Visión 3D

Geometría Proyectiva

Luis M. Jiménez – José M. Sebastián

Ingeniería de Sistemas y Automática (UMH)

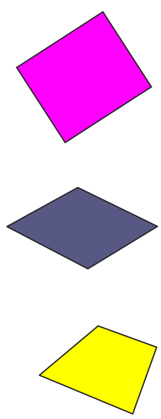
Tabla de Contenidos

Qué es la Geometría Proyectiva

- Geometría Euclídea: Invarianza de longitudes y áreas. Se define el círculo. Transformaciones: rotación, traslación. Coordenadas cartesianas
- Geometría Afín: Invarianza del paralelismo, relación de distancias. Se define el paralelogramo, las parábolas, elipses e hipérbolas. Coordenadas cartesianas oblicuas.
- Geometría Proyectiva: Invarianza de la relación doble o “cross-ratio”. Se define la cónica, cuádricas. Coordenadas proyectivas u homogéneas

Qué es la Geometría Proyectiva

Transformación



Euclídea

$$AD = cte$$

Afín

$$\frac{AB}{AD} = cte$$

Proyectiva

$$\frac{AC/AD}{BC/BD} = cte$$

Qué es la Geometría Proyectiva

- Qué aporta la Geometría Proyectiva a la Visión Artificial
  - El proceso de proyección central (modelo pinhole) es básicamente proyectivo: no es ni euclídeo (no conserva las distancias) ni afín (no conserva la noción de paralelismo)
  - El reconocimiento de formas del ser humano se basa en parte también en características proyectivas invariantes.
  - Suministra un modelo lineal (si no hay distorsiones) del proceso de captación de imágenes.
  - Permite estructurar la información según su robustez.
  - Homogenización de elementos. Dualidad entre puntos y rectas en un plano
  - Transformación entre planos proyectivos
  - Correlación entre puntos y rectas cuando se manejas distintos planos proyectivos

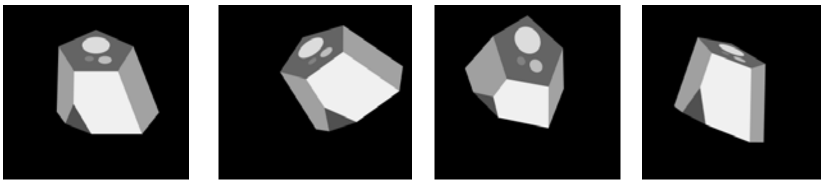
Qué es la Geometría Proyectiva

- Homogenización de elementos. Dualidad entre puntos y rectas en un plano
  - Geometría Euclídea: Rectas en un plano:
    - Hay una única recta que pasa por dos puntos dados
    - Una una única que recta que pasa por un punto dado y tiene una dirección absoluta dada
    - Dos rectas que no coinciden, o tienen un único punto de intersección o tienen la misma dirección absoluta
- Geometría Proyectiva: se sustituye dirección absoluta por puntos en el infinito, y todos los puntos en el infinito por la recta en el infinito:
  - Hay una única recta entre dos puntos distintos
  - Hay un único punto entre dos rectas distintas

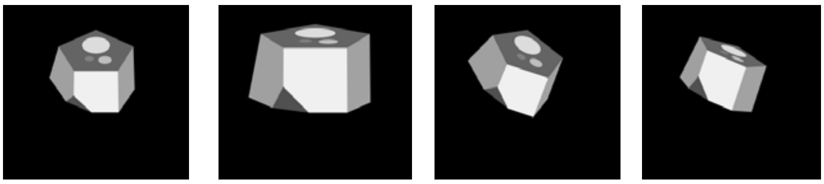
Qué es la Geometría Proyectiva

- No conserva la distancias
- No conserva las rectas paralelas
- No conserva los ángulos

Qué es la Geometría Proyectiva



Primera Pieza



Segunda Pieza

Qué es la Geometría Proyectiva

	Euclideo	Similaridad	Afín	Proyectivo
Transformaciones:				
Rotación, traslación	X	X	X	X
Escalado isotrópico		X	X	X
Escalado en ejes			X	X
Trasformaciones perspectiva				X
Invariantes:				
Distancia	X			
Ángulos, ratios de distancias	X	X		
Paralelismo, centro de masa	X	X	X	
Incidencia, cross-ratio	X	X	X	X

Tabla de Contenidos

Espacio Proyectivo P^n

$$\tilde{x} \in P^n \quad \text{si} \quad \tilde{x} = [x_1, \cdots, x_{n+1}]^T \text{ con algún } x_i \neq 0$$

$$\tilde{x}, \tilde{y} \in P^n \ ; \ \tilde{x} \cong \tilde{y} \quad \text{si existe } \lambda \neq 0 \quad \text{tal que} \quad x_i = \lambda y_i$$

Colineación : Transformación proyectiva entre objetos (del mismo tipo) en un espacio proyectivo

Se representa por matrices $\tilde{A}_{(n+1)\times(n+1)}$ (normalmente invertibles)

$$\rho \tilde{y} = \tilde{A}\tilde{x}$$

Conjunto de las $\tilde{A} \Rightarrow$ Grupo proyectivo.

Tabla de Contenidos

Recta Proyectiva P^1

Punto perteneciente recta proyectiva $\tilde{x} \in P^1 \Rightarrow \tilde{x} = [x_1, x_2]^T$

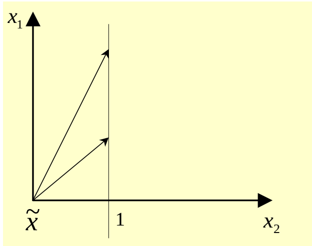
* Si $x_2 \neq 0$ se puede poner como

$$\tilde{x} = x_2 \left[\frac{x_1}{x_2}, 1 \right]^T$$

* Si se representa $X_1 = \dfrac{x_1}{x_2} = \alpha$

  X es la coordenada de la recta afín.

  α es el parámetro proyectivo.

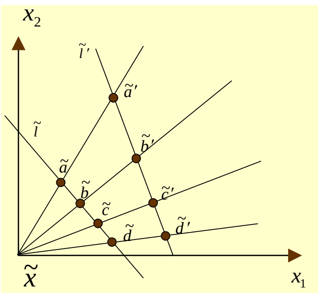


* De esta forma cada punto representa una dirección.
* Faltaría por considerar el punto $[x_1, 0]^T$ que no pertenece a la recta afín. Es el punto en el infinito.

Recta Proyectiva P^1

"Cross-Ratio" o Razón doble de cuatro puntos:

$C_r\left\{\tilde{a}, \tilde{b}; \tilde{c}, \tilde{d}\right\}$ si se denomina por $\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c, \alpha_d$ los parametros proyectivos de cada punto



$$C_r\left\{\tilde{a}, \tilde{b}; \tilde{c}, \tilde{d}\right\} = \frac{\alpha_a - \alpha_c}{\alpha_a - \alpha_d} : \frac{\alpha_b - \alpha_c}{\alpha_b - \alpha_d}$$

Es invariante ante cualquier colinealidad.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} r & s \\ u & v \end{bmatrix}$$

Recta Proyectiva P^1

•El "Cross-Ratio" o razón doble de cuatro puntos depende del orden en que se tomen los puntos:

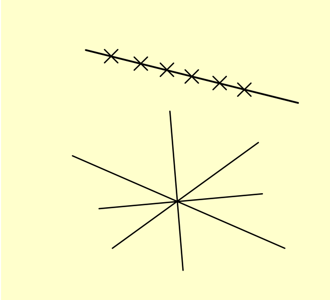
Así si: $$C_r\left\{\tilde{a},\tilde{b};\tilde{c},\tilde{d}\right\}=\frac{\alpha_a-\alpha_c}{\alpha_a-\alpha_d}:\frac{\alpha_b-\alpha_c}{\alpha_b-\alpha_d}=\tau$$

Se pueden obtener : $\tau\,,\frac{1}{\tau}\,,1-\tau\,,\frac{1}{1-\tau}\,,\frac{\tau-1}{\tau}\,,\frac{\tau}{\tau-1}$

Tabla de Contenidos

Plano Proyectivo P^2

* Punto $\quad \tilde{x} \in P^2 \Rightarrow \tilde{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$
* Recta $\quad \tilde{l} \in P^2 \Rightarrow \tilde{l} = [l_1, l_2, l_3]^T$
* Recta que pasa por un punto $\quad \tilde{l}^T \cdot \tilde{x} = 0$
* Dualida entre puntos y rectas
  - Conjunto de puntos que están en una recta.
  - Conjunto de rectas que pasan por punto.

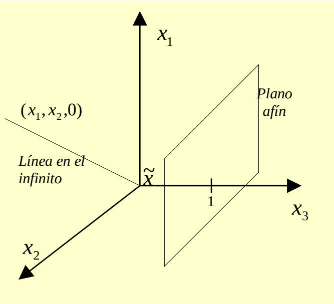


Plano Proyectivo P^2

*Si $x_3 \neq 0 \quad \tilde{x} = [x_1, x_2, x_3]^T \Rightarrow \tilde{x} = [\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1]^T =$

$$= [\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, 1]^{\mathrm{T}}$$

*Este conjunto de puntos define el plano afín



*Falta por considerar los puntos con $x_3 = 0$ que define la recta en el infinito.

Plano Proyectivo P^2

* Pertenencia de un punto a una recta en el plano proyectivo

$$\tilde{l}^T \cdot \tilde{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 = 0$$

* Pertenencia de un punto a una recta en el plano afín.

$$l_1 X_1 + l_2 X_2 + l_3 = 0$$

* Punto que pertenece a una recta que pasa por los puntos $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$

$$\tilde{x} = \alpha \tilde{x}_1 + \beta \tilde{x}_2 \qquad \text{ó} \qquad \tilde{x} = \gamma \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$$

$$\text{y la recta} \qquad \tilde{l} = \tilde{x}_1 \wedge \tilde{x}_2 \quad \Rightarrow \quad \tilde{l}^T \tilde{x} = 0$$

Plano Proyectivo P^2

- Producto Vectorial:

$$\tilde{l} = \tilde{x} \wedge \tilde{y} = [\tilde{x}]_\wedge \tilde{y}$$

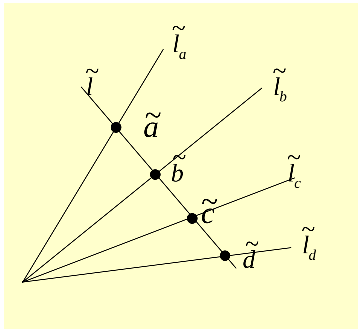
$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} \qquad [\tilde{x}]_\wedge = \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{x}_3 & \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 & 0 & -\tilde{x}_1 \\ -\tilde{x}_2 & \tilde{x}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Plano Proyectivo P^2

* "Cross-Ratio" o razón doble de cuatro rectas que se cortan en un punto

$$\{\tilde l_a, \tilde l_b; \tilde l_c, \tilde l_d\} = \{\tilde a, \tilde b; \tilde c, \tilde d\}$$

Es independiente de la recta $\tilde l$ que corte a las cuatro rectas.



* Haz de rectas : Rectas que pasan por un punto fijo. Es un elemento proyectivo de dimensión uno.

$$l = \alpha\, l_1 + \beta\, l_2$$

Plano Proyectivo P^2

* Colineación en el plano proyectivo. Forma un grupo proyectivo

$$\rho\, \tilde y = \tilde A\, \tilde x \quad \Rightarrow \quad \tilde A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

* Subgrupo afín $\tilde A = \begin{pmatrix} a_{33} B_{2x2} & a_{33} b_{2x1} \\ 0_{1x2} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\text{Si} \quad \tilde y \cong \tilde A\, \tilde x \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{33} B_{2x2} & a_{33} b_{2x1} \\ 0_{1x2} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{2x2} & b_{2x1} \\ 0_{1x2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = B_{2x2} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + b_{2x1}$$

Plano Proyectivo P^2

* Subgrupo afín : Mantiene la recta en el infinito.

$$\begin{pmatrix} a_{33}B_{2x2} & a_{33}b_{2x1} \\ 0_{1x2} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{33}B_{2x2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

* Transformación de similitud : Además de mantener la recta en el infinito, mantiene los puntos absolutos $(1,\pm i, 0)^T = \tilde{i}, \tilde{j}$

será $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + b_{2x1}$

rota (θ) Escala (c) Traslada (b)

* Transformación euclídea : Tranformación de similitud con c = 1

Plano Proyectivo P^2

- Correspondencia Homográfica u Homografía:
  - Correspondencia uno a uno que mantiene la razón doble entre cuatro elementos (lineal e invertible). Puede ser entre:
    - Punto a punto
    - Recta a recta
    - Haz de rectas a haz de rectas
    - ....

Plano Proyectivo P^2

- Correlación:
  - Transforma rectas en puntos y viceversa

$$\tilde{l} = \tilde{F}\,\tilde{x}$$

☞Composición de dos correlaciones: Colineación

$$\tilde{l} = \tilde{F}\,\tilde{x} \quad ; \quad \tilde{l}' = \tilde{F}'\,\tilde{x}'$$

$$\text{Si} \quad \tilde{x}' = \left(\tilde{F}'\right)^{-1}\tilde{l}'$$

$$\tilde{l} = \tilde{F}\,\tilde{x} = \tilde{F}\left(\tilde{F}'\right)^{-1}\tilde{l}' = \tilde{A}\,\tilde{l}'$$

Tabla de Contenidos

Espacio Proyectivo *P*³

* Un punto $\tilde{x} \in P^3 \Rightarrow \tilde{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$
* Plano $\tilde{u} \in P^3 \Rightarrow \tilde{u} = [u_1, u_2, u_3, u_4]^T$

* Plano que pasa por un punto

$$\tilde{u}^T \cdot \tilde{x} = 0$$

$$\tilde{u}^T \cdot \tilde{x} = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

* Dualidad entre planos y puntos
  - Conjunto de puntos que están en un plano.
  - Conjunto de planos que pasan por un punto.

Espacio Proyectivo *P*³

* Espacio afín.

$$\text{si } x_4 \neq 0 \Rightarrow \tilde{x} = \left[\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}, 1\right]^T = [X_1, X_2, X_3, 1]^T$$

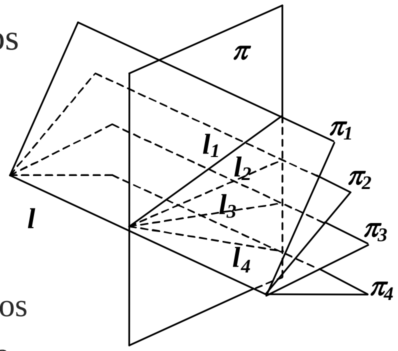
* Plano en el infinito $\tilde{\Pi}_\infty$

$$\tilde{x} \in \tilde{\Pi}_\infty \Rightarrow \tilde{x} = [x_1, x_2, x_3, 0]^T$$

Espacio Proyectivo P^3

* "Cross - Ratio" de cuatro planos

$$Cr\{\tilde{\Pi}_1,\tilde{\Pi}_2;\tilde{\Pi}_3,\tilde{\Pi}_4\}=$$
$$=Cr\{\tilde{l}_1,\tilde{l}_2;\tilde{l}_3,\tilde{l}_4\}=$$
$$=Cr\{\tilde{P}_1,\tilde{P}_2;\tilde{P}_3,\tilde{P}_4\}$$



* Haz de planos : Conjunto de planos que intersectan en una recta. Esta estructura proyectiva tiene dimensión 1.

Espacio Proyectivo P^3

* Colinealidad en P^3. Grupo proyectivo

$$\rho\,\tilde{y}=\tilde{A}\,\tilde{x} \quad \text{con } \tilde{A} \text{ matriz de 4x4 invertible.}$$

* Transformación afín. Subgrupo afín

$$\rho\,\tilde{y}=\begin{pmatrix} B_{3x3} & b_{3x1} \\ 0_{1x3} & 1 \end{pmatrix}\tilde{x} \quad \Rightarrow \quad Y = B_{3x3}X + b_{3x1}$$

- Cualquier punto que perteneciente al espacio afín permanece en él al sufrir una transformación afín.
- Cualquier punto que pertenece al Π_∞ permanece en él al sufrir una transformación afín.

Espacio Proyectivo *P*³

* Transformación afín. Subgrupo afín

$$\rho\,\tilde{y} = \begin{pmatrix} B_{3x3} & b_{3x1} \\ 0_{1x3} & 1 \end{pmatrix}\tilde{x} \quad \Rightarrow \quad Y = B_{3x3}X + b_{3x1}$$

* Transformación Similitud B_{3x3} es ortogonal

$$B_{3x3}B_{3x3}^{T} = \lambda^2 I$$

* Transformación Euclídea B_{3x3} es ortogonal con $\lambda^2 = 1$

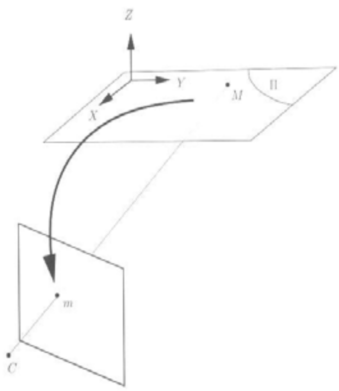
Tabla de Contenidos

Homografías entre Planos Proyectivos

- Plano – Imagen
  - El Plano Π no pasa po
  - *Puntos en el plano:*

$$\tilde{m}=\tilde{P}\tilde{M}=[P \quad p]\tilde{M}$$

$$\text{Si } \tilde{M}=\lambda\begin{bmatrix}X\\Y\\0\\1\end{bmatrix}\in\Pi \Rightarrow \tilde{m}\cong\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12} & P_{14}\\P_{21} & P_{22} & P_{24}\\P_{31} & P_{32} & P_{34}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\Y\\1\end{bmatrix}$$

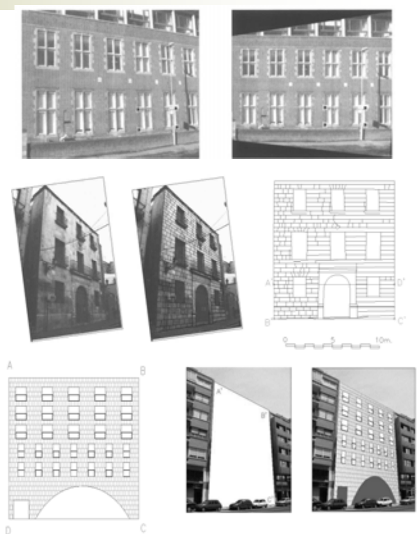


$$\tilde{m}\cong H_{3x3}\,\tilde{M}_{\Pi}, \quad \tilde{M}_{\Pi}\cong H^{-1}{}_{3x3}\tilde{m}$$

  - *Cálculo de H: 4 puntos del plano proyectados en la imagen*
    - *no colineales tomados de tres en tres*

Homografías entre Planos Proyectivos

- <u>Permite</u>:
  - Saber la proyección de cualquier punto contenido en el plano (fuera de los límites de la imagen)
  - Comprobar si un punto pertenece a un plano
  - Conocer la posición 3D en el plano a partir de la proyección en una sola cámara (2D)
  - Rectificado: eliminar la distorsión proyectiva en visión 2D
  - Fotogrametría:

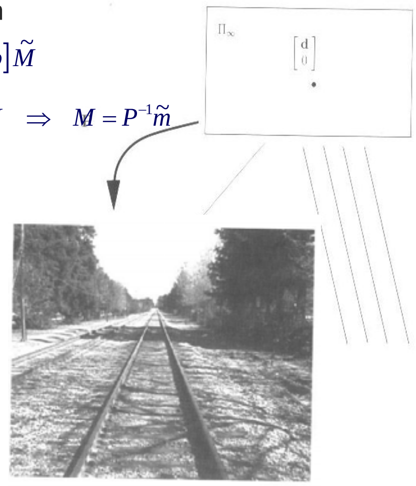


Homografías entre Planos Proyectivos

- Plano en el infinito – Imagen

• Punto proyectado $\tilde{m} = \tilde{P}\,\tilde{M} = [P \quad p]\,\tilde{M}$

Si $\tilde{M} = \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix} \in \Pi_\infty \;\Rightarrow\; \tilde{m} = P\,M \;\Rightarrow\; M = P^{-1}\tilde{m}$



- Proyecta intersecciones de líneas paralelas en puntos de desvanecimiento

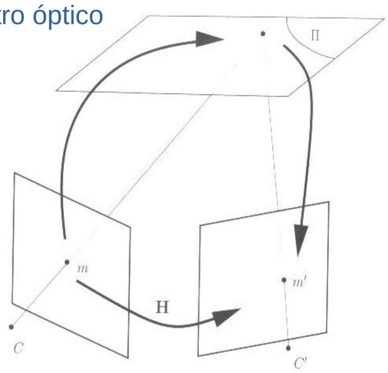
Homografías entre Planos Proyectivos

- Plano Imagen – Plano de Imagen
  - El Plano Π no pasa por el centro óptico ***C***

$$\tilde{m} \cong H_1\,\tilde{M}_\Pi, \quad \tilde{M}_\Pi \cong H_1^{-1}\tilde{m}$$

$$\tilde{m}' \cong H_2\,\tilde{M}_\Pi = H_2\,H_1^{-1}\tilde{m}$$

$$\tilde{m}' \cong H\,\tilde{m}$$



  - Si es el plano en el infinito

$$\tilde{m}' \cong H_\infty\,\tilde{m}, \quad H_\infty = P'P^{-1}$$

  - Aplicación:
    - Mosaicos de escenas distantes
    - Correspondencia de puntos en planos

Homografías entre Planos Proyectivos

- Cálculo de la Homogafía entre Puntos de un Plano:
  - Se hallan la proyección de puntos del plano
  - Se obtiene la matriz $H\pi$
- Se puede emplear para hallar la correspondencia de cualquier punto del plano