de características en cada imagen.
  - Establecimiento de correspondencias
  - Extracción de la información tridimensional mediante triangulación

## Tabla de Contenidos

- Introducción
- **Modelo de una Cámara**
- Modelo de dos Cámaras
- Homografía entre planos
- Condición de epipolaridad
- Calibración

## Modelo de una Cámara



## Modelo de una Cámara

- Punto 3D en Coordenadas Proyectivas  $\tilde{M}$
- Punto en la Imagen en Coordenadas Proyectivas  $\tilde{m}$

Relación entre las Coordenadas de la Cámara y las Coordenadas del Mundo

$$\tilde{M}_c = \tilde{M}_c^w \tilde{M}_w$$

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_c^w & t_c^w \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{M}_c = \begin{bmatrix} R_c^w & t_c^w \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{M}_w$$

## Modelo de una Cámara

- Relación entre las Coordenadas de la Cámara y las Coordenadas Centradas de la Imagen

$$\begin{bmatrix} n x_u \\ n y_u \\ n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{m}_u = \tilde{A}_0 \tilde{M}_c$$

## Modelo de una Cámara

- Relación entre las Coordenadas Centrales y Laterales de la Imagen

$$\begin{bmatrix} n x_f \\ n y_f \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x & 0 & C_x \\ 0 & K_y & C_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n x_u \\ n y_u \\ n \end{bmatrix}$$

$$\tilde{m}_f = \tilde{A}_1 \tilde{m}_u$$

$$\begin{bmatrix} n x_f \\ n y_f \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x & -K_x \cot \vartheta & C_x \\ 0 & K_y / \text{sen } \vartheta & C_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n x_u \\ n y_u \\ n \end{bmatrix}$$

## Modelo de una Cámara

- Ecuaciones involucradas:

$$\tilde{M}_c = \tilde{M}_c^w \tilde{M}_w ; \quad \tilde{m}_u = \tilde{A}_0 \tilde{M}_c ; \quad \tilde{m}_f = \tilde{A}_1 \tilde{m}_u$$

- Ecuaciones conjuntas:

$$\tilde{m}_f = \tilde{A}_1 \tilde{A}_0 \tilde{M}_c^w \tilde{M}_w = \tilde{A} \tilde{M}_c^w \tilde{M}_w = \tilde{P} \tilde{M}_w$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{P} = \begin{bmatrix} P & p \end{bmatrix} \quad \tilde{M}_c^w = \begin{bmatrix} R_c^w & t_c^w \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$3 \times 3$     $3 \times 1$ 
 $3 \times 3$     $3 \times 1$ 
 $2 \times 2$

$$\tilde{m} = A \begin{bmatrix} R_c^w & t_c^w \end{bmatrix} \tilde{M}$$

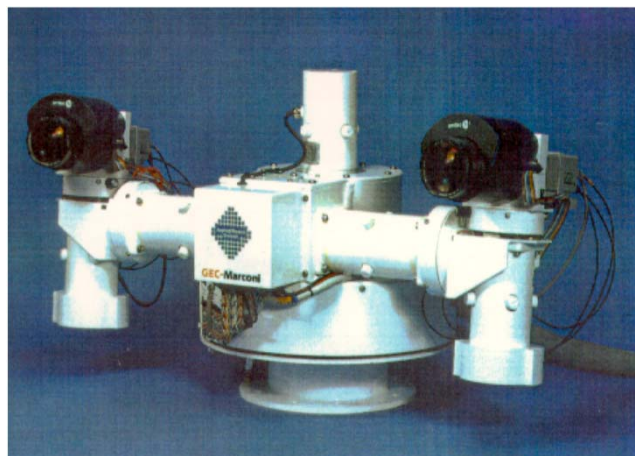
$$\tilde{m} = \begin{bmatrix} P & p \end{bmatrix} \tilde{M}$$

$$\tilde{m} = \tilde{P} \tilde{M}$$

## Tabla de Contenidos

- Introducción
- Modelo de una Cámara
- **Modelo de dos Cámaras**
  - Coordenadas del Mundo
  - Coordenadas de Cámara
- Homografía entre planos
- Condición de epipolaridad
- Calibración

## Modelo de dos Cámaras



## Modelo de dos Cámaras

La representación se puede realizar:

En coordenadas del mundo:

$$\tilde{m}_f = \tilde{P} \tilde{M}_w$$

- Presenta una excesiva dependencia del sistema de coordenadas del mundo, apareciendo términos que se cancelarán
- Las características geométricas dependerán de los parámetros de cada cámara y de la disposición entre ellas, pero no de puntos del mundo y de su representación).

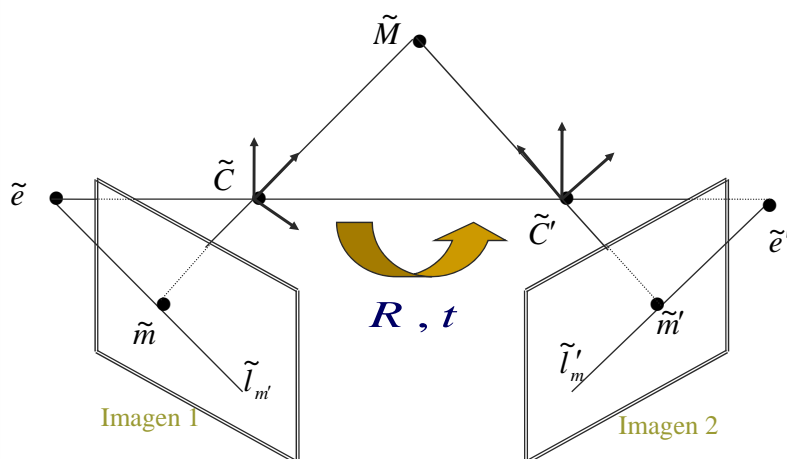
En coordenadas de la cámara:

$$\tilde{m}_f = \tilde{A} \tilde{M}_c^w \tilde{M}_w = \tilde{A} \tilde{M}_c$$

Con  $\tilde{M}_c^w = I$  Se define  $\tilde{M}_c^c = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

## Modelo de dos Cámaras Coordenadas de la Cámara

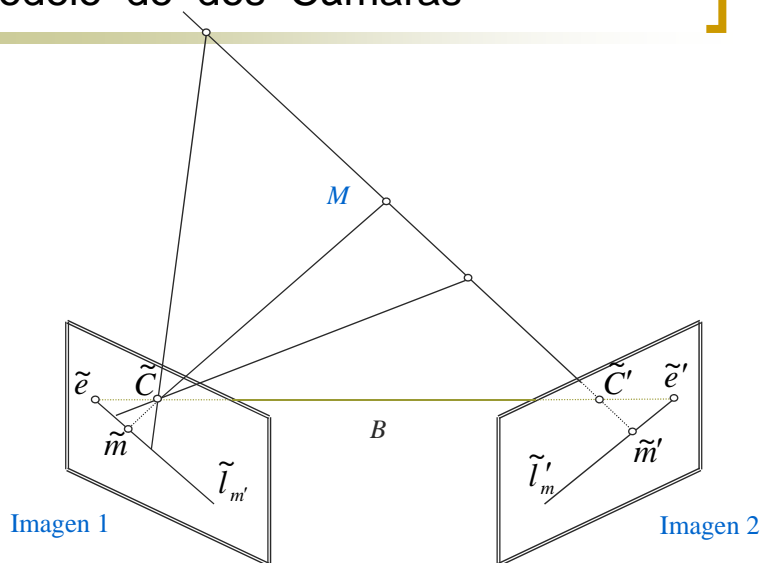


Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

## Modelo de dos Cámaras

- Punto en el espacio  $\tilde{M} = \begin{bmatrix} M \\ 1 \end{bmatrix}$
- Primera Cámara  $\tilde{C}, \tilde{R}et, \tilde{m}, \tilde{P}, \tilde{A}, R_1, t_1$
- Segunda Cámara  $\tilde{C}', \tilde{R}'et, \tilde{m}', \tilde{P}', \tilde{A}', R_2, t_2$
- Plano Epipolar  $[\tilde{M}, \tilde{C}, \tilde{C}']$

## Modelo de dos Cámaras





## Modelo de dos Cámaras

- Línea Epipolar sobre la primera cámara de un punto de la segunda cámara  $\tilde{m}' \Rightarrow \tilde{l}_m'$

- Línea Epipolar sobre la segunda cámara de un punto de la primera cámara  $\tilde{m} \Rightarrow \tilde{l}_m'$

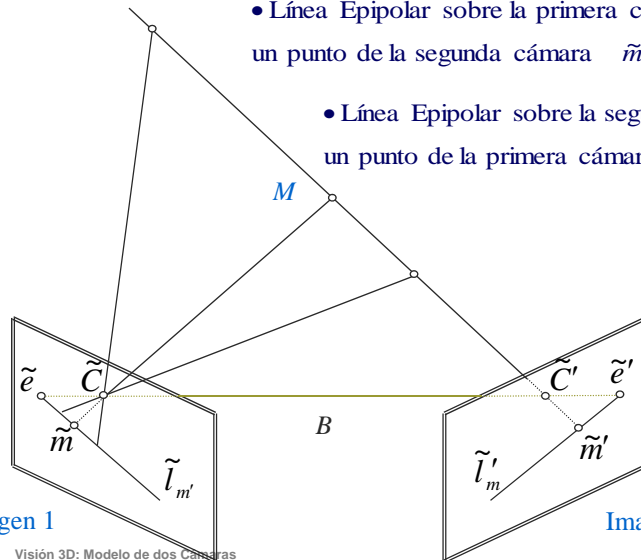


Imagen 1

Imagen 2

Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

17

## Modelo de dos Cámaras

- Epipolo de la primera cámara : Punto de corte de todas las líneas epipolares  $\tilde{l}_m' \Rightarrow \tilde{e}$

Proyección de  $\tilde{C}'$  sobre la primera cámara

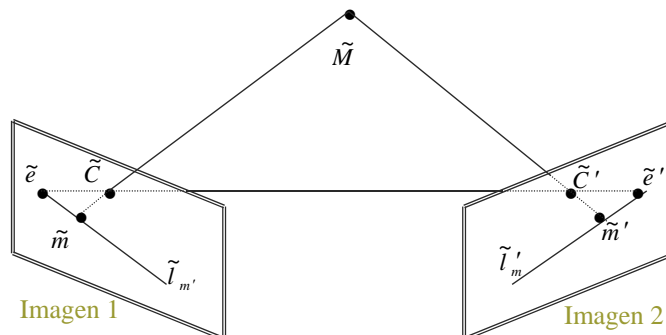


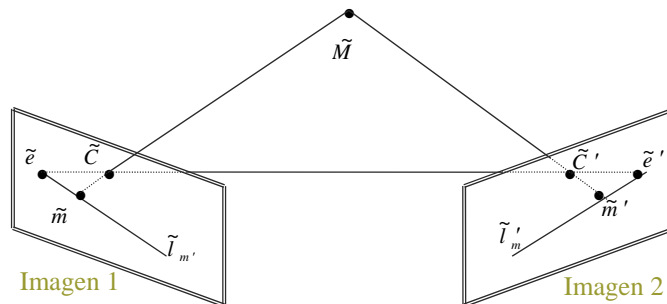
Imagen 1

Imagen 2

Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

## Modelo de dos Cámaras

- Epipolo de la segunda cámara : Punto de corte de todas las líneas epipolares  $\tilde{l}'_m \Rightarrow \tilde{e}'$   
Proyección de  $\tilde{C}$  sobre la segunda cámara



Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

## Modelo de dos Cámaras Coordenadas del Mundo

- Proyección de un punto:

$$\tilde{m} = \tilde{P} \tilde{M} = \begin{bmatrix} P & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ 1 \end{bmatrix} = PM + p$$

$$\tilde{m}' = \tilde{P}' \tilde{M} = \begin{bmatrix} P' & p' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ 1 \end{bmatrix} = P'M + p'$$

- Posición de los centros de las imágenes:

$$\tilde{M} = \tilde{C} \Rightarrow M = C \Rightarrow \tilde{m} = 0 \Rightarrow C = -P^{-1}p$$

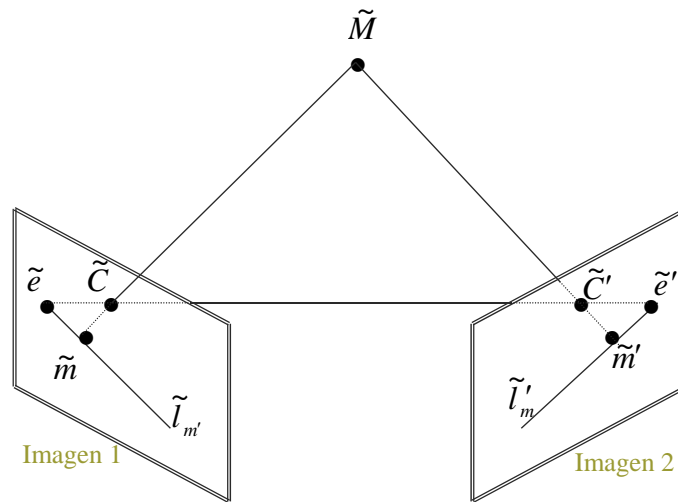
$$\tilde{M} = \tilde{C}' \Rightarrow M = C' \Rightarrow \tilde{m}' = 0 \Rightarrow C' = -P'^{-1}p'$$

$$\tilde{m} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

## Modelo de dos Cámaras

### Coordenadas del Mundo



Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

## Modelo de dos Cámaras

### Coordenadas del Mundo

- Epipolo de la segunda cámara : Proyección de  $\tilde{C}$

$$\tilde{e}' \cong \tilde{P}' \tilde{C} = \tilde{P}' \begin{bmatrix} -P^{-1} p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P' & p' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P^{-1} p \\ 1 \end{bmatrix} = p' - P' P^{-1} p$$

- Epipolo de la primera cámara : Proyección de  $\tilde{C}'$

$$\tilde{e} \cong \tilde{P} \tilde{C}' = \tilde{P} \begin{bmatrix} -P'^{-1} p' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P'^{-1} p' \\ 1 \end{bmatrix} = p - P P'^{-1} p'$$

Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

## Modelo de dos Cámaras

### Coordenadas del Mundo

- Recta epipolar en la segunda cámara, para  $\tilde{m}$ :

$$\tilde{l}'_m = \tilde{e}' \wedge \tilde{m}'$$

$$\tilde{m} = PM + p$$

Con  $\tilde{e}' \cong p' - P'P^{-1}p$

$$\tilde{m}' = P'M + p' = P'[P^{-1}\tilde{m} - P^{-1}p] + p'$$

$$\tilde{m}' = P'P^{-1}\tilde{m} + \boxed{p' - P'P^{-1}p} = P'P^{-1}\tilde{m} + \lambda\tilde{e}'$$

$$\tilde{l}'_m = \tilde{e}' \wedge \tilde{m}' = [p' - P'P^{-1}p] \wedge P'P^{-1}\tilde{m}$$

Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

## Modelo de dos Cámaras

### Coordenadas del Mundo

- Producto Vectorial:

$$\tilde{l}'_m = \tilde{e}' \wedge \tilde{m}' = [\tilde{e}']_{\wedge} \tilde{m}'$$

$$\tilde{e}' = \begin{bmatrix} \tilde{e}'_1 \\ \tilde{e}'_2 \\ \tilde{e}'_3 \end{bmatrix} \quad [\tilde{e}']_{\wedge} = \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{e}'_3 & \tilde{e}'_2 \\ \tilde{e}'_3 & 0 & -\tilde{e}'_1 \\ -\tilde{e}'_2 & \tilde{e}'_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

24

## Modelo de dos Cámaras

### Coordenadas del Mundo

- Recta epipolar en la primera cámara, para  $\tilde{m}'$ :

$$\tilde{l}_{m'} = \tilde{e} \wedge \tilde{m}$$

$$\tilde{m}' = P' M + p'$$

Con  $\tilde{e} \cong p - PP'^{-1} p'$

$$\tilde{m} = PM + p = P[P'^{-1} \tilde{m}' - P'^{-1} p'] + p$$

$$\tilde{m} = PP'^{-1} \tilde{m}' + \boxed{p - PP'^{-1} p'} = PP'^{-1} \tilde{m}' + \lambda \tilde{e}$$

$$\tilde{l}_{m'} = \tilde{e} \wedge \tilde{m} = \boxed{[p - PP'^{-1} p'] \wedge PP'^{-1} \tilde{m}'}$$

Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

## Modelo de dos Cámaras

### Coordenadas de la Cámara

Si se referencia las coordenadas al centro óptico de cada cámara, se cumplirá:

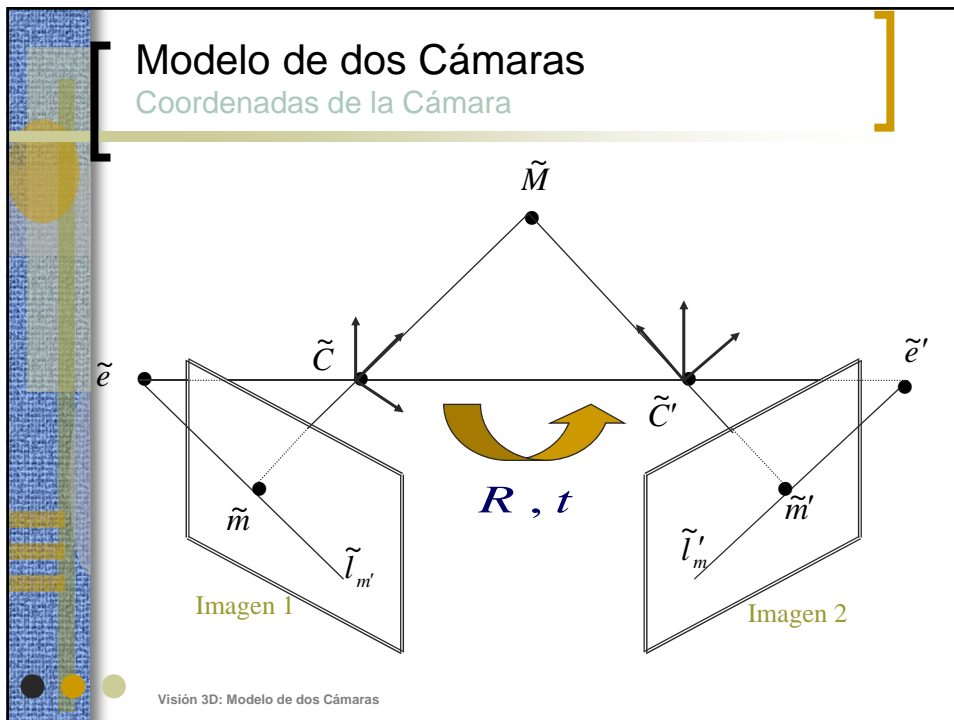
$$\tilde{m} = \tilde{m}_f = \tilde{A} \tilde{M}_c \quad ; \quad \tilde{m}' = \tilde{m}'_f = \tilde{A}' \tilde{M}_{c'}$$

Los ejes coincidentes con los centros y ejes ópticos de cada cámara, estarán relacionadas por una rotación y una traslación:

$$\tilde{M}_{c'} = \tilde{M}_c^c \tilde{M}_c \quad \text{con} \quad \tilde{M}_c^c = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \tilde{M}_c^{c'} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

26



### Modelo de dos Cámaras

Coordenadas de la Cámara

- Epipolo de la primera cámara:  
La proyección sobre la primera cámara es

$$\tilde{m} = \tilde{A} \tilde{M}_c = \tilde{A} \tilde{M}_c^{c'} \tilde{M}_c^{c'}$$

Para el epipolo se analiza la proyección del centro óptico de la segunda cámara sobre la primera

Si  $\tilde{M}_c^{c'} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \Rightarrow \tilde{m} = \tilde{e}$

$$\tilde{e} \cong \tilde{A} \begin{bmatrix} R^T & -R^T t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [A \ 0] \begin{bmatrix} -R^T t \\ 1 \end{bmatrix} = -A R^T t$$

$\tilde{e} \cong -A R^T t$

Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

28

## Modelo de dos Cámaras

### Coordenadas de la Cámara

- Epipolo de la segunda cámara:  
La proyección sobre la segunda cámara es

$$\tilde{m}' = \tilde{A}' \tilde{M}_{c'} = \tilde{A}' \tilde{M}_{c'}^c \tilde{M}_c$$

Para el epipolo se analiza la proyección del centro óptico de la primera cámara sobre la segunda

$$\text{Si } \tilde{M}_c = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \Rightarrow \tilde{m}' = \tilde{e}'$$

$$\tilde{e}' \cong \tilde{A}' \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [A' \ 0] \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} = A' t$$

$$\tilde{e}' \cong A' t$$

Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

29

## Modelo de dos Cámaras

### Coordenadas de la Cámara

- Recta epipolar en la segunda cámara, para  $\tilde{m}$ :

$$\tilde{l}'_m = \tilde{e}' \wedge \tilde{m}'$$

$$\text{Con: } \tilde{e}' \cong A' t \quad \tilde{m} = A M$$

$$\tilde{m}' = [A' \ 0] \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ 1 \end{bmatrix} = A' R M + A' t = A' R [A^{-1} \tilde{m}] + A' t$$

$$\tilde{l}'_m = \tilde{e}' \wedge \tilde{m}' = [A' t] \wedge A' R A^{-1} \tilde{m} = A'^{-T} [t] \wedge R A^{-1} \tilde{m}$$

$$\tilde{l}'_m = \tilde{e} \wedge \tilde{m} = [-A R^T t] \wedge A R^T A^{-1} \tilde{m} = -A^{-T} R^T [t] \wedge A^{-1} \tilde{m}$$

$$\tilde{l}'_m \cong -A^{-T} R^T [t] \wedge A^{-1} \tilde{m}'$$

$$\tilde{l}'_m \cong A'^{-T} [t] \wedge R A^{-1} \tilde{m}$$

Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

## Tabla de Contenidos

- Introducción
- Modelo de una Cámara
- Modelo de dos Cámaras
- **Homografía entre planos**
  - Homografía del Plano Infinito en Coordenadas del Mundo
  - Homografía del Plano Infinito en Coordenadas de la Cámara
  - Homografía entre puntos de un Plano
- Condición de epipolaridad
- Calibración

## Homografía entre Puntos del Plano del Infinito. Coordenadas del Mundo

- Punto proyectado  $\tilde{m} \cong \tilde{P} \tilde{M} = [P \quad p] \tilde{M}$

$$\text{Si } \tilde{M} = \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix} \in \Pi_{\infty} \Rightarrow \tilde{m} = P M \Rightarrow M = P^{-1} \tilde{m}$$

- Proyectando  $\tilde{M} \in \Pi_{\infty}$  en la segunda cámara

$$\tilde{m}' \cong \tilde{P}' \tilde{M} = [P' \quad p'] \begin{bmatrix} P^{-1} \tilde{m} \\ 0 \end{bmatrix} = P' P^{-1} \tilde{m} \cong \tilde{m}'$$

- Existe una relación entre los puntos proyectados en ambas cámaras para los puntos en el infinito. A esta relación entre puntos pertenecientes a un plano se le llama homografía. Homografía de los puntos del infinito :

$$\tilde{m}' \cong \tilde{H}_{\infty} \tilde{m} \quad \text{con} \quad \tilde{H}_{\infty} = P' P^{-1}$$



## Homografía entre Puntos del Plano del Infinito. Coordenadas de la Cámara

$$\text{Si } \tilde{m} = \tilde{A} \tilde{M}_c = [A \ 0] \tilde{M}_c \ ; \ \tilde{m}' = \tilde{A}' \tilde{M}_{c'} = [A' \ 0] \tilde{M}_{c'}$$

$$\tilde{M}_{c'} = \tilde{M}_{c'}^c \tilde{M}_c \quad \text{con} \quad \tilde{M}_{c'}^c = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ ; \ \tilde{M}_{c'} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Proyectando  $\tilde{M}_c = \begin{bmatrix} M_c \\ 0 \end{bmatrix} \in \Pi_\infty \Rightarrow \tilde{m} = A M_c \Rightarrow M_c = A^{-1} \tilde{m}$

- Proyectando  $\tilde{M}_c = \begin{bmatrix} M_c \\ 0 \end{bmatrix} \in \Pi_\infty$  en la otra cámara  $\tilde{m}' = \tilde{A}' \tilde{M}_{c'}$

$$\text{Con } \tilde{M}_{c'} = \begin{bmatrix} M_{c'} \\ 0 \end{bmatrix} = \tilde{M}_{c'}^c \begin{bmatrix} M_c \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow M_{c'} = R M_c = R A^{-1} \tilde{m}$$

$$\tilde{m}' \cong \tilde{A}' \tilde{M}_{c'} = A' M_{c'} = A' R A^{-1} \tilde{m} \Rightarrow \tilde{m}' \cong H_\infty \tilde{m} \quad \text{con} \quad H_\infty = A' R A^{-1}$$

## Homografía entre Puntos de un Plano

- Plano Imagen – Plano de Imagen
  - El Plano  $\Pi$  no pasa por el centro óptico  $C$

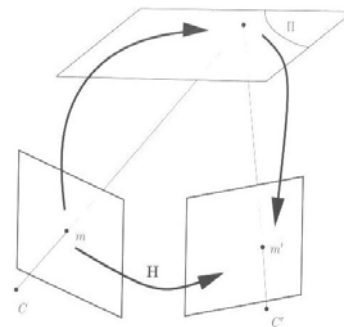
$$\tilde{m} = \tilde{P} \tilde{M} \ ; \ \tilde{m}' = \tilde{P}' \tilde{M}$$

$$\text{Si } \tilde{M} = \lambda \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \Pi \Rightarrow \tilde{m} \cong \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{m} \cong H_1 \tilde{M}_\Pi, \quad \tilde{M}_\Pi \cong H_1^{-1} \tilde{m}$$

$$\tilde{m}' \cong H_2 \tilde{M}_\Pi = H_2 H_1^{-1} \tilde{m}$$

$$\tilde{m}' \cong H_\Pi \tilde{m}$$



## Homografía entre Puntos de un Plano

- $\tilde{H}_\pi$  Tiene 8 grados de libertad (nueve elementos menos uno por el escalado)

Se puede obtener conociendo las proyecciones de cuatro puntos que sean base proyectiva :

Sean  $\tilde{M}_i \in \pi$  con  $i = 1, \dots, 4$

Si se conocen  $\tilde{m}_i, \tilde{m}'_i$  con  $\tilde{m}_i \cong \tilde{P}\tilde{M}_i$  ;  $\tilde{m}'_i \cong \tilde{P}'\tilde{M}_i$

Se obtiene  $\tilde{H}_\pi$

Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

## Homografía entre Puntos, Disposición General.

Coordenadas de la Cámara

Si  $\tilde{m} = \tilde{A} \tilde{M}_c = [A \ 0] \tilde{M}_c$  ;  $\tilde{m}' = \tilde{A}' \tilde{M}_{c'} = [A' \ 0] \tilde{M}_{c'}$

• Proyectando  $\tilde{M}_c = \begin{bmatrix} M_c \\ 1 \end{bmatrix} \in P^3 \Rightarrow \tilde{m} = A M_c \Rightarrow M_c = A^{-1} \tilde{m}$

• Proyectando  $\tilde{M}_c \in P^3$  en la otra cámara  $\tilde{m}' = \tilde{A}' \tilde{M}_{c'} = A' M_{c'}$

Con  $\tilde{M}_{c'} = \begin{bmatrix} M_{c'} \\ 1 \end{bmatrix} = \tilde{M}_c \begin{bmatrix} M_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R M_c + t \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M_{c'} = R M_c + t$

$\tilde{m}' \cong A' M_{c'} = A' (R M_c + t) = A' R A^{-1} \tilde{m} + A' t = H_\infty \tilde{m} + A' t$

$$\tilde{m}' \cong H_\infty \tilde{m} + \lambda \tilde{e}'$$

$$\tilde{e}' \cong A' t$$

Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

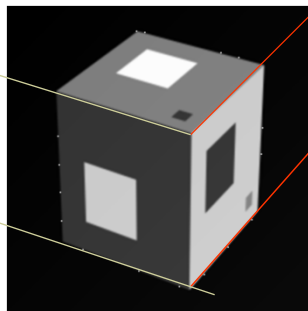
36

## Homografía entre Puntos del Plano Infinito

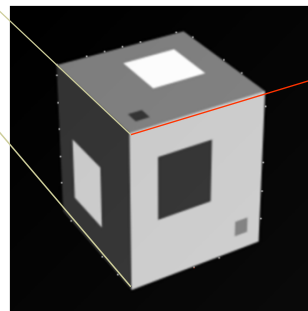
Cálculo de la Homografía entre Puntos del Infinito:

- Se hallan la proyección de puntos en el infinito (direcciones)
- Se obtiene la matriz para  $H$

Se puede emplear para hallar la correspondencia de cualquier dirección



Cámara Izquierda



Cámara Derecha

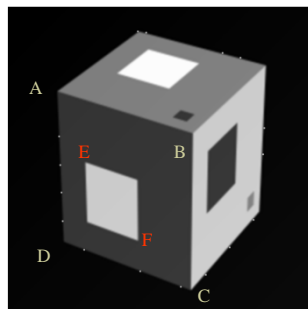
Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

## Homografía entre Puntos de un Plano

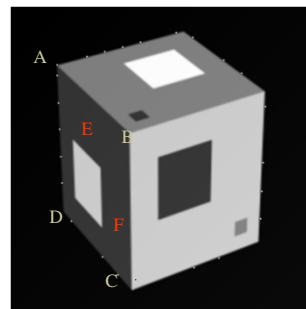
Cálculo de la Homografía entre Puntos del Plano:

- Se hallan la proyección de puntos del plano
- Se obtiene la matriz para  $H$

Se puede emplear para hallar la correspondencia de cualquier punto del plano



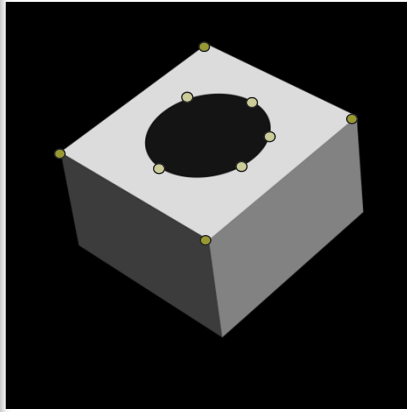
Cámara Izquierda



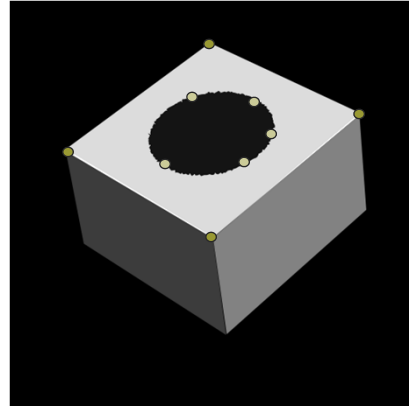
Cámara Derecha

Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

## Homografía entre Puntos de un Plano



Taladro Correcto



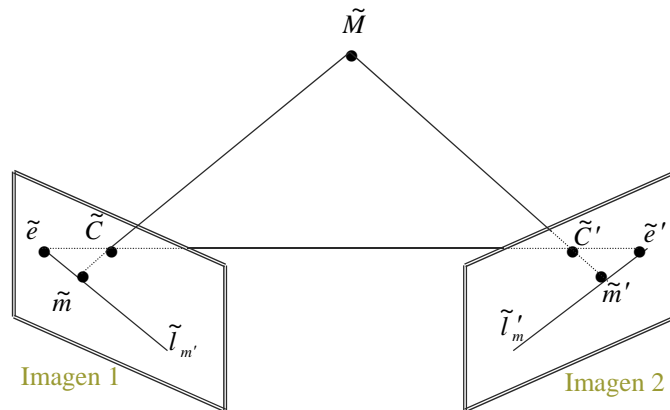
Taladro Defectuoso

## Tabla de Contenidos

- Introducción
- Modelo de una Cámara
- Modelo de dos Cámaras
- Homografía entre planos
- **Condición de epipolaridad**
  - Matriz Fundamental en Coordenadas del Mundo
  - Matriz Fundamental en en Coordenadas de Cámara
  - Matriz Esencial. Coordenadas Normalizadas
  - Homografía entre Haz de Líneas Epipolares
- Calibración

## Condición de Epipolaridad

- A cada punto en una imagen se asocia una línea Epipolar en la otra imagen:  $\tilde{m} \Rightarrow \tilde{l}'_m$  ;  $\tilde{m}' \Rightarrow \tilde{l}_m$



Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

## Condición de Epipolaridad

- Herramienta de representación matricial:

Producto vectorial de dos vectores

$$y^T \wedge x = [y_1 \quad y_2 \quad y_3]^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = y_{[\wedge]} x$$

$$\text{con } y_{[\wedge]} = \begin{bmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

42

## Condición de Epipolaridad Coordenadas del Mundo

- Recta epipolar en la segunda cámara, para  $\tilde{m}$ :

$$\tilde{l}'_m = \tilde{e}' \wedge \tilde{m}' = [p' - P'P^{-1}p] \wedge P'P^{-1}\tilde{m}$$

Se puede expresar  $\tilde{F} = [p' - P'P^{-1}p]_{[\wedge]} P'P^{-1}$

Con lo que queda :  $\tilde{l}'_m = \tilde{F} \tilde{m}$

Que transform a puntos de una imagen en líneas en la otra imagen (se denomina correlación)

De igual forma se puede obtener  $\tilde{l}_{m'} = \tilde{F}^T \tilde{m}'$

Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

## Condición de Epipolaridad Coordenadas del Mundo

- A la matriz  $F$  se la denomina matriz fundamental

$$\text{Cumple } \tilde{l}'_m = \tilde{F} \tilde{m} \quad \tilde{l}_{m'} = \tilde{F}^T \tilde{m}'$$

$$\text{Como } \tilde{m}' \in \tilde{l}'_m \Rightarrow \tilde{m}'^T \tilde{l}'_m = 0 \Rightarrow \tilde{m}'^T \tilde{F} \tilde{m} = 0$$

$$\text{Como } \tilde{m} \in \tilde{l}_{m'} \Rightarrow \tilde{m}^T \tilde{l}_{m'} = 0 \Rightarrow \tilde{m}^T \tilde{F}^T \tilde{m}' = 0$$

$$\text{Para los epipolos : } \tilde{F} \tilde{e} = 0 \quad ; \quad \tilde{F}^T \tilde{e}' = 0$$

La matriz fundamental resume toda la información de correspondencia entre dos puntos originados por la proyección de un mismo punto espacial.

Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

## Condición de Epipolaridad

- Matriz Fundamental:
  - Permite construir la condición de epipolaridad:
    - Dependiendo únicamente de las correspondencia entre puntos en las dos imágenes.
    - Sin depender del conocimiento de los parámetros de captación ni de la disposición del mundo
  - El determinante de la matriz fundamental es 0, lo que unido a la condición de escalado da SIETE g.d.l.
  - Para su cálculo se seleccionan puntos correspondientes en las dos imágenes, y se determinan con criterios lineales o no lineales.

Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

## Condición de Epipolaridad Coordenadas de Cámara

- Recta epipolar en la segunda cámara, para  $\tilde{m}$  :

$$\tilde{l}'_m \cong A'^{-T} [t] \wedge RA^{-1} \tilde{m}$$

Se puede expresar  $\tilde{F} = A'^{-T} [t] \wedge RA^{-1}$

Con lo que queda :

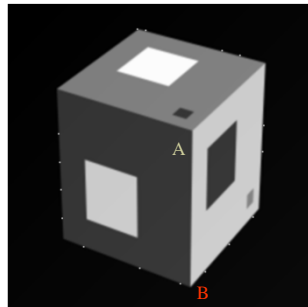
$$\tilde{l}'_m = \tilde{F} \tilde{m}$$

$$\tilde{m}'^T \tilde{F} \tilde{m} = 0$$

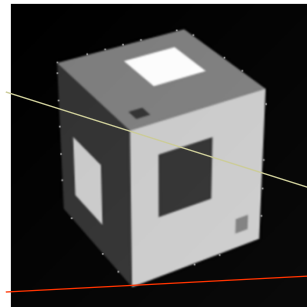
Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

## Condición de Epipolaridad

Para cada punto de la primera (o segunda) imagen se puede determinar la línea epipolar en la segunda (o primera) imagen, tal que el punto correspondiente estará sobre ella.



Cámara Izquierda



Cámara Derecha

Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

## Condición de Epipolaridad.

### Matriz Esencial

- Si se define la expresión de un punto de la imagen en coordenadas Normalizadas como:

$$\tilde{m} = A\tilde{q} \Rightarrow \tilde{q} = A^{-1}\tilde{m} ; \tilde{m}' = A'\tilde{q}' \Rightarrow \tilde{q}' = A'^{-1}\tilde{m}'$$

$$\text{Entonces } \tilde{m}'^T F \tilde{m} = \tilde{m}'^T A'^{-T} t_{[\wedge]} R A^{-1} \tilde{m} =$$

$$= \tilde{q}'^T t_{[\wedge]} R \tilde{q} = \tilde{q}'^T E \tilde{q} = 0 \quad \text{con } E = t_{[\wedge]} R$$

La matriz  $E$  se denomina Matriz Esencial y expresa que la condición de Epipolaridad (si las coordenadas están normalizadas, implica que se conocen los parámetros intrínsecos) sólo depende del movimiento relativo existente entre los sistemas ópticos de las dos cámaras.

Es especialmente útil cuando se maneja una cámara móvil ( $A' = A$ )

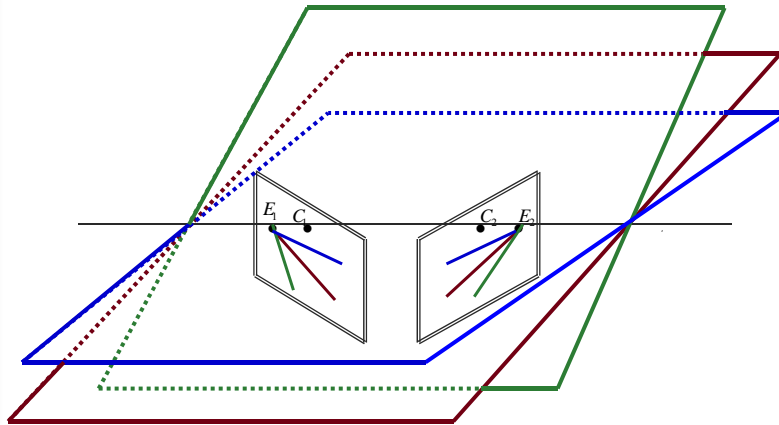
6 g.d.l. - Dos valores singulares iguales

Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

48

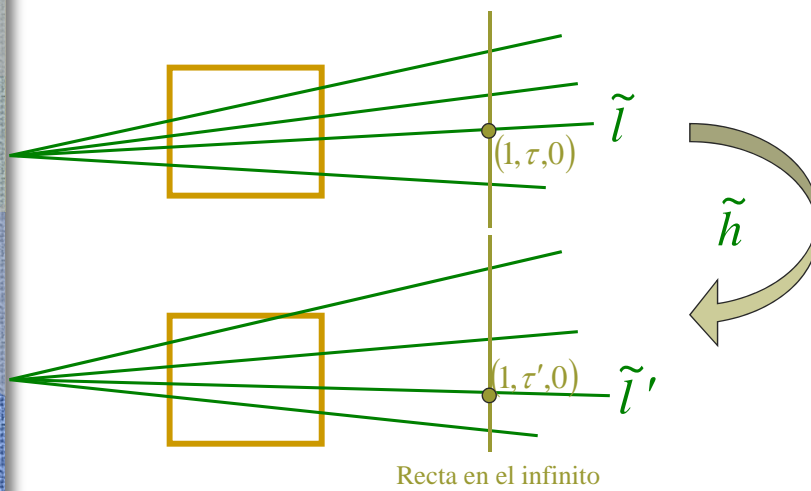


Condición de Epipolaridad.  
Homografía entre Haces



Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

Condición de Epipolaridad.  
Homografía entre rectas epipolares



Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

## Condición de Epipolaridad. Homografía entre Haces

- Los haces de rectas epipolares son homográficos: sus parámetros están relacionados por una homografía:

$$\tau \rightarrow \tau' = \frac{a\tau + b}{d\tau + c} = -\frac{h_2\tau + h_1}{h_4\tau + h_3}$$

- Estos parámetros se obtienen por los puntos de corte con cualquier rectas: por ejemplo con la recta en el infinito

Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

## Parametrización de la matriz fundamental

$$F = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & -e_1h_1 - e_2h_2 \\ h_3 & h_4 & -e_1h_3 - e_2h_4 \\ -e'_1h_1 - e'_2h_3 & -e'_1h_2 - e'_2h_4 & e_1e'_1h_1 + e_2e'_1h_2 + e_1e'_2h_3 + e_2e'_2h_4 \end{bmatrix}$$

Siendo los epipolos:

$$\tilde{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad \tilde{e}' = \begin{bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

## Geometría Epipolar. Matriz Fundamental Resumen:

- La matriz fundamental posee 7 grados de libertad
  - 2 para cada epipolo (2x2)
  - 3 por la relación homográfica entre los haces de rectas
- La matriz fundamental  $F = A'^{-T} t_{[\wedge]} R A^{-1}$ 
  - 3 por la rotación
  - 2 por la traslación (F no depende de la magnitud de la traslación, sólo de la dirección)
  - 2 por los parámetros intrínsecos (de los 10). La base de la calibración proyectiva es encontrar las relaciones (no lineales) entre ellos
- Ante rotación pura la matriz fundamental es nula
- Relación entre la matriz fundamental y la homografía de cualquier plano  $F^T H_\pi + H_\pi^T F = 0$

Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

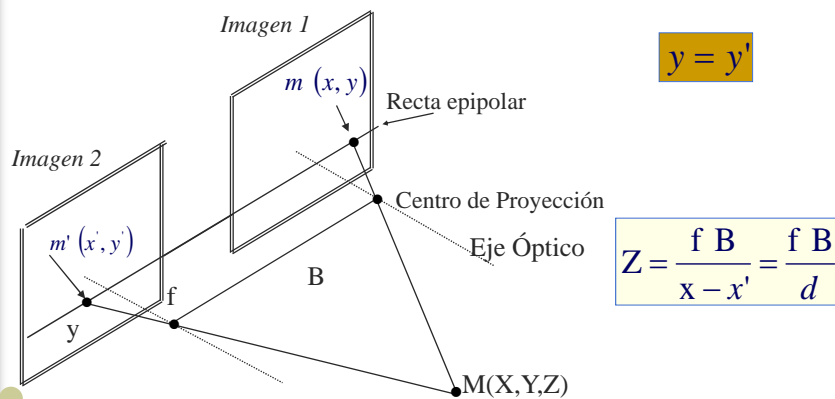
## Cámaras de Ejes Alineados

- Sistemas de ejes alineados

Restricción epipolar:

$$F = A'^{-T} t_{[\wedge]} A^{-1} \quad \longrightarrow \quad F = e_{[\wedge]} = e'_{[\wedge]}$$

$$y = y'$$



$$Z = \frac{f B}{x - x'} = \frac{f B}{d}$$

Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

54

## Comparación

### ■ EJES ALINEADOS

- **Ventaja:** Simplicidad de cálculo
- **Inconvenientes:**
  - Dificultad de construcción
  - Si **B** es alto, las imágenes son muy distintas, con posibles malas correspondencias
  - Si **B** es bajo, se obtiene mala precisión

### ■ EJES CONVERGENTES

- **Ventajas:**
  - Facilidad de construcción
  - Correspondencia sencilla si la disparidad es baja
- **Inconvenientes:**
  - Complejidad de cálculo
  - Si **B** es alto, la correspondencia es difícil, oclusiones
  - Si **B** es bajo, se obtiene mala precisión

Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

## Rectificado

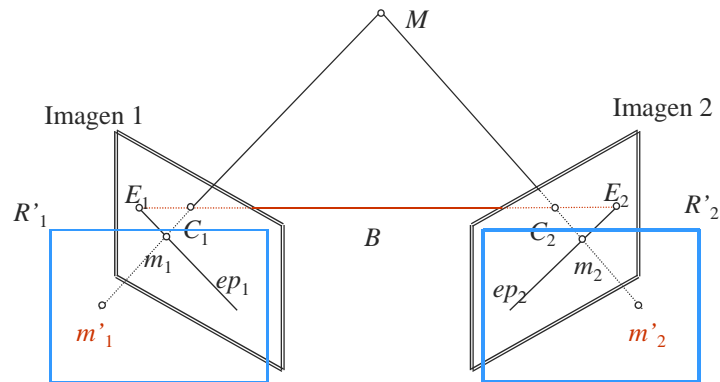
### ■ RECTIFICADO:

- **Reproyectar las imágenes de las cámaras en dos nuevos planos proyectivos alineados.**
- **Ventaja:**
  - **Simplifica la correspondencia**
- **Inconvenientes:**
  - **Coste computacional**
  - **Posible pérdida de precisión**

Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

56

## Rectificado



- Rectifica las imágenes, mediante una homografía, a la disposición deseada (ejes alineados o convergentes).

Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

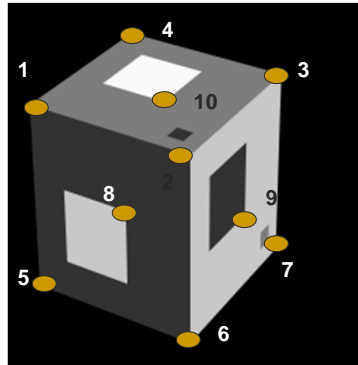
57

## Rectificado

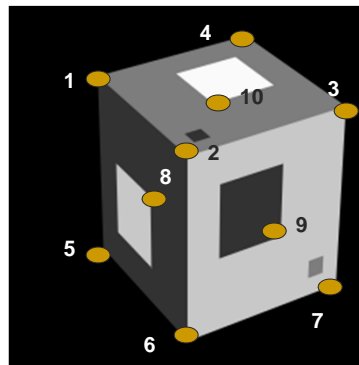
- Estrategias:
  - Se conoce exactamente todos los datos de calibración:
    - Se fija una dirección de ejes alineados, calculándose los ángulos
    - Para cada punto de la imagen original se obtiene el punto rectificado
  - No se conocen exactamente los datos de calibración:
    - Se obtiene puntos correspondientes en ambas imágenes
    - A partir de ellos se calcula la homografía para una proyección deseada ( $y=y'$ )
    - Para cada punto de la imagen original se obtiene el punto rectificado

Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

## Rectificado

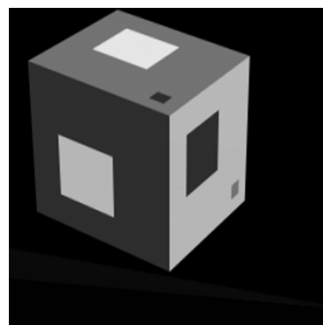


**Imagen izquierda**

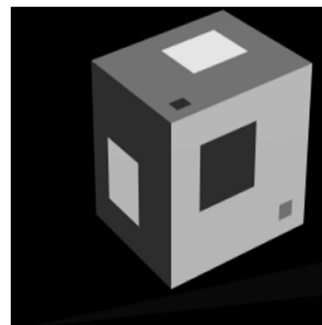


**Imagen derecha**

## Rectificado

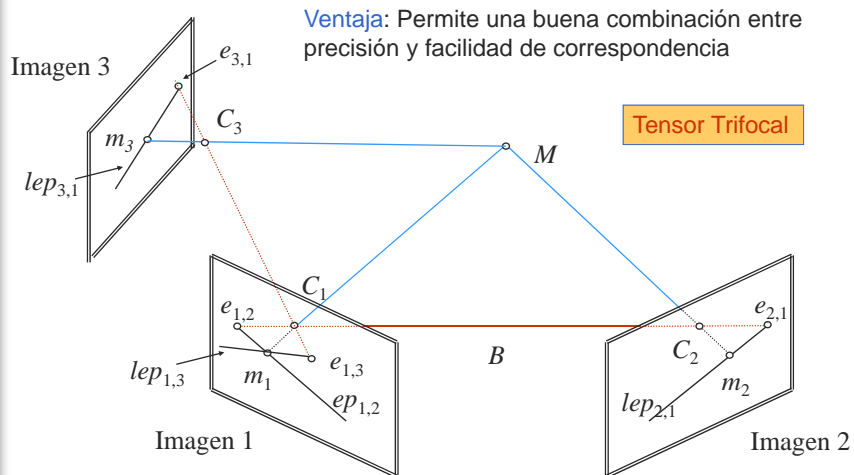


**Imagen izquierda  
rectificada**



**Imagen derecha  
rectificada**

## Visión Trinocular: geometría epipolar



Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

61

## Calibración Estereoscópica

- **Calibración Proyectiva:** Conocer la matriz  $F$  fundamental: se obtiene directamente los epipolos y la homografía entre las rectas epipolares
- **Calibración Afín:** Se conoce la matriz  $F$  fundamental y la homografía entre puntos en el infinito  $H_\infty$
- **Calibración Euclídea:** Se conocen los parámetros intrínsecos y extrínsecos involucrados en la captación

Visión 3D: Modelo de dos Cámaras

62