

# Visión 3D

Modelo Proyectivo de una Cámara

Calibración



Luis M. Jiménez – José M. Sebastián

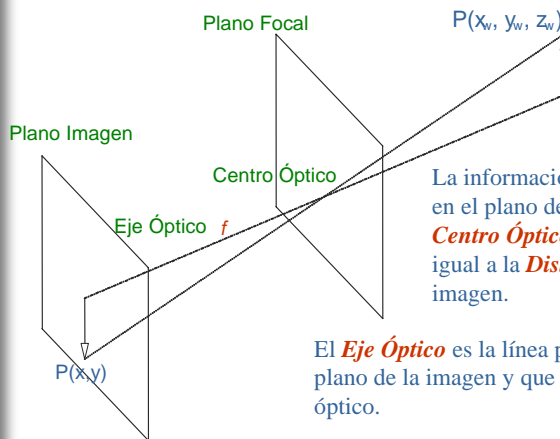
Ingeniería de Sistemas y Automática (UMH)

1

## Tabla de Contenidos

- **Modelo de lentes: Pinhole, Delgada y Gruesa**
- Parámetros del Modelo de Captación
- Sistemas de Coordenadas involucradas
- Proceso de Calibración

## Modelo de Lente Pin-Hole



La información 3D del mundo se proyecta en el plano de la imagen a través del **Centro Óptico** situado a una distancia igual a la **Distancia Focal** del plano de la imagen.

El **Eje Óptico** es la línea perpendicular al plano de la imagen y que pasa por el centro óptico.

El **Plano Focal** es el plano que pasa por el centro óptico y cuyos puntos no tienen proyección en el plano de la imagen.

Visión 3D: Modelo Projectivo de una Cámara

## Coordenadas Homogéneas (*Projectivas*)

- Espacio Euclídeo  $R^n$ :

$$x = [x_1, \dots, x_n]^T \in R^n \Rightarrow \tilde{x} = [x_1, \dots, x_n, 1]^T \in P^n$$

$$\tilde{x} \cong \tilde{y} \text{ si existe } \lambda \neq 0 \text{ tal que } x_i = \lambda y_i$$

- En coordenadas homogéneas un punto está definido con un factor de escala

$$\tilde{x} = [x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]^T \Rightarrow x = \left[ \frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}} \right]^T \quad x_{n+1} \neq 0$$

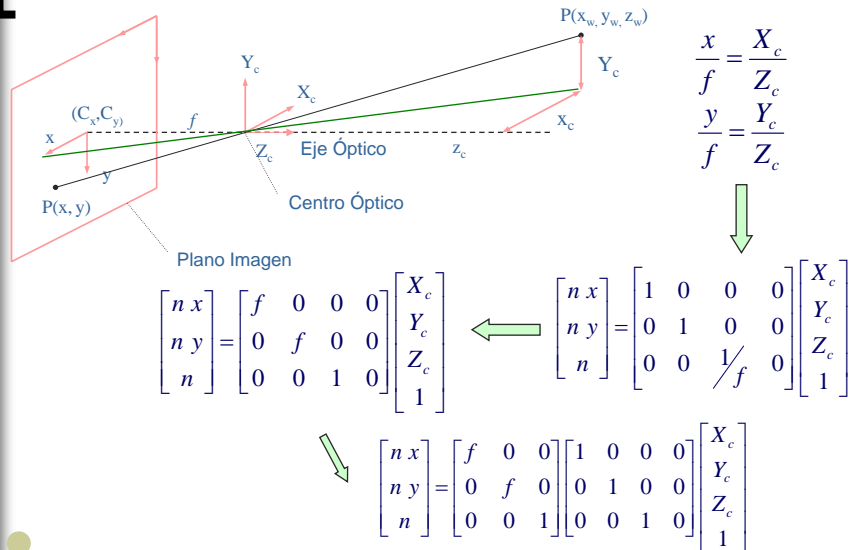
$$\tilde{x} = [x_1, \dots, x_n, 0]^T \Rightarrow \text{Punto en el infinito}$$

$$\tilde{x} = [0, \dots, 0]^T \Rightarrow \text{No existe}$$

Visión 3D: Modelo Projectivo de una Cámara

4

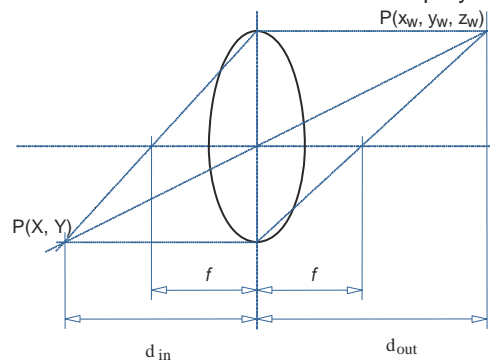
## Modelo de Lente Pin-Hole



Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

## Modelo Ideal o de Lente Delgada

- Los Rayos ópticos que pasan por el centro de la lente no sufren ninguna deflexión.
- Los Rayos que entran paralelos al eje óptico de la lente convergen en un punto del eje óptico a una distancia igual a la distancia focal del centro de la lente
- Produce las mismas ecuaciones de proyección del modelo Pinhole



Ley de Gauss

$$\frac{1}{d_{in}} + \frac{1}{d_{out}} = \frac{1}{f}$$

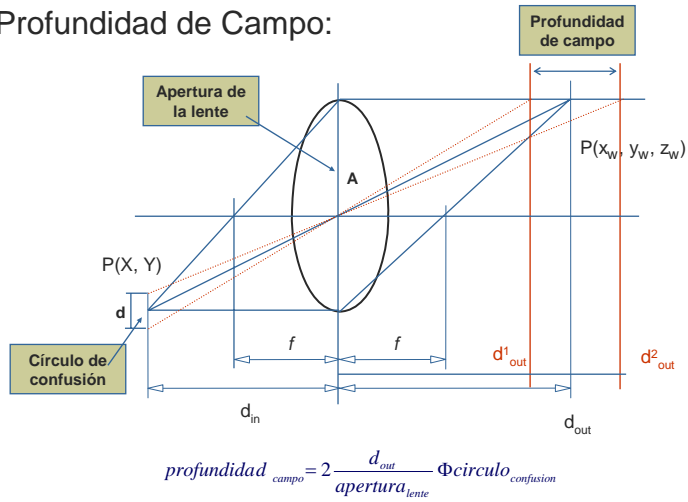
Magnificación

$$m = \frac{d_{int}}{d_{out}}$$

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

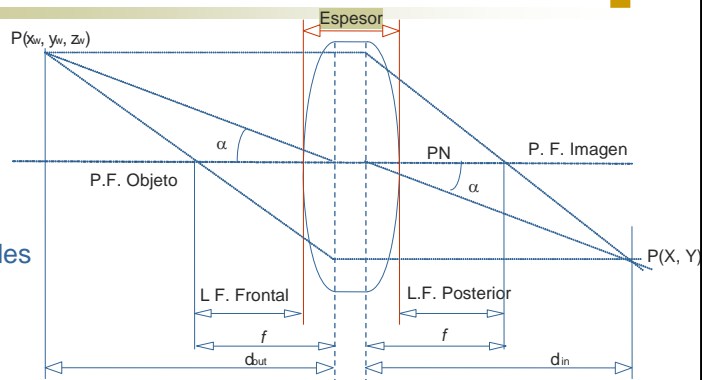
## Modelo Ideal o de Lente Delgada

### Profundidad de Campo:

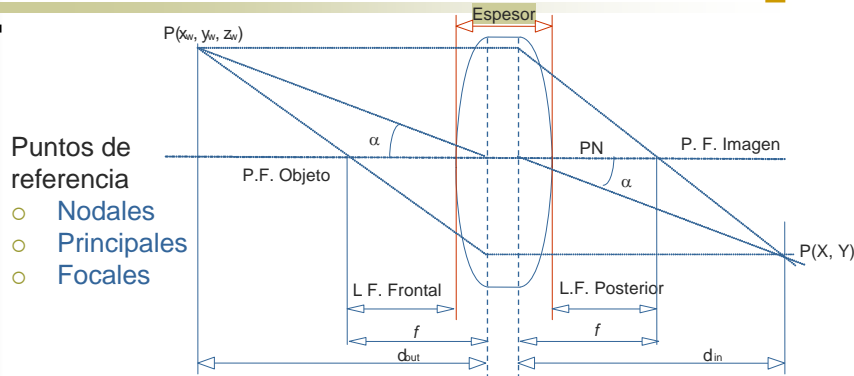


## Modelo de Lente Gruesa

- Puntos de referencia
- Nodales
- Principales
- Focales



## Modelo de Lente Gruesa



- Para determinar la imagen que se forma en un punto nodal de una lente, defración, el centro óptico se reemplaza por los puntos nodales delanteros y traseros. En los sistemas de lentes consta de varios juegos de lentes coaxiales delantera y trasera, los puntos nodales delanteros y traseros coinciden con los puntos nodales.

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

## Modelo de Lente Gruesa

- Para reducir las aberraciones que se producen en una lente, los sistemas de lentes constan de varios juegos de lentes coaxiales.
- Produce la misma proyección que el modelo ideal de lente, excepto por un offset adicional.
- El centro óptico es reemplazado por los puntos nodal delantero y trasero de la lente.
- Cualquier rayo luminoso que alcanza el punto nodal delantero, continúa su propagación emergiendo del punto nodal trasero sin cambiar su dirección.
- Cuando el medio entre el objeto y la lente tiene el mismo índice de refracción que el medio entre la imagen y la lente, las distancias focales delantera y trasera son iguales y los puntos principales coinciden con los puntos nodales.
- La apertura del diafragma tiene como misión reducir las aberraciones ópticas.

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

## Tabla de Contenidos

- Modelo de lentes: Pinhole, Delgada y Gruesa
- **Parámetros del Modelo de Captación**
  - Parámetros intrínsecos. Distorsiones
  - Parámetros extrínsecos
- Sistemas de Coordenadas involucradas
- Proceso de Calibración

## Parámetros del Modelo de Captación

- **Parámetros Intrínsecos:** Son los que describen la geometría y óptica del conjunto cámara y Tarjeta de Adquisición de Imágenes. Afectan al proceso que un rayo luminoso sigue desde que alcanza la lente del objetivo hasta que impresiona un elemento sensible.
- **Parámetros Extrínsecos:** Son aquellos que definen la orientación y la posición de la cámara, respecto a un Sistema de Coordenadas conocido, al que se llamará *Sistema de Coordenadas del Mundo*.

## Parámetros Intrínsecos

- Distancia focal.
  - Se define como la distancia que separa el *centro óptico* del plano de la imagen y está dada en mm.
- Factores de Escala.
  - Relacionan las coordenadas en mm. del plano de la imagen, con las coordenadas en píxeles de la memoria de almacenamiento.
- Punto Principal.
  - Es el Punto de intersección entre el eje óptico de la cámara y el plano de la imagen.

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

## Parámetros Intrínsecos

- Coeficientes de Distorsión.
  - La distorsión geométrica afecta a los puntos en el plano de la imagen; como resultado de una serie de imperfecciones en la fabricación y el montaje de las lentes que forman el sistema óptico.
  - La cantidad de error de posición depende de la posición del punto en el plano de la imagen.
- Tres tipos de distorsión.
  - Distorsión Radial.
  - Distorsión Descentral.
  - Distorsión Prismática.

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

## Parámetros Intrínsecos. Distorsiones

- Distorsión Radial:
  - Provocada por defectos en la curvatura de las lentes.

$$d_{x_r} = k_1 X_d (X_d^2 + Y_d^2) + O[(X_d, Y_d)^5]$$
$$d_{y_r} = k_1 Y_d (X_d^2 + Y_d^2) + O[(X_d, Y_d)^5]$$

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

## Distorsión Radial:

Imagen sin Distorsión



Imagen con Distorsión Radial  $k_1=0.04$



Imagen con Distorsión Radial  $k_1=-0.04$

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara



## Parámetros Intrínsecos. Distorsiones

- Distorsión Descentral:
  - Provocada por la falta de colinealidad de los centros ópticos.
  - Produce desplazamientos radiales y tangenciales.

$$d_{x_d} = p_1(3X_d^2 + Y_d^2) + 2p_2X_dY_d + O[(X_d, Y_d)^4]$$
$$d_{y_d} = 2p_1X_dY_d + p_2(X_d^2 + 3Y_d^2) + O[(X_d, Y_d)^4]$$

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

## Distorsión Descentral:

Imagen sin Distorsión



Imagen con Distorsión  
Descentral  $p_1=0.0$  ;  $p_2=0.04$

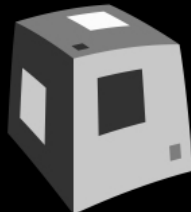


Imagen con Distorsión  
Descentral  $p_1=0.0$  ;  $p_2=-0.04$



Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

## Parámetros Intrínsecos. Distorsiones

### ■ Distorsión Prismática:

- Se origina por las imperfecciones en las lentes durante su diseño y fabricación, así como en el montaje de la óptica en la cámara.
- Causa desplazamientos radiales y tangenciales.

$$d_{xp} = s_1(X_d^2 + Y_d^2) + O[(X_d, Y_d)^4]$$

$$d_{yp} = s_2(X_d^2 + Y_d^2) + O[(X_d, Y_d)^4]$$

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

## Parámetros Intrínsecos. Distorsiones

### ■ Distorsión Total.

- Aunque la distorsión descentral y la distorsión prismática tienen unos coeficientes similares, modelan dos tipos diferentes de distorsiones.
- Las dos tienen diferentes *ejes de máxima distorsión tangencial*.

$$d_x(X_d, Y_d) = s_1(X_d^2 + Y_d^2) + 3p_1X_d^2 + p_1Y_d^2 + 2p_2X_dY_d + k_1X_d(X_d^2 + Y_d^2)$$

$$d_y(X_d, Y_d) = s_2(X_d^2 + Y_d^2) + 2p_1X_dY_d + p_2X_d^2 + 3p_2Y_d^2 + k_1Y_d(X_d^2 + Y_d^2)$$

↑  
Prismática

↖ ↗  
Descentral

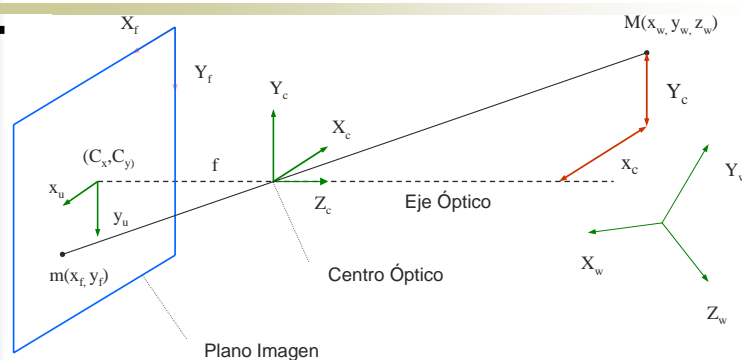
↑  
Radial

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

## Tabla de Contenidos

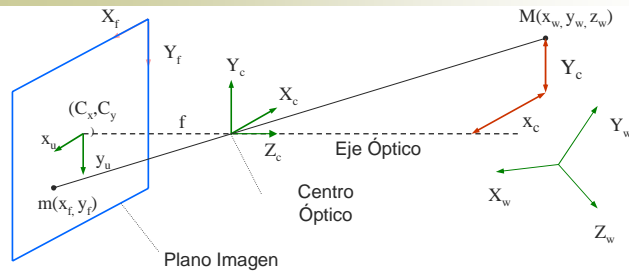
- Modelo de lentes: Pinhole, Delgada y Gruesa
- Parámetros del Modelo de Captación
- **Sistemas de Coordenadas involucradas**
- Proceso de Calibración

## Sistemas de Coordenadas



- Coordenadas del mundo ( $O; X_w, Y_w, Z_w$ )
- Coordenadas de la cámara ( $O_c; X_c, Y_c, Z_c$ )
- Coordenadas centrales de la imagen ( $C_x, C_y; x_u, y_u$ )
- Coordenadas laterales de la imagen ( $O_f; x_f, y_f$ )

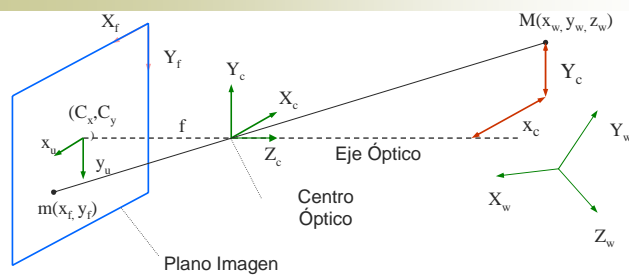
## Sistemas de Coordenadas



- Relación entre: las coordenadas del mundo y de la cámara:

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_c^w & t_c^w \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{M}_C = \begin{bmatrix} R_c^w & t_c^w \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{M}_W$$

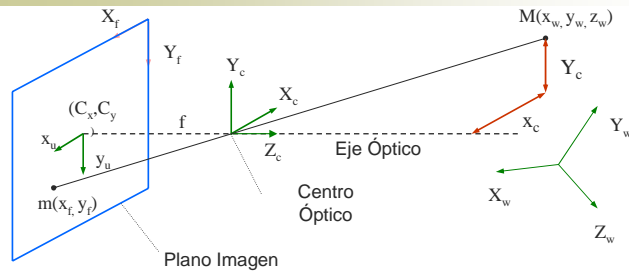
## Sistemas de Coordenadas



- Relación entre las coordenadas de la cámara y las centrales de la imagen:

$$\begin{bmatrix} nx_u \\ ny_u \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{m}_u = \tilde{A}_0 \tilde{M}_c$$

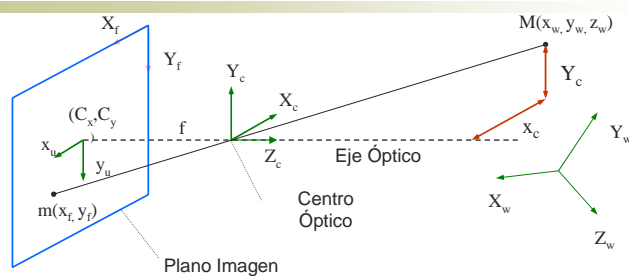
## Sistemas de Coordenadas



- Relación entre las coordenadas centrales de la imagen teóricas (sin distorsión) y reales (con distorsión):

$$\begin{aligned} x_d &= x_u + D_x(x_u, y_u) \\ y_d &= y_u + D_y(x_u, y_u) \end{aligned}$$

## Sistemas de Coordenadas

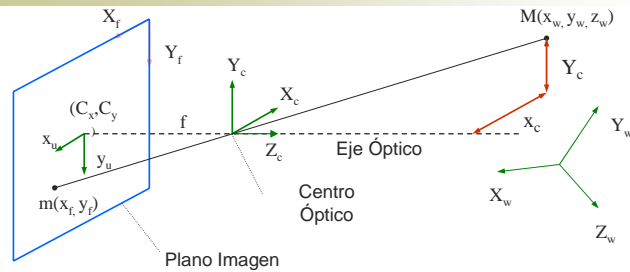


- Relación entre las coordenadas laterales y centrales de la imagen:

$$\begin{aligned} x_f &= K_x x_d + C_x \\ y_f &= K_y y_d + C_y \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} n x_f \\ n y_f \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x & 0 & C_x \\ 0 & K_y & C_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n x_d \\ n y_d \\ n \end{bmatrix}$$

$$\tilde{m}_f = \tilde{A}_1 \tilde{m}_d$$

## Sistemas de Coordenadas



- Resumen de Transformaciones:

$$\tilde{M}_c = \begin{bmatrix} R_c^w & t_c^w \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{M}_w \rightarrow \tilde{m}_u = \tilde{A}_0 \tilde{M}_c \rightarrow \begin{cases} x_d = x_u + D_x(x_u, y_u) \\ y_d = y_u + D_y(x_u, y_u) \end{cases}$$

$$\tilde{m}_f = \tilde{A}_1 \tilde{m}_d$$

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

27

## Sistemas de Coordenadas

- Coordenadas centrales de la cámara en función de las coordenadas del mundo y de los parámetros del modelo

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} n x_u \\ n y_u \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n x_u \\ n y_u \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_u = f \frac{r_{11}X_w + r_{12}Y_w + r_{13}Z_w + t_x}{r_{31}X_w + r_{32}Y_w + r_{33}Z_w + t_z} \\ y_u = f \frac{r_{21}X_w + r_{22}Y_w + r_{23}Z_w + t_y}{r_{31}X_w + r_{32}Y_w + r_{33}Z_w + t_z} \end{cases}$$

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

## Sistemas de Coordenadas

- Coordenadas laterales de la cámara en función de las coordenadas del mundo y de los parámetros del modelo

$$\left. \begin{aligned} x_d &= x_u + D_x(x_u, y_u) \\ y_d &= y_u + D_y(x_u, y_u) \\ x_f &= K_x x_d + C_x \\ y_f &= K_y y_d + C_y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x_f = C_x + K_x D_x(x_u, y_u) + K_x x_u \\ y_f = C_y + K_y D_y(x_u, y_u) + K_y y_u \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_f = C_x + K_x D_x(x_u, y_u) + K_x f \frac{r_{11}X_w + r_{12}Y_w + r_{13}Z_w + t_x}{r_{31}X_w + r_{32}Y_w + r_{33}Z_w + t_z} \\ y_f = C_y + K_y D_y(x_u, y_u) + K_y f \frac{r_{21}X_w + r_{22}Y_w + r_{23}Z_w + t_y}{r_{31}X_w + r_{32}Y_w + r_{33}Z_w + t_z} \end{cases}$$

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

## Sistemas de Coordenadas

- Relación matricial entre las coordenadas del mundo y las coordenadas laterales de la cámara (sin distorsión). **Matriz de Proyección**.

$$\tilde{m}_f = \tilde{A}_1 \tilde{A}_0 \begin{bmatrix} R_c^w & t_c^w \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{M}$$

$$\begin{bmatrix} n x_f \\ n y_f \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x f & 0 & C_x & 0 \\ 0 & K_y f & C_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n x_f \\ n y_f \\ n \end{bmatrix} = \tilde{P} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{m} = \tilde{P} \tilde{M} = \begin{bmatrix} P & p \end{bmatrix} \tilde{M}$$

$$\tilde{m} = \begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_c^w & t_c^w \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{M}$$

$$\tilde{m} = A \begin{bmatrix} R_c^w & t_c^w \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{M}$$

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

## Sistemas de Coordenadas

- Componentes de la **Matriz de Proyección** (sin distorsión)

$$\begin{bmatrix} n x_f \\ n y_f \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x f r_{11} + C_x r_{31} & K_x f r_{12} + C_x r_{32} & K_x f r_{13} + C_x r_{33} & K_x f t_x + C_x t_z \\ K_y f r_{21} + C_y r_{31} & K_y f r_{22} + C_y r_{32} & K_y f r_{23} + C_y r_{33} & K_y f t_y + C_y t_z \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Si } \begin{cases} \bar{r}_1 = [r_{11} & r_{12} & r_{13}] \\ \bar{r}_2 = [r_{21} & r_{22} & r_{23}] \\ \bar{r}_3 = [r_{31} & r_{32} & r_{33}] \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} n x_f \\ n y_f \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x f \bar{r}_1 + C_x \bar{r}_3 & K_x f t_x + C_x t_z \\ K_y f \bar{r}_2 + C_y \bar{r}_3 & K_y f t_y + C_y t_z \\ \bar{r}_3 & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{m} = \tilde{P} \tilde{M} = \begin{bmatrix} P & p \end{bmatrix} \tilde{M}$$

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

## Tabla de Contenidos

- Modelo de lentes: Pinhole, Delgada y Gruesa
- Parámetros del Modelo de Captación
- Sistemas de Coordenadas involucradas
- Proceso de Calibración**

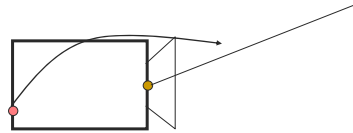
Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

32

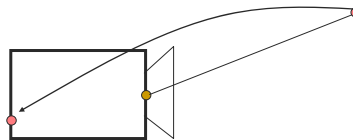


## Modelo General de Cámara

- Podemos modelar la cámara a partir del rayo proyección
- Permite incluir la distorsión



Calibración



Proyección

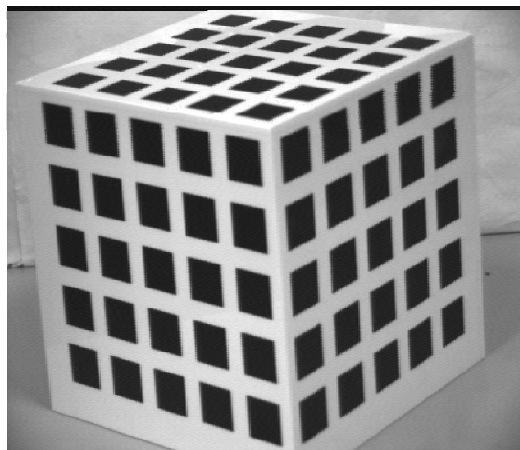
## Proceso de Calibración

- **CALIBRACIÓN:** Determinación de los parámetros involucrados en el proceso de captación:
  - **Parámetros intrínsecos:**
    - Factores de escala:  $K_x, K_y$
    - Distancia focal:  $f$
    - Punto principal:  $C_x, C_y$
    - Distorsión:  $D_x, D_y$
  - **Parámetros extrínsecos:**
    - Vector de traslación:  $t$
    - Matriz de rotación:  $R$

## Proceso de Calibración

- ***Etapas del proceso de calibración***
  - Ecuaciones del sistema: Modelo matemático
  - Obtención de datos de campo: Proyección sobre la imagen de puntos 3D conocidos
  - Determinación de los parámetros: Resolución de las ecuaciones con los datos de campo

## Proceso de calibración



Patrón de calibración

## Técnicas de Calibración

- Técnicas aplicadas a la Fotogrametría.
  - Son necesarios métodos de calibración muy exactos.
  - Se emplean ópticas profesionales sin problemas de distorsiones.
  - Conocimiento a priori de los parámetros intrínsecos.
- Técnicas aplicadas a la Robótica y Automatización.
  - Son necesarios métodos rápidos y autónomos.
  - Imágenes con menor resolución.
  - Se ven afectadas por muchos factores que de forma sistemática causan errores.

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

## Técnicas de Calibración

- Técnicas basadas en Modelos con significado físico
  - Aproximación clásica de la fotogrametría
  - Transformación Lineal Directa (DLT)
  - Restricción de Alineamiento Radial (RAC)
  - Punto de Desvanecimiento
- Técnicas basadas en Modelos matemáticos

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

## Proceso de Calibración

- Técnicas basadas en Modelos con significado físico:
  - **Aproximación clásica de la fotogrametría.**
    - Tienen en cuenta las ecuaciones convencionales de colinealidad del modelo pinhole de cámaras.
    - Resuelve el problema planteado realizando una optimización no lineal, para ello son necesarios buenos datos iniciales.
  - **Transformación Lineal Directa (DLT)**
    - Se realiza una calibración en dos pasos.
      - En primer lugar se calculan los elementos de la Matriz de Proyección.
      - A partir de ella se obtienen los parámetros intrínsecos y extrínsecos.

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

## Proceso de Calibración

- Técnicas basadas en Modelos con significado físico:
  - **Restricción de Alineamiento Radial (RAC)**
    - Incorpora únicamente la distorsión radial, manteniéndose la relación.
$$\frac{X_u}{Y_u} = \frac{X_d}{Y_d}$$
    - Se necesita conocer inicialmente una serie de parámetros del conjunto cámara/tarjeta.
    - El resto de los parámetros se obtiene de forma lineal.
  - **Punto de Desvanecimiento**
    - Calcula separadamente los parámetros intrínsecos y los extrínsecos.
    - Mediante optimización no lineal se puede incorporar cualquier modelo de distorsión.

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

## Proceso de Calibración

- Técnicas basadas en un modelo matemático.
  - No se tiene ningún significado físico de la cámara.
  - La idea básica es la relación entre un punto del espacio 3D y la proyección de ese punto en la imagen 2D.
  - La distorsión se compensa mediante interpolación.
  - Como inconveniente destacar la poca utilidad cuando se desarrollan sistemas activos de visión.

$$x_{f1} = \frac{\sum_{0 \leq i+j \leq 3} c_{ij}^{(1)} X_{1w}^i Y_{1w}^j}{\sum_{0 \leq i+j \leq 3} c_{ij}^{(3)} X_{1w}^i Y_{1w}^j}$$

$$y_{f1} = \frac{\sum_{0 \leq i+j \leq 3} c_{ij}^{(2)} X_{1w}^i Y_{1w}^j}{\sum_{0 \leq i+j \leq 3} c_{ij}^{(3)} X_{1w}^i Y_{1w}^j}$$

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

## Método de Transformación Lineal Directa

- Transformación Lineal Directa (DLT)
  - Obtención de los elementos de la matriz de proyección.
    - Sin considerar las restricciones
    - Considerando restricciones
  - Cálculo de los parámetros intrínsecos y extrínsecos a excepción de la distorsión.
  - Cálculo de la distorsión (si se modela).
  - Cálculo de otros errores sistemáticos.

$$\begin{bmatrix} n x_f \\ n y_f \\ n \end{bmatrix} = \tilde{P} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{p}_1 & p_{14} \\ \bar{p}_2 & p_{24} \\ \bar{p}_3 & p_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

## Método de Transformación Lineal Directa

- Obtención de los elementos de la matriz de proyección

$$\begin{bmatrix} n & x_f \\ n & y_f \\ n & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_f = \frac{p_{11}X_w + p_{12}Y_w + p_{13}Z_w + p_{14}}{p_{31}X_w + p_{32}Y_w + p_{33}Z_w + p_{34}} \\ y_f = \frac{p_{21}X_w + p_{22}Y_w + p_{23}Z_w + p_{24}}{p_{31}X_w + p_{32}Y_w + p_{33}Z_w + p_{34}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_{31}X_w x_f + p_{32}Y_w x_f + p_{33}Z_w x_f + p_{34}x_f - p_{11}X_w - p_{12}Y_w - p_{13}Z_w - p_{14} = 0 \\ p_{31}X_w y_f + p_{32}Y_w y_f + p_{33}Z_w y_f + p_{34}y_f - p_{21}X_w - p_{22}Y_w - p_{23}Z_w - p_{24} = 0 \end{cases}$$

$$\bar{p} = [p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{21}, p_{22}, p_{23}, p_{24}, p_{31}, p_{32}, p_{33}, p_{34}]$$

Sistema  $A\bar{p} = 0 \Rightarrow$  Solución Trivial  $\bar{p} = 0$

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

## Método de Transformación Lineal Directa

- Calculo de la Matriz de Proyección sin considerar las restricciones.

$$\frac{1}{p_{34}} \tilde{p} = \begin{pmatrix} \frac{p_{11}}{p_{34}} & \frac{p_{12}}{p_{34}} & \frac{p_{13}}{p_{34}} & \frac{p_{14}}{p_{34}} \\ \frac{p_{21}}{p_{34}} & \frac{p_{22}}{p_{34}} & \frac{p_{23}}{p_{34}} & \frac{p_{24}}{p_{34}} \\ \frac{p_{31}}{p_{34}} & \frac{p_{32}}{p_{34}} & \frac{p_{33}}{p_{34}} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \tilde{L} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \\ L_5 & L_6 & L_7 & L_8 \\ L_9 & L_{10} & L_{11} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n & x_f \\ n & y_f \\ n & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x f \bar{r}_1 + C_x \bar{r}_3 & K_x f t_x + C_x t_z \\ K_y f \bar{r}_2 + C_y \bar{r}_3 & K_y f t_y + C_y t_z \\ \bar{r}_3 & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} x_f = \frac{X_w L_1 + Y_w L_2 + Z_w L_3 + L_4}{X_w L_9 + Y_w L_{10} + Z_w L_{11} + 1} \\ y_f = \frac{X_w L_5 + Y_w L_6 + Z_w L_7 + L_8}{X_w L_9 + Y_w L_{10} + Z_w L_{11} + 1} \end{cases}$$

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara



## Método de Transformación Lineal Directa

- Cálculo de la matriz de perspectiva considerando las restricciones a que está sujeta:

$$\begin{bmatrix} n x_f \\ n y_f \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{p}_1 & p_{14} \\ \bar{p}_2 & p_{24} \\ \bar{p}_3 & p_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n x_f \\ n y_f \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x f \bar{r}_1 + C_x \bar{r}_3 & K_x f t_x + C_x t_z \\ K_y f \bar{r}_2 + C_y \bar{r}_3 & K_y f t_y + C_y t_z \\ \bar{r}_3 & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

sujeto a las restricciones

$$\|\bar{p}_3\| = 1$$

$$(\bar{p}_1 \wedge \bar{p}_3) \cdot (\bar{p}_2 \wedge \bar{p}_3) = 0$$

- Al emplear la segunda restricción se tiene que resolver un sistema no lineal que es algo que se pretende evitar con este método.

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

## Método de Transformación Lineal Directa

- Cálculo de la matriz de perspectiva considerando las restricciones a que está sujeta:
  - Se utiliza exclusivamente la primera restricción.
  - Se resuelve el problema de optimización dividiendo el conjunto de variables en dos, las que están sujetas a restricción y las que no, y empleando las técnicas de multiplicadores de Lagrange.

$$\min_{y,z} \|Cy + Dz\|^2 \text{ sujeto a } \|z\|^2 = 1$$

$$\min_{y,z} R = \|Cy + Dz\|^2 + \lambda \cdot (1 - \|z\|^2)$$

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara



## Método de Transformación Lineal Directa

- Cálculo de los parámetros intrínsecos y extrínsecos.

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} fK_x \bar{r}_1 + C_x \bar{r}_3 & fK_x t_x + C_x t_z \\ fK_y \bar{r}_2 + C_y \bar{r}_3 & fK_y t_y + C_y t_z \\ \bar{r}_3 & t_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{p}_1 & p_{14} \\ \bar{p}_2 & p_{24} \\ \bar{p}_3 & p_{34} \end{bmatrix}$$

- Cálculo inmediato de  $r_3$  y de  $t_z$
- Coordenadas del Punto Principal

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 \cdot \bar{p}_3^T &= (fK_x \bar{r}_1 + C_x \bar{r}_3) \cdot \bar{r}_3^T = fK_x \bar{r}_1 \cdot \bar{r}_3^T + C_x \bar{r}_3 \cdot \bar{r}_3^T = C_x \\ \bar{p}_2 \cdot \bar{p}_3^T &= (fK_y \bar{r}_2 + C_y \bar{r}_3) \cdot \bar{r}_3^T = fK_y \bar{r}_2 \cdot \bar{r}_3^T + C_y \bar{r}_3 \cdot \bar{r}_3^T = C_y \end{aligned}$$

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

## Método de Transformación Lineal Directa

- Cálculo de los parámetros intrínsecos y extrínsecos:
  - Cálculo de las distancias focales en x e y.

$$\begin{aligned} (*) \quad \bar{p}_1 \cdot \bar{p}_1^T - [\bar{p}_1 \cdot \bar{p}_3^T]^2 &= (fK_x \bar{r}_1 + C_x \bar{r}_3) \cdot (fK_x \bar{r}_1 + C_x \bar{r}_3)^T - [(fK_x \bar{r}_1 + C_x \bar{r}_3) \cdot \bar{r}_3^T]^2 = \\ &= fK_x \bar{r}_1 \cdot fK_x \bar{r}_1^T + C_x \bar{r}_3 \cdot fK_x \bar{r}_1^T + fK_x \bar{r}_1 \cdot C_x \bar{r}_3^T + C_x \bar{r}_3 \cdot C_x \bar{r}_3^T - [fK_x \bar{r}_1 \cdot \bar{r}_3^T - C_x \bar{r}_3 \cdot \bar{r}_3^T]^2 = \\ &= f^2 K_x^2 + C_x^2 - C_x^2 = f^2 K_x^2 = f_x^2 \Rightarrow f_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*) \quad \bar{p}_2 \cdot \bar{p}_2^T - [\bar{p}_2 \cdot \bar{p}_3^T]^2 &= (fK_y \bar{r}_2 + C_y \bar{r}_3) \cdot (fK_y \bar{r}_2 + C_y \bar{r}_3)^T - [(fK_y \bar{r}_2 + C_y \bar{r}_3) \cdot \bar{r}_3^T]^2 = \\ &= fK_y \bar{r}_2 \cdot fK_y \bar{r}_2^T + C_y \bar{r}_3 \cdot fK_y \bar{r}_2^T + fK_y \bar{r}_2 \cdot C_y \bar{r}_3^T + C_y \bar{r}_3 \cdot C_y \bar{r}_3^T - [fK_y \bar{r}_2 \cdot \bar{r}_3^T - C_y \bar{r}_3 \cdot \bar{r}_3^T]^2 = \\ &= f^2 K_y^2 + C_y^2 - C_y^2 = f^2 K_y^2 = f_y^2 \Rightarrow f_y \end{aligned}$$

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

## Método de Transformación Lineal Directa

- Cálculo de los parámetros intrínsecos y extrínsecos.
  - Cálculo de los parámetros extrínsecos restantes.

$$\bar{p}_1 = fK_x \bar{r}_1 + C_x \bar{r}_3 \Rightarrow \bar{r}_1 = \frac{\bar{p}_1 - C_x \bar{r}_3}{fK_x}$$

$$\bar{p}_2 = fK_y \bar{r}_2 + C_y \bar{r}_3 \Rightarrow \bar{r}_2 = \frac{\bar{p}_2 - C_y \bar{r}_3}{fK_y}$$

$$p_{14} = fK_x t_x + C_x t_z \Rightarrow t_x = \frac{p_{14} - C_x t_z}{fK_x}$$

$$p_{24} = fK_y t_y + C_y t_z \Rightarrow t_y = \frac{p_{24} - C_y t_z}{fK_y}$$

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

## Método de Transformación Lineal Directa

- Cálculo de la Distorsión
  - Un modelo más completo al utilizado hasta el momento es el siguiente.

$$x_f \sin \text{distorsion} + D_x + n_{x_f} = \frac{p_{11}X_w + p_{12}Y_w + p_{13}Z_w + p_{14}}{p_{31}X_w + p_{32}Y_w + p_{33}Z_w + p_{34}}$$

$$y_f \sin \text{distorsion} + D_y + n_{y_f} = \frac{p_{21}X_w + p_{22}Y_w + p_{23}Z_w + p_{24}}{p_{31}X_w + p_{32}Y_w + p_{33}Z_w + p_{34}}$$

- Despreciando todos los errores salvo la distorsión.

$$x_f - x_f \sin \text{distorsion} = D_x$$

$$y_f - y_f \sin \text{distorsion} = D_y$$

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

## Método de Transformación Lineal Directa

- Cálculo de otros errores sistemáticos.

$$x_f - (x_{f \text{ sin distorsion}} + D_x) = k_0 + k_1 x_f + k_2 y_f + k_3 x_f^2 + k_4 x_f y_f + k_5 y_f^2 + k_6 x_f^2 y_f + k_7 x_f y_f^2 + k_8 x_f^3 + k_9 y_f^3$$

$$y_f - (y_{f \text{ sin distorsion}} + D_y) = q_0 + q_1 y_f + q_2 x_f + q_3 y_f^2 + q_4 x_f y_f + q_5 x_f^2 + q_6 y_f^2 x_f + q_7 y_f x_f^2 + q_8 y_f^3 + q_9 x_f^3$$

- Es conveniente calcular en pasos distintos los parámetros intrínsecos y extrínsecos, los coeficientes de distorsión y los coeficientes de otros errores sistemáticos para evitar inestabilidades.

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

## Restricción de Alineamiento Radial (RAC)

- Restricción de Alineamiento Radial (RAC). **Método de Tsai**
  - Emplea un modelo de distorsión que solamente tiene en cuenta la distorsión radial.

$$D_x = X_d (k_1 r^2 + k_2 r^4 + \dots)$$

$$D_y = Y_d (k_1 r^2 + k_2 r^4 + \dots)$$

- Al existir solamente distorsión Radial se obtiene

$$\frac{x_d}{y_d} = \frac{x_u}{y_u} = \frac{r_{11}x_w + r_{12}y_w + r_{13}z_w + t_x}{r_{21}x_w + r_{22}y_w + r_{23}z_w + t_y}$$

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

## Restricción de Alineamiento Radial (RAC)

- Procedimiento:
  - Se supone conocido  $C_x, C_y, K_y$
  - Determinación de  $|R|, t_x, t_y$ 
    - Cálculo de coordenadas centrales con distorsión
    - Cálculo de incógnitas intermedias ( $a$ )
    - Cálculo de  $|t_y|$
    - Determinación del signo de  $t_y$
    - Cálculo de  $S_x$
    - Cálculo de  $|R|, t_x$
  - Determinación de  $f, k_1, t_z$ 
    - Aproximación inicial de  $\hat{f}, \hat{t}_z$
    - Cálculo iterativo de  $f, k_1, t_z$

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

## Restricción de Alineamiento Radial (RAC)

- Cálculo de coordenadas centrales con distorsión

A partir de los puntos :  $(x_f^i, y_f^i)$

$$\text{Se obtiene } \begin{cases} \hat{x}_d^i = (x_f^i - C_x) = K_x x_d^i \\ \hat{y}_d^i = (y_f^i - C_y) = K_y y_d^i \end{cases}$$

Si se forma el cociente :

$$\frac{\hat{x}_d^i}{\hat{y}_d^i} = \frac{K_x x_d^i}{K_y y_d^i} = \frac{S_x x_u^i}{y_u^i}$$

$$\text{con } S_x = \frac{K_x}{K_y}$$

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

## Restricción de Alineamiento Radial (RAC)

- Cálculo de incógnitas intermedias ( $a_j$ )

Sustituyendo en el cociente

$$\frac{\hat{x}_d^i}{\hat{y}_d^i} = S_x \frac{x_u^i}{y_u^i} = S_x \frac{r_{11}x_w^i + r_{12}y_w^i + r_{13}z_w^i + t_x}{r_{21}x_w^i + r_{22}y_w^i + r_{23}z_w^i + t_y}$$

Si  $t_y \neq 0$

$$\begin{aligned} \hat{x}_d^i + \underbrace{t_y^{-1} r_{21} x_w^i}_{a_4} \hat{x}_d^i + \underbrace{t_y^{-1} r_{22} y_w^i}_{a_5} \hat{x}_d^i + \underbrace{t_y^{-1} r_{23} z_w^i}_{a_6} \hat{x}_d^i = \\ \underbrace{t_y^{-1} S_x r_{11} x_w^i}_{a_1} \hat{y}_d^i + \underbrace{t_y^{-1} S_x r_{12} y_w^i}_{a_2} \hat{y}_d^i + \underbrace{t_y^{-1} S_x r_{13} z_w^i}_{a_3} \hat{y}_d^i + \underbrace{t_y^{-1} S_x t_x}_{a_7} \hat{y}_d^i \end{aligned}$$

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

## Restricción de Alineamiento Radial (RAC)

- Cálculo de incógnitas intermedias ( $a_j$ )

Se obtiene un sistema con  $n$  ecuaciones y 7 incógnitas

$$\hat{x}_d^i = a_1 x_w^i \hat{y}_d^i + a_2 y_w^i \hat{y}_d^i + a_3 z_w^i \hat{y}_d^i - a_4 x_w^i \hat{x}_d^i - a_5 y_w^i \hat{x}_d^i - a_6 z_w^i \hat{x}_d^i + a_7 \hat{y}_d^i \hat{x}_d^i$$

- Cálculo de  $|t_y|$

$$t_y = \frac{1}{\sqrt{a_4^2 + a_5^2 + a_6^2}}$$

- Determinación del signo de  $t_y$

Para un punto cualquiera (alejado del centro de la imagen) se calcula su proyección sin distorsión, ensayando con el valor positivo y el valor negativo

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

## Restricción de Alineamiento Radial (RAC)

- Cálculo de  $S_x$  
$$S_x = \sqrt{t_y^2 (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}$$

- Cálculo de  $|R|$ ,  $t_x$

$$r_{11} = a_1 \frac{t_y}{S_x} \quad r_{12} = a_2 \frac{t_y}{S_x} \quad r_{13} = a_3 \frac{t_y}{S_x}$$

$$r_{21} = a_4 t_y \quad r_{22} = a_5 t_y \quad r_{23} = a_6 t_y$$

$$r_{31} = \sqrt{1 - r_{11}^2 - r_{21}^2} \quad r_{32} = \sqrt{1 - r_{12}^2 - r_{22}^2} \quad r_{33} = \sqrt{1 - r_{13}^2 - r_{23}^2}$$

$$t_x = a_7 \frac{t_y}{S_x}$$

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

## Restricción de Alineamiento Radial (RAC)

- Determinación de  $f$ ,  $k_1$ ,  $t_z$ 
  - Aproximación inicial de  $f$ ,  $t_z$ 
    - Se obtiene  $f$ ,  $t_z$  con distorsión nula, mediante mínimos cuadrados
  - Cálculo iterativo de  $f$ ,  $k_1$ ,  $t_z$ 
    - Optimización no lineal del sistema

$$\hat{x}_d^i = K_x k_1 \left[ (\hat{x}_d^i)^2 + (\hat{y}_d^i)^2 \right] + K_x f \frac{r_{11} x_w^i + r_{12} y_w^i + r_{13} z_w^i + t_x}{r_{31} x_w^i + r_{32} y_w^i + r_{33} z_w^i + t_z}$$

$$\hat{y}_d^i = K_y k_1 \left[ (\hat{x}_d^i)^2 + (\hat{y}_d^i)^2 \right] + K_y f \frac{r_{21} x_w^i + r_{22} y_w^i + r_{23} z_w^i + t_x}{r_{31} x_w^i + r_{32} y_w^i + r_{33} z_w^i + t_z}$$

Visión 3D: Modelo Proyectivo de una Cámara

## Proceso de Calibración: Conclusiones

- *El proceso de calibración produce parámetros poco robustos, con alto grado de inestabilidad*
- Causas posibles:
  - Modelo matemático incompleto
  - Errores en la adquisición de los datos
  - Mal comportamiento de los algoritmos de calibración
- Consecuencia:
  - Mala precisión en las aplicaciones de visión tridimensional