Visión 3D

Geometría Proyectiva

Luis M. Jiménez – José M. Sebastián

Ingeniería de Sistemas y Automática (UMH)

Tabla de Contenidos

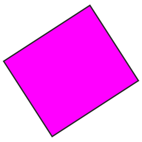
Qué es la Geometría Proyectiva

- Geometría Euclídea: Invarianza de longitudes y áreas. Se define el círculo. Transformaciones: rotación, traslación. Coordenadas cartesianas
- Geometría Afín: Invarianza del paralelismo, relación de distancias. Se define el paralelogramo, las parábolas, elipses e hipérbolas. Coordenadas cartesianas oblicuas.
- Geometría Proyectiva: Invarianza de la relación doble o “cross-ratio”. Se define la cónica, cuádricas. Coordenadas proyectivas u homogéneas

Qué es la Geometría Proyectiva

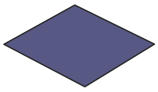
Transformación

Euclídea



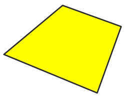
$$AD = cte$$

Afín



$$\frac{AB}{AD} = cte$$

Proyectiva



$$\frac{AC/AD}{BC/BD} = cte$$

Qué es la Geometría Proyectiva

- Qué aporta la Geometría Proyectiva a la Visión Artificial
  - El proceso de proyección central (modelo pinhole) es básicamente proyectivo: no es ni euclídeo (no conserva las distancias) ni afín (no conserva la noción de paralelismo)
  - El reconocimiento de formas del ser humano se basa en parte también en características proyectivas invariantes.
  - Suministra un modelo lineal (si no hay distorsiones) del proceso de captación de imágenes.
  - Permite estructurar la información según su robustez.
  - Homogenización de elementos. Dualidad entre puntos y rectas en un plano
  - Transformación entre planos proyectivos
  - Correlación entre puntos y rectas cuando se manejas distintos planos proyectivos

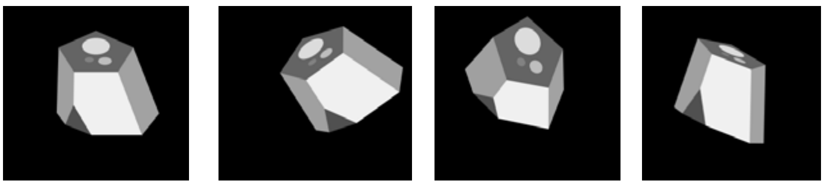
Qué es la Geometría Proyectiva

- Homogenización de elementos. Dualidad entre puntos y rectas en un plano
  - Geometría Euclídea: Rectas en un plano:
    - Hay una única recta que pasa por dos puntos dados
    - Una una única que recta que pasa por un punto dado y tiene una dirección absoluta dada
    - Dos rectas que no coinciden, o tienen un único punto de intersección o tienen la misma dirección absoluta
- Geometría Proyectiva: se sustituye dirección absoluta por puntos en el infinito, y todos los puntos en el infinito por la recta en el infinito:
  - Hay una única recta entre dos puntos distintos
  - Hay un único punto entre dos rectas distintas

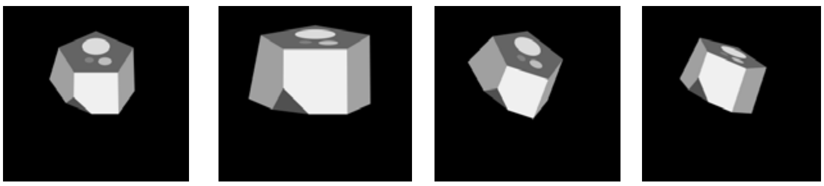
Qué es la Geometría Proyectiva

- No conserva la distancias
- No conserva las rectas paralelas
- No conserva los ángulos

Qué es la Geometría Proyectiva



Primera Pieza



Segunda Pieza

Qué es la Geometría Proyectiva

	Euclideo	Similaridad	Afín	Proyectivo
Transformaciones:				
Rotación, traslación Escalado isotrópico Escalado en ejes Trasformaciones perspectiva	X	X X	X X X	X X X X
Invariantes:				
Distancia Ángulos, ratios de distancias Paralelismo, centro de masa Incidencia, cross-ratio	X X X X	 X X X	 X X	 X

Tabla de Contenidos

- Introducción
- Espacio Proyectivo P^n
- Recta Proyectiva P^1
- Plano Proyectivo P^2
- Espacio Proyectivo P^3
- Homografías entre Planos Proyectivos

Espacio Proyectivo P^n

$$\tilde{x} \in P^n \quad \text{si} \quad \tilde{x} = [x_1, \cdots, x_{n+1}]^T \text{ con algún } x_i \neq 0$$

$$\tilde{x}, \tilde{y} \in P^n \;\; ; \;\; \tilde{x} \cong \tilde{y} \;\; \text{si existe } \lambda \neq 0 \;\; \text{tal que} \;\; x_i = \lambda y_i$$

Colineación : Transformación proyectiva entre objetos (del mismo tipo) en un espacio proyectivo

Se representa por matrices $\tilde{A}_{(n+1)\times(n+1)}$ (normalmente invertibles)

$$\rho \tilde{y} = \tilde{A}\tilde{x}$$

Conjunto de las $\tilde{A} \Rightarrow$ Grupo proyectivo.

Espacio Proyectivo P^n

Base Proyectiva : Conjunto de $(n+2)$ puntos tal que $(n+1)$ sean linealmente independientes.

por ejemplo :

$$\tilde{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \ldots \quad \tilde{e}_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{e}_{n+2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

si se tiene $\tilde{x}_1 \cdots \tilde{x}_{n+2}$ puntos tal que hay $(n+1)$ l.i. existe una $\tilde{A}$ tal que $\tilde{A}\tilde{e}_i = \lambda_i \tilde{x}_i \qquad i = 1, \ldots, n+2$

Tabla de Contenidos

Recta Proyectiva *P¹*

Punto perteneciente recta proyectiva $\tilde{x} \in P^1 \Rightarrow \tilde{x} = [x_1, x_2]^T$

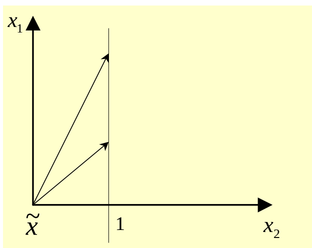
* Si $x_2 \neq 0$ se puede poner como

$$\tilde{x} = x_2 \left[\frac{x_1}{x_2}, 1 \right]^T$$

* Si se representa $X_1 = \frac{x_1}{x_2} = \alpha$

X es la coordenada de la recta afín.

α es el parámetro proyectivo.



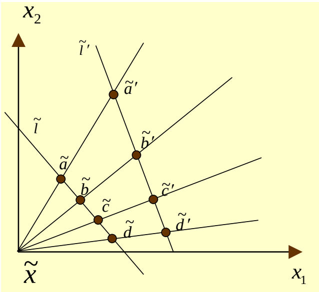
* De esta forma cada punto representa una dirección.

* Faltaría por considerar el punto $[x_1, 0]^T$ que no pertenece a la recta afín. Es el punto en el infinito.

Recta Proyectiva P^1

"Cross-Ratio" o Razón doble de cuatro puntos:

$C_r\{\tilde{a},\tilde{b};\tilde{c},\tilde{d}\}$ si se denomina por $\alpha_a,\alpha_b,\alpha_c,\alpha_d$ los parametros proyectivos de cada punto



$$C_r\{\tilde{a},\tilde{b};\tilde{c},\tilde{d}\}=\frac{\alpha_a-\alpha_c}{\alpha_a-\alpha_d}:\frac{\alpha_b-\alpha_c}{\alpha_b-\alpha_d}$$

Es invariante ante cualquier colinealidad.

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} r & s \\ u & v \end{bmatrix}$$

Recta Proyectiva P^1

•El "Cross-Ratio" o razón doble de cuatro puntos depende del orden en que se tomen los puntos:

Así si: $$C_r\{\tilde{a},\tilde{b};\tilde{c},\tilde{d}\}=\frac{\alpha_a-\alpha_c}{\alpha_a-\alpha_d}:\frac{\alpha_b-\alpha_c}{\alpha_b-\alpha_d}=\tau$$

Se pueden obtener : $\tau\,,\frac{1}{\tau},1-\tau\,,\frac{1}{1-\tau},\frac{\tau-1}{\tau},\frac{\tau}{\tau-1}$

Tabla de Contenidos

Plano Proyectivo *P*²

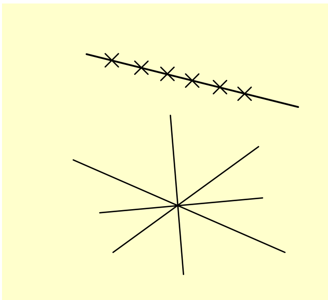
* Punto $\tilde{x} \in P^2 \Rightarrow \tilde{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$

* Recta $\tilde{l} \in P^2 \Rightarrow \tilde{l} = [l_1, l_2, l_3]^T$

* Recta que pasa por un punto $\tilde{l}^T \cdot \tilde{x} = 0$

* Dualida entre puntos y rectas

- Conjunto de puntos que están en una recta.
- Conjunto de rectas que pasan por punto.

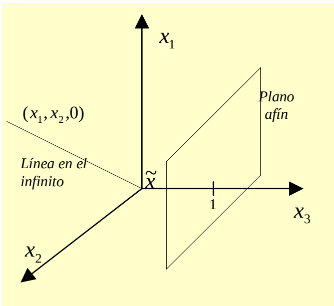


Plano Proyectivo P^2

* Si $x_3 \neq 0 \quad \tilde{x} = [x_1, x_2, x_3]^T \Rightarrow \tilde{x} = [\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1]^T =$

$$= [X_1, X_2, 1]^T$$

* Este conjunto de puntos define el plano afín



* Falta por considerar los puntos con $x_3 = 0$ que define la recta en el infinito.

Plano Proyectivo P^2

* Pertenencia de un punto a una recta en el plano proyectivo

$$\tilde{l}^T \cdot \tilde{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 = 0$$

* Pertenencia de un punto a una recta en el plano afín.

$$l_1 X_1 + l_2 X_2 + l_3 = 0$$

* Punto que pertenece a una recta que pasa por los puntos $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$

$$\tilde{x} = \alpha \tilde{x}_1 + \beta \tilde{x}_2 \qquad \text{ó} \qquad \tilde{x} = \gamma \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$$

$$\text{y la recta} \quad \tilde{l} = \tilde{x}_1 \wedge \tilde{x}_2 \quad \Rightarrow \quad \tilde{l}^T \tilde{x} = 0$$

Plano Proyectivo P^2

- Producto Vectorial:

$$\tilde{l} = \tilde{x} \wedge \tilde{y} = [\tilde{x}]_\wedge \tilde{y}$$

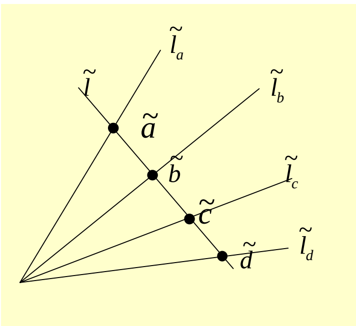
$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} \qquad [\tilde{x}]_\wedge = \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{x}_3 & \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 & 0 & -\tilde{x}_1 \\ -\tilde{x}_2 & \tilde{x}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Plano Proyectivo P^2

* "Cross - Ratio" o razón doble de cuatro rectas que se cortan en un punto

$$\{\tilde{l}_a, \tilde{l}_b; \tilde{l}_c, \tilde{l}_d\} = \{\tilde{a}, \tilde{b}; \tilde{c}, \tilde{d}\}$$

Es independiente de la recta $\tilde{l}$ que corte a las cuatro rectas.



* Haz de rectas : Rectas que pasan por un punto fijo. Es un elemento proyectivo de dimensión uno.

$$l = \alpha\, l_1 + \beta\, l_2$$

Plano Proyectivo P^2

$*$ Colineación en el plano proyectivo. Forma un grupo proyectivo

$$\rho\,\tilde{y} = \tilde{A}\,\tilde{x} \quad \Rightarrow \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

$$* \text{Subgrupo afín} \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{33}B_{2x2} & a_{33}b_{2x1} \\ 0_{1x2} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\text{Si} \quad \tilde{y} \cong \tilde{A}\,\tilde{x} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{33}B_{2x2} & a_{33}b_{2x1} \\ 0_{1x2} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{2x2} & b_{2x1} \\ 0_{1x2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = B_{2x2} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + b_{2x1}$$

Plano Proyectivo P^2

$*$ Subgrupo afín : Mantiene la recta en el infinito.

$$\begin{pmatrix} a_{33}B_{2x2} & a_{33}b_{2x1} \\ 0_{1x2} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{33}B_{2x2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$*$ Transformación de similitud : Además de mantener la recta en el infinito, mantiene los puntos absolutos $(1, \pm i, 0)^T = \tilde{i}, \tilde{j}$

$$\text{será} \quad \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \cos\theta & sen\,\theta \\ -sen\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + b_{2x1}$$

rota (θ) Escala (c) Traslada (b)

$*$ Transformación euclídea : Tranformación de similitud con $c = 1$

Plano Proyectivo P^2

- Correspondencia Homográfica u Homografía:
  - Correspondencia uno a uno que mantiene la razón doble entre cuatro elementos (lineal e invertible). Puede ser entre:
    - Punto a punto
    - Recta a recta
    - Haz de rectas a haz de rectas
    - ....

Plano Proyectivo P^2

- Correlación:
  - Transforma rectas en puntos y viceversa

$$\tilde{l} = \tilde{F}\,\tilde{x}$$

☞Composición de dos correlaciones: Colineación

$$\tilde{l} = \tilde{F}\,\tilde{x} \quad ; \quad \tilde{l}' = \tilde{F}'\,\tilde{x}'$$

$$\text{Si} \quad \tilde{x}' = \left(\tilde{F}'\right)^{-1}\tilde{l}'$$

$$\tilde{l} = \tilde{F}\,\tilde{x} = \tilde{F}\left(\tilde{F}'\right)^{-1}\tilde{l}' = \tilde{A}\,\tilde{l}'$$

Plano Proyectivo P^2

* Ángulo entre dos rectas $\tilde{l}_1 , \tilde{l}_2$

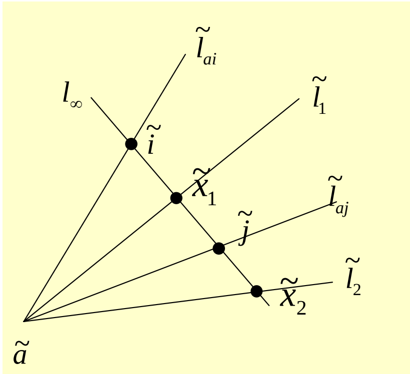
Se trazan las rectas auxiliares :

$\tilde{l}_{ai}$ = Pasa por $\tilde{a}, \tilde{i}$

$\tilde{l}_{aj}$ = Pasa por $\tilde{a}, \tilde{j}$

Se cumple :

$$\alpha = \frac{1}{2i} \log\left(Cr\left\{ \tilde{l}_1, \tilde{l}_2 ; \tilde{l}_{ai}, \tilde{l}_{aj} \right\} \right)$$



Plano Proyectivo P^2

* Cónicas : Conjunto de puntos del plano proyectivo que cumplen : $S(\tilde{x}) = \sum_{i,j=1}^{3} C_{ij} x_i x_j = 0$; $S(\tilde{x}) = \tilde{x}^T \tilde{C} \tilde{x} = 0$

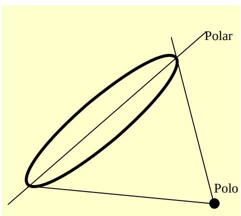
* Intersección de una cónica con una recta $\tilde{x} = \tilde{x}_1 + \theta \, \tilde{x}_2$

$$S(\tilde{x}_1) + 2\theta \, S(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + \theta^2 \, S(\tilde{x}_2) = 0$$

* Tangente a una cónica $S(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^2 - S(\tilde{x}_1) S(\tilde{x}_2) = 0$

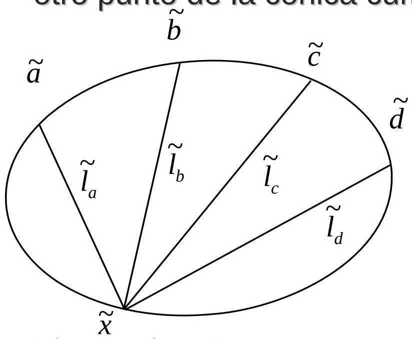
* Se cumple :

$\tilde{l}_{\text{polar}} = \tilde{C} \, \tilde{P}_{\text{polo}}$



Plano Proyectivo P^2

- La matriz de la cónica posee seis variables, aunque sólo cinco grados de libertad (factor de escala). La cónica estará definida por cinco puntos.
- Definidos cuatro puntos de una cónica, cualquier otro punto de la cónica cumple:

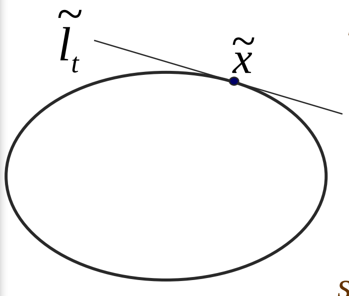


$$\forall x \quad \text{tal que} \quad s(\tilde{x}) = 0$$

$$Cr\left\{\tilde{l}_a, \tilde{l}_b; \tilde{l}_c, \tilde{l}_d\right\} = cte$$

Plano Proyectivo P^2

- El objeto dual de la cónica es la envolvente a la cónica: conjunto de tangentes a todos los puntos de la cónica. Se cumple:



$$s(\tilde{x}) = \tilde{x}^T \tilde{C} \tilde{x} \quad ; \quad \tilde{l}_t = \tilde{C}\tilde{x}$$

Si la cónica es no degenerada:

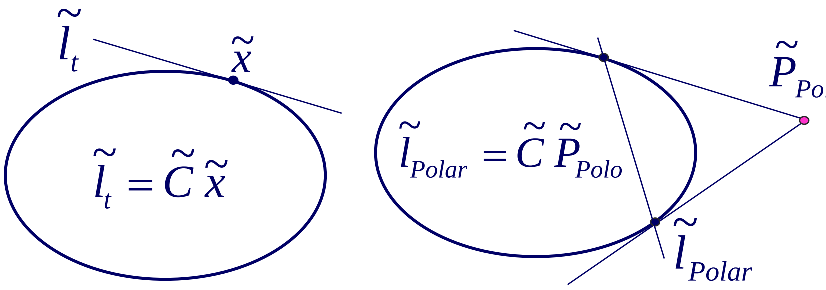
$$\tilde{x} = \tilde{C}^{-1}\tilde{l}_t$$

Sustituyendo:

$$s(\tilde{x}) = \tilde{l}_t^T \tilde{C}^{-T} \tilde{C} \tilde{C}^{-1} \tilde{l}_t = \tilde{l}_t^T \tilde{C}^{-T} \tilde{l}_t = s(\tilde{l}_t)$$

Plano Proyectivo P^2

- La cónica define una correlación entre puntos del plano y rectas polares:



- La cónica define una correlación entre sus puntos y sus tangentes:

Plano Proyectivo P^2

- Una transformación proyectiva convierte una cónica en otra:

$$s(\tilde{x}) = \tilde{x}^T\,\tilde{C}\,\tilde{x} \quad \text{Si} \quad \tilde{y} = \tilde{T}\tilde{x} \;\; ; \;\; \tilde{x} = \tilde{T}^{-1}\tilde{y}$$

$$s(\tilde{y}) = \tilde{y}^T\tilde{T}^{-T}\,\tilde{C}\,\tilde{T}\,\tilde{y} = \tilde{y}^T\,\tilde{C}'\,\tilde{y}$$

- Al ser la matriz simétrica, mediante una transformación proyectiva la matriz se puede diagonalizar.

$$\tilde{C}' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Plano Proyectivo P^2

- Si la cónica posee puntos reales, la matriz se puede expresar como:

$$\tilde{C}' = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 \end{bmatrix}$$

- Mediante otra transformación se puede obtener

$$\tilde{C}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Cualquier cónica puede ser transformada proyectivamente en un círculo

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

Plano Proyectivo P^2

- Transformando tres puntos de la cónica a los puntos de referencia (base)

$$\tilde{C}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Con lo que la ecuación de la cónica será:

$$\begin{cases} x_2^2 - x_1 x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2^2 = x_1 x_3 \\ \text{Si} \quad x_3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\dfrac{x_2}{x_3}\right)^2 = \dfrac{x_1}{x_3} = \theta^2 \end{cases}$$

Las coordenadas de la cónica se pueden expresar como:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \tilde{T} \begin{bmatrix} \theta^2 \\ \theta \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tabla de Contenidos

Espacio Proyectivo *P*³

* Un punto $\tilde{x} \in P^3 \Rightarrow \tilde{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$

* Plano $\tilde{u} \in P^3 \Rightarrow \tilde{u} = [u_1, u_2, u_3, u_4]^T$

* Plano que pasa por un punto

$$\tilde{u}^T \cdot \tilde{x} = 0$$

$$\tilde{u}^T \cdot \tilde{x} = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

* Dualidad entre planos y puntos

- Conjunto de puntos que están en un plano.
- Conjunto de planos que pasan por un punto.

Espacio Proyectivo P^3

* Espacio afín.

$$\text{si } x_4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{x} = \left[\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}, 1\right]^T = [X_1, X_2, X_3, 1]^T$$

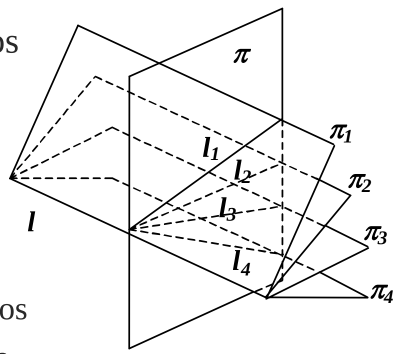
* Plano en el infinito $\tilde{\Pi}_\infty$

$$\tilde{x} \in \tilde{\Pi}_\infty \quad \Rightarrow \quad \tilde{x} = [x_1, x_2, x_3, 0]^T$$

Espacio Proyectivo P^3

* "Cross - Ratio" de cuatro planos

$$Cr\{\tilde{\Pi}_1, \tilde{\Pi}_2; \tilde{\Pi}_3, \tilde{\Pi}_4\} =$$
$$= Cr\{\tilde{l}_1, \tilde{l}_2; \tilde{l}_3, \tilde{l}_4\} =$$
$$= Cr\{\tilde{P}_1, \tilde{P}_2; \tilde{P}_3, \tilde{P}_4\}$$



* Haz de planos : Conjunto de planos que intersectan en una recta. Esta estructura proyectiva tiene dimensión 1.

Espacio Proyectivo *P*³

* Colinealidad en P^3. Grupo proyectivo

$$\rho\,\tilde{y} = \tilde{A}\,\tilde{x} \quad \text{con } \tilde{A} \text{ matriz de 4x4 invertible.}$$

* Transformación afín. Subgrupo afín

$$\rho\,\tilde{y} = \begin{pmatrix} B_{3x3} & b_{3x1} \\ 0_{1x3} & 1 \end{pmatrix}\tilde{x} \quad \Rightarrow \quad Y = B_{3x3}X + b_{3x1}$$

- Cualquier punto que perteneciente al espacio afín permanece en él al sufrir una transformación afín.
- Cualquier punto que pertenece al Π_∞ permanece en él al sufrir una transformación afín.

Espacio Proyectivo *P*³

* Transformación afín. Subgrupo afín

$$\rho\,\tilde{y} = \begin{pmatrix} B_{3x3} & b_{3x1} \\ 0_{1x3} & 1 \end{pmatrix}\tilde{x} \quad \Rightarrow \quad Y = B_{3x3}X + b_{3x1}$$

* Transformación Similitud B_{3x3} es ortogonal

$$B_{3x3}B_{3x3}^T = \lambda^2 I$$

* Transformación Euclídea B_{3x3} es ortogonal con $\lambda^2 = 1$

Espacio Proyectivo P^3

* Cuádrica : Conjunto de puntos $\tilde{x} \in P^3$ que cumplen :

$$S(\tilde{x}) = \sum_{i,j=1}^{4} c_{ij} x_i x_j = 0 \quad \Rightarrow \quad S(\tilde{x}) = \tilde{x}^T \tilde{C} \tilde{x} = 0$$

* Curva Alabeada Cúbica (The twisted cubic)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \tilde{T} \begin{bmatrix} \theta^3 \\ \theta^2 \\ \theta \\ 1 \end{bmatrix}$$

Espacio Proyectivo P^3

* Cónica absoluta. Cumple :

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 0 = x_4 \quad \Rightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \tilde{x}^T \tilde{x} = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

La cónica absoluta es invariante ante cualquier tranformación euclídea

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{3x3} & b_{3x1} \\ 0_{1x3} & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{cases} \tilde{x}^T \cdot \tilde{x} = \tilde{y}^T B_{3x3}^T B_{3x3} \tilde{y} = \\ = \lambda^2 \; \tilde{y}^T I \; \tilde{y} = \lambda^2 \; \tilde{y}^T \cdot \tilde{y} = 0 \end{cases}$$

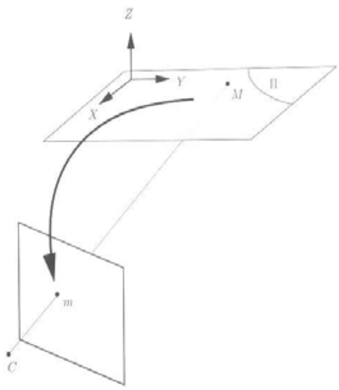
Tabla de Contenidos

Homografías entre Planos Proyectivos

- Plano – Imagen
  - El Plano Π no pasa po
  - *Puntos en el plano:*

$$\tilde{m} = \tilde{P}\tilde{M} = [P \quad p]\tilde{M}$$

$$\text{Si } \tilde{M} = \lambda \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \Pi \;\Rightarrow\; \tilde{m} \cong \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix}$$

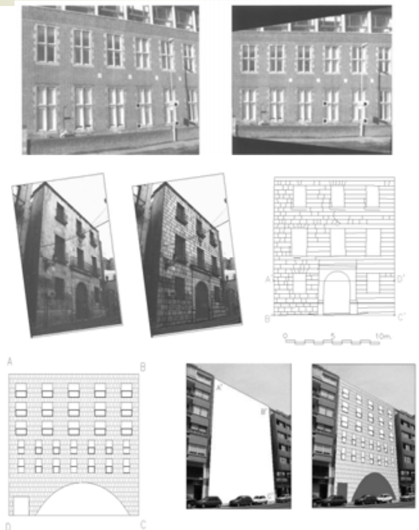


$$\tilde{m} \cong H_{3x3}\,\tilde{M}_{\Pi}, \quad \tilde{M}_{\Pi} \cong H^{-1}{}_{3x3}\tilde{m}$$

  - *Cálculo de H: 4 puntos del plano proyectados en la imagen*
    - *no colineales tomados de tres en tres*

Homografías entre Planos Proyectivos

- Permite:
  - Saber la proyección de cualquier punto contenido en el plano (fuera de los límites de la imagen)
  - Comprobar si un punto pertenece a un plano
  - Conocer la posición 3D en el plano a partir de la proyección en una sola cámara (2D)
  - Rectificado: eliminar la distorsión proyectiva en visión 2D
  - Fotogrametría:



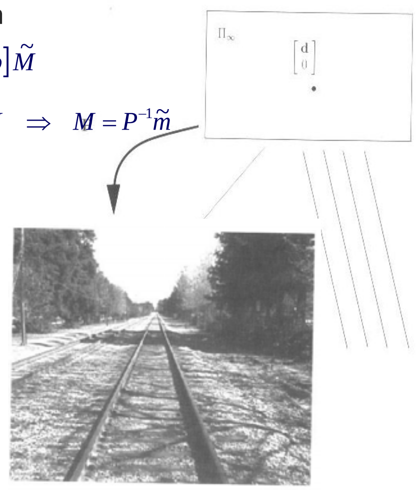
Homografías entre Planos Proyectivos

- Plano en el infinito – Imagen

• Punto proyectado $\tilde{m} = \tilde{P}\,\tilde{M} = [P \quad p]\,\tilde{M}$

Si $\tilde{M} = \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix} \in \Pi_\infty \Rightarrow \tilde{m} = P\,M \Rightarrow M = P^{-1}\tilde{m}$

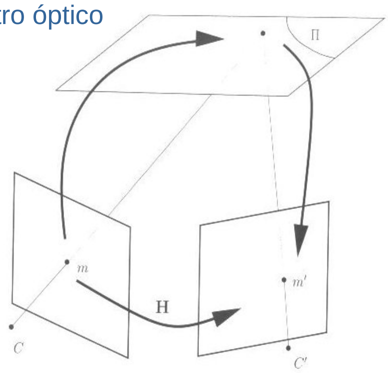
- Proyecta intersecciones de líneas paralelas en puntos de desvanecimiento



Homografías entre Planos Proyectivos

- Plano Imagen – Plano de Imagen
  - El Plano Π no pasa por el centro óptico ***C***

$$\tilde{m} \cong H_1\, \tilde{M}_{\Pi}, \quad \tilde{M}_{\Pi} \cong H_1^{-1} \tilde{m}$$
$$\tilde{m}' \cong H_2\, \tilde{M}_{\Pi} = H_2\, H_1^{-1} \tilde{m}$$
$$\tilde{m}' \cong H\, \tilde{m}$$



  - Si es el plano en el infinito

$$\tilde{m}' \cong H_{\infty}\, \tilde{m}, \quad H_{\infty} = P' P^{-1}$$

  - Aplicación:
    - Mosaicos de escenas distantes
    - Correspondencia de puntos en planos

Homografías entre Planos Proyectivos

- Cálculo de la Homogafía entre Puntos de un Plano:
  - Se hallan la proyección de puntos del plano
  - Se obtiene la matriz $H\pi$
- Se puede emplear para hallar la correspondencia de cualquier punto del plano