Visión 3D

Reconocimiento de Objetos 3D
mediante Geometría Proyectiva

Luis M. Jiménez – José M. Sebastián

Ingeniería de Sistemas y Automática (UMH)

Introducción.

- Objetivos del Reconocimiento (proceso de identificación de los objetos extraídos de la escena):
  - Pertenencia de un objeto a un conjunto de modelos predefinidos
  - Determinación de la posición de un objeto
  - Comprobación de la características de un objeto (inspección)

Introducción. Definiciones

- Sea C_m un conjunto de descriptores de contornos

  Por ejemplo para una línea en un plano :

$$l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_m = [l_1 \quad l_2 \quad l_3]^T$$

- Se define la función $I(C_m)$

  Por ejemplo $I(C_m) = l_1 + l_2 + l_3$

- $I(C_m)$ será un invariante proyectivo si

$$I(C_m) = I(T[C_m])$$

  siendo T cualquier transformación proyectiva

  Atención : El ejemplo no es un invariante proyectivo

Introducción.

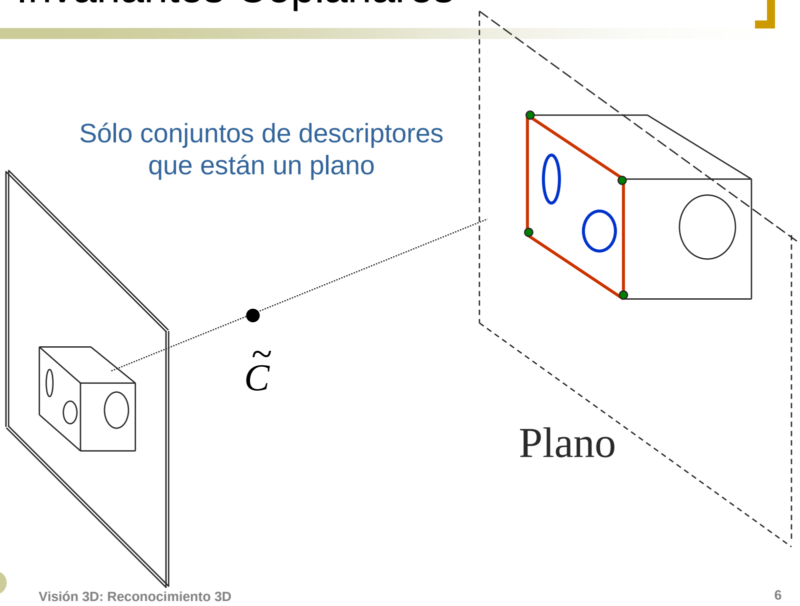
- Tipos de Invariantes:
  - Invariantes Coplanares
    - Puntos coplanares. Rectas coplanares.
    - Cónicas coplanares
    - Conjuntos de objetos coplanares
  - Invariantes de varios planos
    - Puntos, rectas y cónicas
  - Invariantes Espaciales
    - Puntos, rectas
    - Cuádricas y curvas alabeadas
    - Varias proyecciones

Introducción.

- Consideraciones sobre los invariantes
  - Sobre los Descriptores (puntos, rectas, ...)
    - Posibilidad de detección en la imagen
    - Robustez ante el ruido
    - Robustez ante cualquier transformación
  - Sobre los Invariantes
    - Consideraciones de los descriptores
    - Orden de los descriptores (permutaciones)
    - Separación entre invariantes
    - Invariantes más adecuados para cada caso

Invariantes Coplanares

Sólo conjuntos de descriptores
que están un plano



Invariantes para Puntos y Rectas Coplanares

- Razón doble para cuatro puntos que pertenecen a una recta proyectiva : $\tilde{M}_i, \tilde{m}_i = [\alpha_i \quad 1]^T$;
  α_i = Coeficient e Proyectivo

$$Cr\left\{\left(\tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \tilde{M}_3, \tilde{M}_4\right)\right\} = \frac{D_{13}\left(\tilde{M}_1, \tilde{M}_3\right) \Big/ D_{14}\left(\tilde{M}_1, \tilde{M}_4\right)}{D_{23}\left(\tilde{M}_2, \tilde{M}_3\right) \Big/ D_{24}\left(\tilde{M}_2, \tilde{M}_4\right)}$$

Con $D_{ij}\left(\tilde{M}_i, \tilde{M}_j\right) = \alpha_i - \alpha_j = \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_j \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

Es dual para cuatro rectas que pertenecen a un haz de rectas

Invariantes para Puntos y Rectas Coplanares

- Razón doble para cuatro puntos que pertenecen a una recta proyectiva: $\tilde{M}_i, \tilde{m}_i = [\alpha_i \quad 1]^T$;
  Ejemplo: $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 4, \alpha_4 = 6$

$$Cr\left\{\left(\tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \tilde{M}_3, \tilde{M}_4\right)\right\} = 1.2$$

$$Cr\left\{\left(\tilde{M}_2, \tilde{M}_1, \tilde{M}_3, \tilde{M}_4\right)\right\} = 0.833$$

Depende del orden. Así si la razón doble inicial es τ

Se puede obtener : $\tau \qquad {}^{1}\!/\!_{\tau} \qquad 1-\tau \qquad \dfrac{1}{1-\tau} \qquad \dfrac{\tau}{1-\tau} \qquad \dfrac{\tau-1}{\tau}$

Invariantes para Puntos y Rectas Coplanares

Para independizarlo del orden se define el j-invariante:

$$j(\tau) = \frac{(\tau^2 - \tau + 1)^3}{\tau^2(\tau - 1)^2}$$

$$\tau = 1.2 \quad \Rightarrow \quad j(\tau) = 33.101$$

$$1/\tau = 0.833 \quad \Rightarrow \quad j(\tau) = 33.101$$

$$1 - \tau = -0.2 \quad \Rightarrow \quad j(\tau) = 33.101$$

$$\frac{1}{1-\tau} = -5 \quad \Rightarrow \quad j(\tau) = 33.101$$

$$\frac{\tau}{1-\tau} = 6 \quad \Rightarrow \quad j(\tau) = 33.101$$

$$\frac{\tau - 1}{\tau} = 0.166 \quad \Rightarrow \quad j(\tau) = 33.101$$

Invariantes para Puntos y Rectas Coplanares

- Invariante de Cinco Rectas Coplanares

(o por dualidad Cinco Puntos Coplanares):

$$\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \tilde{L}_3, \tilde{L}_4, \tilde{L}_5 \qquad \tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \tilde{P}_4, \tilde{P}_5$$

Se define el determinante de tres rectas o de tres puntos :

$$M_{ijk} = \left| \tilde{L}_i \quad \tilde{L}_j \quad \tilde{L}_k \right|$$

$$M^*_{ijk} = \left| \tilde{P}_i \quad \tilde{P}_j \quad \tilde{P}_k \right|$$

Se definen dos invariantes proyectivos:

$$I_1 = \frac{|M_{431}||M_{521}|}{|M_{421}||M_{531}|} \qquad I_2 = \frac{|M_{421}||M_{532}|}{|M_{432}||M_{521}|}$$

Invariantes para Puntos y Rectas Coplanares

- Problemas:
  - Dificultad para identificar el orden de los puntos para hallar el invariante. Combinación de invariantes
  - Robustez ante el ruido
  - Robustez ante las distintas transformaciones
  - Similitud entre los valores obtenidos para distintos conjuntos de puntos

Invariantes para Puntos y Rectas Coplanares

J-invariantes de cinco rectas coplanares

Evita la dependencia de los invariantes con el orden

$$\begin{array}{l}\lambda_1 = I_1(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \tilde{l}_3, \tilde{l}_4, \tilde{l}_5) \\ \lambda_2 = I_1(\tilde{l}_2, \tilde{l}_1, \tilde{l}_3, \tilde{l}_4, \tilde{l}_5)\end{array}; \quad J[\lambda] = \frac{2\lambda^6 - 6\lambda^5 + 9\lambda^4 - 8\lambda^3 + 9\lambda^2 - 6\lambda + 2}{\lambda^6 - 3\lambda^5 + 3\lambda^4 - \lambda^3 + 3^2 - 3\lambda + 1}$$

$$J^{(1)} = J[\lambda_1] \quad J^{(2)} = J[\lambda_2] \quad J^{(3)} = J\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right]$$

$$J^{(4)} = J\left[\frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_1 - 1}\right] \quad J^{(5)} = J\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_1 - 1}\right]$$

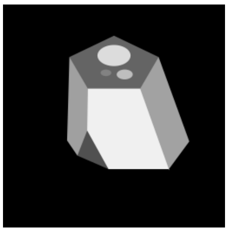
$$\boxed{\bar{J} = \left[J^{(1)}, J^{(2)}, J^{(3)}, J^{(4)}, J^{(5)}\right]}$$

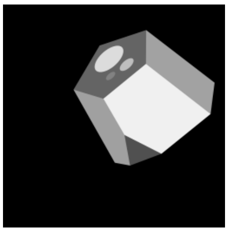
El vector $\bar{J}^*$ obtenido ordenando el vector $\bar{J}$ es invariante

Ejemplos. Invariantes Coplanares

Pieza 1

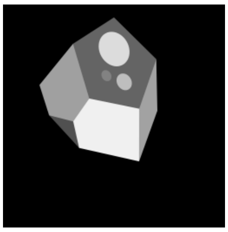
Vista 1

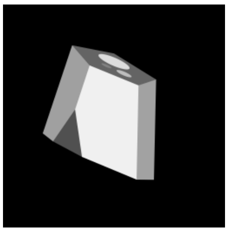




Vista 2

Vista 3



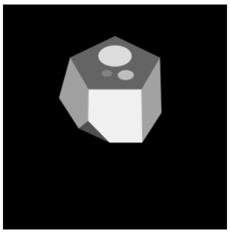


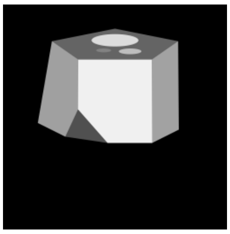
Vista 4

Ejemplos. Invariantes Coplanares

Pieza 2

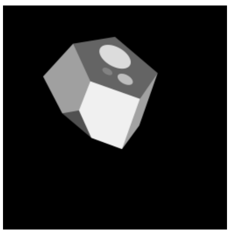
Vista 1

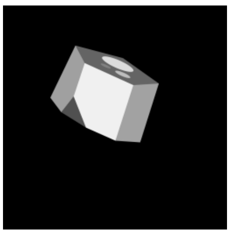




Vista 2

Vista 3

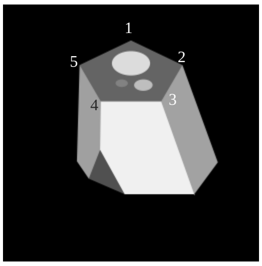




Vista 4

Ejemplos. Puntos y Rectas Coplanares

Pieza 1
Vista 1



Puntos,	Pentágono		1 :
Nº	x	y	z
1	1.00	0.27	1.00
2	1.40	0.47	1.00
3	1.23	0.75	1.00
4	0.76	0.75	1.00
5	0.59	0.47	1.00

$M_{431} = -0.223 \quad M_{521} = -0.153 \quad M_{421} = -0.235$

$M_{531} = -0.235 \quad M_{532} = -0.227 \quad M_{432} = -0.133$

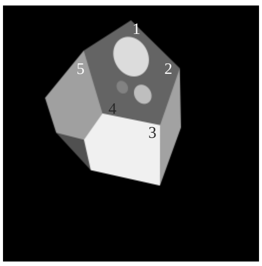
$I_1 = 0.6180 \qquad I_2 = 2.6180$

Con otro orden $I_1 = 0.3819 \quad I_1 = 1.6180$

J^* Invariante $= [2.59 \quad 2.59 \quad 2.60 \quad 2.60 \quad 2.60]$

Ejemplos. Puntos y Rectas Coplanares

Pieza 1
Vista 3



Puntos,	Pentágono		1 :
Nº	x	y	z
1	1.00	0.11	1.00
2	1.38	0.48	1.00
3	1.22	0.93	1.00
4	0.77	0.84	1.00
5	0.63	0.35	1.00

$M_{431} = -0.347 \quad M_{521} = -0.228 \quad M_{421} = -0.360$

$M_{531} = -0.356 \quad M_{532} = -0.354 \quad M_{432} = -0.214$

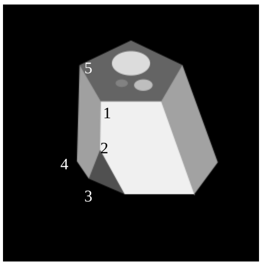
$I_1 = 0.6180 \qquad I_2 = 2.6180$

Con otro orden $I_1 = 0.3819 \quad I_1 = 1.6180$

J^* Invariante $= [2.59 \quad 2.59 \quad 2.60 \quad 2.60 \quad 2.60]$

Ejemplos. Puntos y Rectas Coplanares

Pieza 1
Vista 1



Puntos, Pentágono 2 :

Nº	x	y	z
1	0.76	0.75	1.00
2	0.75	1.13	1.00
3	0.67	1.35	1.00
4	0.57	1.21	1.00
5	0.59	0.47	1.00

$$M_{431} = -0.686 \quad M_{521} = -0.064 \quad M_{421} = -0.067$$

$$M_{531} = -0.126 \quad M_{532} = -0.094 \quad M_{432} = -0.032$$

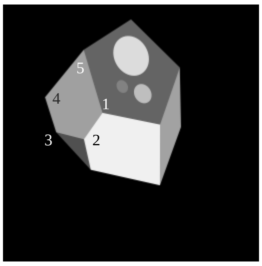
$$I_1 = 0.5145 \quad I_2 = 3.0213$$

Con otro orden $I_1 = 0.3309$ $I_1 = 1.9432$

J^* Invariante $= [2.301 \quad 2.452 \quad 2.527 \quad 2.781 \quad 2.796]$

Ejemplos. Puntos y Rectas Coplanares

Pieza 1
Vista 3



Puntos, Pentágono 2 :

Nº	x	y	z
1	0.77	0.84	1.00
2	0.63	1.04	1.00
3	0.41	0.99	1.00
4	0.32	0.72	1.00
5	0.63	0.35	1.00

$$M_{431} = -0.111 \quad M_{521} = -0.101 \quad M_{421} = -0.109$$

$$M_{531} = -0.199 \quad M_{532} = -0.151 \quad M_{432} = -0.054$$

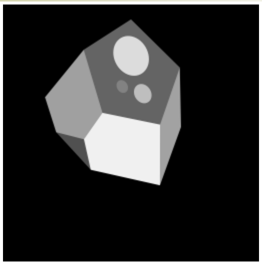
$$I_1 = 0.5145 \quad I_2 = 3.0213$$

Con otro orden $I_1 = 0.3309$ $I_1 = 1.9432$

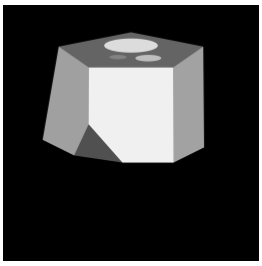
J^* Invariante $= [2.301 \quad 2.452 \quad 2.527 \quad 2.781 \quad 2.796]$

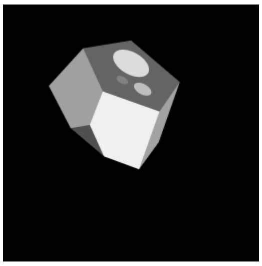
Ejemplos. Puntos y Rectas Coplanares

Pieza 1
Vista 3



Pieza 2
Vista 2

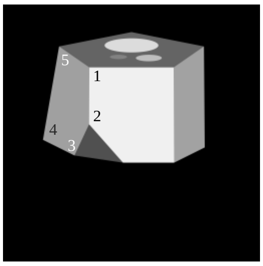




Pieza 2
Vista 3

Ejemplos. Puntos y Rectas Coplanares

Pieza 2
Vista 2



Puntos, Pentágono 2 :

Nº	x	y	z
1	0.67	0.48	1.00
2	0.66	0.93	1.00
3	0.55	1.17	1.00
4	0.31	1.05	1.00
5	0.43	0.32	1.00

$$M_{431} = -0.182 \quad M_{521} = -0.104 \quad M_{421} = -0.158$$

$$M_{531} = -0.180 \quad M_{532} = -0.125 \quad M_{432} = -0.073$$

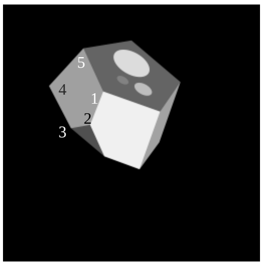
$$I_1 = 0.6665 \qquad I_2 = 2.5931$$

Con otro orden $I_1 = 0.3856$ $I_1 = 1.5003$

J^* Invariante $= [2.404 \quad 2.459 \quad 2.610 \quad 2.702 \quad 2.769]$

Ejemplos. Puntos y Rectas Coplanares

Pieza 2
Vista 3



Puntos, Pentágono 2 :

Nº	x	y	z
1	0.77	0.67	1.00
2	0.67	0.93	1.00
3	0.52	0.96	1.00
4	0.35	0.63	1.00
5	0.62	0.34	1.00

$$M_{431} = -0.131 \quad M_{521} = -0.074 \quad M_{421} = -0.114$$

$$M_{531} = -0.128 \quad M_{532} = -0.090 \quad M_{432} = -0.053$$

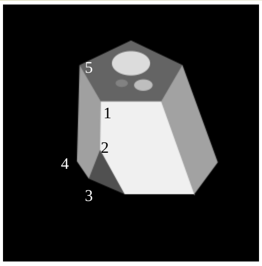
$$I_1 = 0.6663 \qquad I_2 = 2.5943$$

Con otro orden $I_1 = 0.3854 \quad I_1 = 1.5007$

J^* Invariante $= [2.405 \quad 2.460 \quad 2.609 \quad 2.702 \quad 2.768]$

Ejemplos. Puntos y Rectas Coplanares

Pieza 1
Vista 1



Puntos, Pentágono 2 :

Nº	x	y	z
1	0.764	0.754	1.00
2	0.758	1.130	1.00
3	0.670	1.355	1.00
4	0.577	1.219	1.00
5	0.598	0.470	1.00

J^* Invariante $= [2.301 \quad 2.452 \quad 2.527 \quad 2.781 \quad 2.796]$

Pieza 1. Vista 1

Con Ruido σ=1.0
(antes de normalizar)

Puntos, Pentágono 2 :

Nº	x	y	z
1	0.762	0.753	1.00
2	0.756	1.129	1.00
3	0.668	1.353	1.00
4	0.582	1.216	1.00
5	0.600	0.472	1.00

J^* Invariante $= \begin{bmatrix} 2.264 & 2.423 & 2.519 \\ 2.792 & 2.799 & \end{bmatrix}$

Ejemplos. Puntos y Rectas Coplanares.

		Modelo 1		Modelo 2	
		Penta 1	Penta 2	Penta 1	Penta 2
Pieza 1	Penta 1	0.0000	3.7484	0.0000	1.9358
Vista 1	Penta 2	3.7484	0.0000	3.7484	0.4874
Pieza 1	Penta 1	0.0000	3.7484	0.0000	1.9358
Vista 3	Penta 2	3.7484	0.0000	3.7483	2.2715
Pieza 2	Penta 1	0.0000	3.7484	0.0000	1.9358
Vista 2	Penta 2	1.9358	0.4916	1.9358	0.0000
Pieza 2	Penta 1	0.0000	3.7484	0.0000	1.9358
Vista 3	Penta 2	1.9310	0.4902	1.9310	0.0000
Pie1 – Vis1	Penta 1	0.0170	3.2830	0.0170	1.5917
Ruido	Penta 2	4.5412	0.0484	4.5412	0.7624

Tabla Resumen. Distancia Piezas-Modelos

Invariantes para Cónicas Coplanares

- Invariante de Dos Cónicas Coplanares $\tilde{C}_1 , \tilde{C}_2$ tales que $|\tilde{C}_1| , |\tilde{C}_2| = 1$ (si no son degeneradas, es inmediato por el factor de escalado).

Se definen dos invariantes proyectivos:

$$I_3 = traza\left[\tilde{C}_1^{-1}\ \tilde{C}_2\right] \qquad I_4 = traza\left[\tilde{C}_2^{-1}\ \tilde{C}_1\right]$$

Invariantes para Cónicas Coplanares

- Demostración. Hay que demostrar que:

$$traza\left[\tilde{C}_1^{-1}\,\tilde{C}_2\right] = traza\left[\tilde{c}_1^{-1}\,\tilde{c}_2\right]$$

Se parte de:

$$\tilde{C}_i \xrightarrow{\tilde{T}} \tilde{c}_i \qquad\qquad \tilde{M} \xrightarrow{\tilde{T}} \tilde{m}$$

Con: $\tilde{m} = \tilde{T}\tilde{M} \quad \tilde{M} = \tilde{T}^{-1}\tilde{m} \quad \tilde{M}^T\tilde{C}_i\tilde{M} = 0 \quad \tilde{m}^T\tilde{c}_i\tilde{m} = 0$

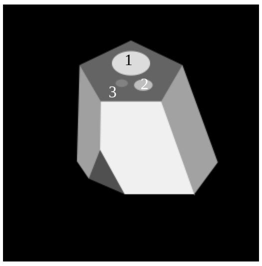
$$\tilde{M}^T\tilde{C}_i\tilde{M} = 0 \;\Rightarrow\; \tilde{m}^T\tilde{T}^{-T}\tilde{C}_i\tilde{T}^{-1}\tilde{m} = 0 \;\Rightarrow\; \tilde{c}_i = \tilde{T}^{-T}\tilde{C}_i\tilde{T}^{-1}$$

$$traza\left[\tilde{c}_1^{-1}\,\tilde{c}_2\right] = traza\left[\tilde{T}\tilde{C}_1\tilde{T}^T\tilde{T}^{-T}\tilde{C}_2\tilde{T}^{-1}\right] =$$

$$traza\left[\tilde{T}\tilde{C}_1\tilde{C}_2\tilde{T}^{-1}\right] = traza\left[\tilde{C}_1\tilde{C}_2\tilde{T}^{-1}\tilde{T}\right] = traza\left[\tilde{C}_1\tilde{C}_2\right]$$

Ejemplos. Cónicas Coplanares

Pieza 1
Vista 1



$$\tilde{c}_1 = \begin{bmatrix} -2.62 & -0.00 & -0.00 \\ -0.00 & -6.51 & -3.53 \\ -0.00 & -3.53 & -1.85 \end{bmatrix}$$

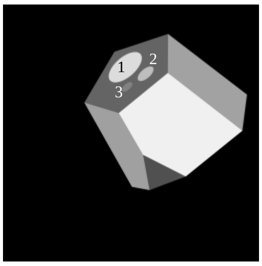
$$\tilde{c}_2 = \begin{bmatrix} -4.16 & -0.07 & 0.37 \\ -0.07 & -11.00 & -4.09 \\ 0.37 & -4.09 & -1.54 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c}_3 = \begin{bmatrix} -5.45 & 0.07 & -0.36 \\ 0.07 & -14.36 & -5.56 \\ -0.36 & -5.56 & -2.16 \end{bmatrix}$$

$$traza\left[\tilde{c}_1^{-1}\,\tilde{c}_2\right] = -2.4649$$
$$traza\left[\tilde{c}_2^{-1}\,\tilde{c}_1\right] = -5.8029$$
$$traza\left[\tilde{c}_1^{-1}\,\tilde{c}_3\right] = -1.9134$$
$$traza\left[\tilde{c}_3^{-1}\,\tilde{c}_1\right] = -7.8089$$
$$traza\left[\tilde{c}_2^{-1}\,\tilde{c}_3\right] = -4.0732$$
$$traza\left[\tilde{c}_3^{-1}\,\tilde{c}_2\right] = -6.3024$$

Ejemplos. Cónicas Coplanares

Pieza 1
Vista 2



$$\mathrm{traza}\left[\tilde{c}_1^{-1}\,\tilde{c}_2\right] = -2.4805$$
$$\mathrm{traza}\left[\tilde{c}_2^{-1}\,\tilde{c}_1\right] = -5.8170$$
$$\mathrm{traza}\left[\tilde{c}_1^{-1}\,\tilde{c}_3\right] = -1.9071$$
$$\mathrm{traza}\left[\tilde{c}_3^{-1}\,\tilde{c}_1\right] = -7.8183$$
$$\mathrm{traza}\left[\tilde{c}_2^{-1}\,\tilde{c}_3\right] = -4.0774$$
$$\mathrm{traza}\left[\tilde{c}_3^{-1}\,\tilde{c}_2\right] = -6.2955$$

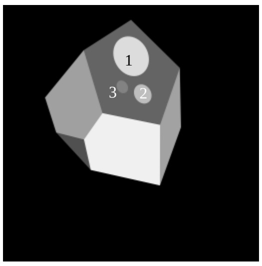
$$\tilde{c}_1 = \begin{bmatrix} -4.94 & -3.24 & -1.88 \\ -3.24 & -5.93 & -3.18 \\ -1.88 & -3.18 & -1.66 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c}_2 = \begin{bmatrix} -8.29 & -5.63 & -1.65 \\ -5.63 & -9.91 & -3.93 \\ -1.65 & -3.93 & -1.60 \end{bmatrix}$$

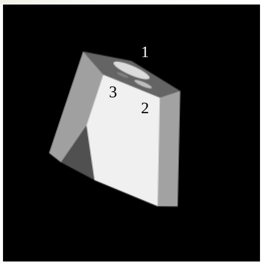
$$\tilde{c}_3 = \begin{bmatrix} -10.63 & -7.27 & -2.93 \\ -2.93 & -13.09 & -4.92 \\ -2.93 & -4.92 & -1.84 \end{bmatrix}$$

Ejemplos. Cónicas Coplanares

Pieza 1
Vista 3



Pieza 1
Vista 4

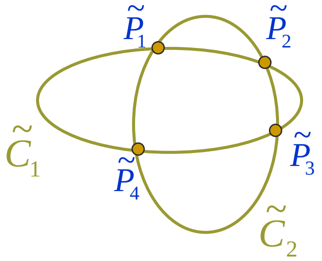


$$\mathrm{traza}\left[\tilde{c}_1^{-1}\,\tilde{c}_2\right] = -2.4725$$
$$\mathrm{traza}\left[\tilde{c}_2^{-1}\,\tilde{c}_1\right] = -5.8080$$
$$\mathrm{traza}\left[\tilde{c}_1^{-1}\,\tilde{c}_3\right] = -1.9038$$
$$\mathrm{traza}\left[\tilde{c}_3^{-1}\,\tilde{c}_1\right] = -7.8097$$
$$\mathrm{traza}\left[\tilde{c}_2^{-1}\,\tilde{c}_3\right] = -4.0758$$
$$\mathrm{traza}\left[\tilde{c}_3^{-1}\,\tilde{c}_2\right] = -6.2888$$

$$\mathrm{traza}\left[\tilde{c}_1^{-1}\,\tilde{c}_2\right] = -2.4612$$
$$\mathrm{traza}\left[\tilde{c}_2^{-1}\,\tilde{c}_1\right] = -5.8222$$
$$\mathrm{traza}\left[\tilde{c}_1^{-1}\,\tilde{c}_3\right] = -1.9225$$
$$\mathrm{traza}\left[\tilde{c}_3^{-1}\,\tilde{c}_1\right] = -7.8400$$
$$\mathrm{traza}\left[\tilde{c}_2^{-1}\,\tilde{c}_3\right] = -4.0741$$
$$\mathrm{traza}\left[\tilde{c}_3^{-1}\,\tilde{c}_2\right] = -6.3341$$

Invariantes para Cónicas Coplanares

- Dos Cónicas, no degeneradas: $\tilde{C}_1\ \tilde{C}_2$



∘ Dos cónicas coplanares se cortan en cuatro puntos (reales o complejos)

∘ Para cualquier punto $\tilde{A}_1 \in \tilde{C}_1 \Rightarrow$
$Cr\left\{\left(\overline{A_1P_1}\,,\ \overline{A_1P_2}\,,\ \overline{A_1P_3}\,,\ \overline{A_1P_4}\right)\right\} = \tau_1$

∘ Para cualquier punto $\tilde{A}_2 \in \tilde{C}_2 \Rightarrow Cr\left\{\left(\overline{A_2P_1}\,,\ \overline{A_2P_2}\,,\ \overline{A_2P_3}\,,\ \overline{A_2P_4}\right)\right\} = \tau_2$

∘ $\tau_1\,,\tau_2$ Son funciones de las raices de: $\det\left[\tilde{C}_1 + \lambda\,\tilde{C}_2\right] = 0$

∘ $Cr\left\{\left(0,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_1\right)\right\} = \tau_1$ ∘ $Cr\left\{\left(\infty,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_1\right)\right\} = \tau_2$

∘ Para que no dependan del orden de los puntos, se emplean los $j-$invariantes

Introducción.

- Tipos de Invariantes:
  - Invariantes Coplanares
    - Puntos coplanares. Rectas coplanares.
    - Cónicas coplanares
    - Conjuntos de objetos coplanares
  - Invariantes de varios planos
    - Puntos, rectas y cónicas
  - Invariantes Espaciales
    - Puntos, rectas
    - Cuádricas y curvas alabeadas
    - Varias proyecciones

Invariantes para objetos coplanares

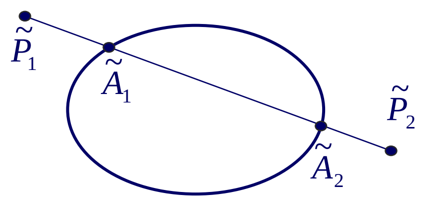
- Dos Puntos y dos Rectas Coplanares (los puntos no pertenecen a las rectas):

$$\tilde{l}_1 \; , \; \tilde{l}_2 \; , \; \tilde{m}_1 \; , \; \tilde{m}_2$$

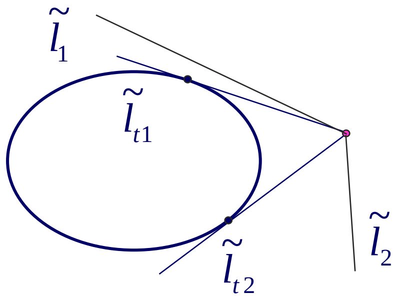
$$I = \frac{\tilde{l}_1^{\,T} \cdot \tilde{m}_1}{\tilde{l}_2^{\,T} \cdot \tilde{m}_1} \; \frac{\tilde{l}_2^{\,T} \cdot \tilde{m}_2}{\tilde{l}_1^{\,T} \cdot \tilde{m}_2}$$

Invariantes para objetos coplanares

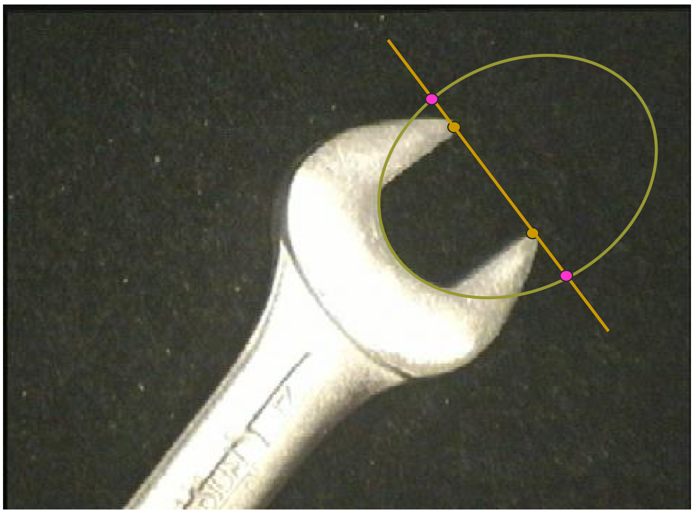
- Cónica y puntos:
  - Razón doble de cuatro puntos



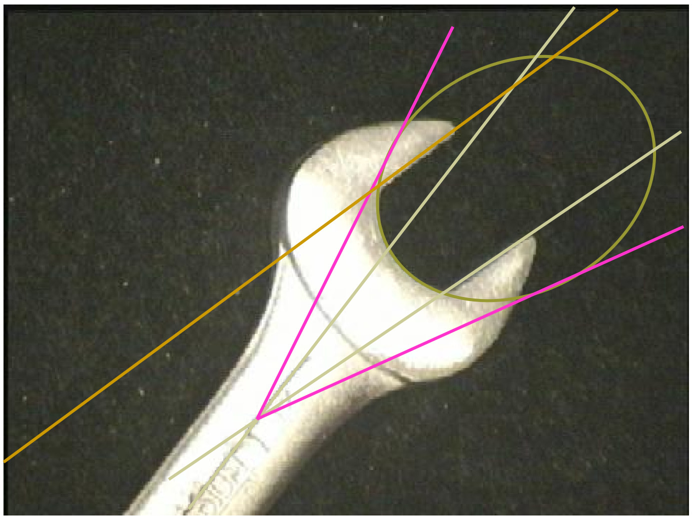
- Cónica y Rectas:
  - Razón doble de cuatro rectas



Invariantes para objetos coplanares



Invariantes para objetos coplanares

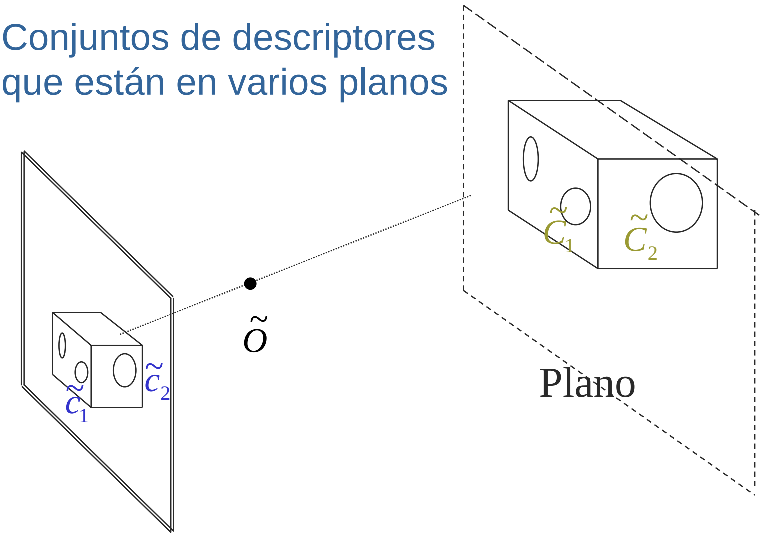


Introducción.

- Tipos de Invariantes:
  - Invariantes Coplanares
    - Puntos coplanares. Rectas coplanares.
    - Cónicas coplanares
    - Conjuntos de objetos coplanares
  - Invariantes de varios planos
    - Puntos, rectas y cónicas
  - Invariantes Espaciales
    - Puntos, rectas
    - Cuádricas y curvas alabeadas
    - Varias proyecciones

Invariantes de varios Planos

Conjuntos de descriptores que están en varios planos



Invariantes para Cónicas Coplanares

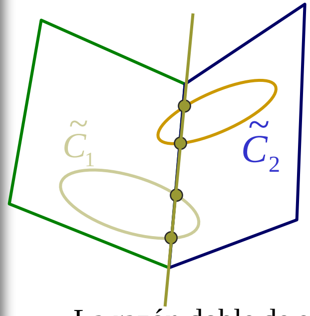
- Dos Cónicas no coplanares, no degeneradas : $\tilde{C}_1 \; \tilde{C}_2$ se proyectan sobre la imagen en dos cónicas $\tilde{c}_1 \; \tilde{c}_2$
  - Las proyectadas se cortan en cuatro puntos (reales o complejos) : $\tilde{p}_1 , \tilde{p}_2 , \tilde{p}_3 , \tilde{p}_4$
  - Para cada cónica proyectada y los puntos se obtiene : τ_1 , τ_2
  - τ_1 , τ_2 Son funciones de las raices de : $\det\left[\tilde{C}_1 + \lambda\, \tilde{C}_2\right] = 0$

$\circ\; Cr\left\{ \left(0, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1\right) \right\} = \tau_1$ $\quad\circ\; Cr\left\{ \left(\infty, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1\right) \right\} = \tau_2$

- Para que no dependan del orden de los puntos, se emplean los $j-$invariantes

Invariantes para Cónicas Coplanares

- Dos Cónicas no coplanares, no degeneradas : $\tilde{C}_1 \; \tilde{C}_2$



- Se determina la recta intersección de los planos que contienen las cónicas
  - Se determina los puntos de corte (dos por cada cónica) de la recta con cada cónica.
- La razón doble de estos cuatro puntos : $\tilde{p}_1 , \tilde{p}_2 , \tilde{p}_3 , \tilde{p}_4$ es invariante ante cualquier transformación proyectiva
- Para que no dependan del orden de los puntos, se emplean los $j-$invariantes

Introducción.

- Tipos de Invariantes:
  - Invariantes Coplanares
    - Puntos coplanares. Rectas coplanares.
    - Cónicas coplanares
    - Conjuntos de objetos coplanares
  - Invariantes de varios planos
    - Puntos, rectas y cónicas
  - Invariantes Espaciales
    - Puntos, rectas
    - Cuádricas y curvas alabeadas
    - Varias proyecciones

Invariantes Espaciales

- Para una configuración espacial general no es posible estimar invariantes proyectivos desde una sola imagen, al no existir colineación entre el espacio y la imagen.
- Opciones:
  - Configuraciones especiales
  - Relaciones entre invariantes espaciales e invariantes en la imagen
  - Varias proyecciones

Invariantes Espaciales ante una Colineación

- El número de invariantes para un conjunto de objetos proyectivos (puntos, rectas, cónicas, ...) es igual a la diferencia entre la dimensión de la configuración y la dimensión del grupo de la transformación
  - Para **seis puntos espaciales**: 6x3-(16-1)=3 (tres grados de libertad para cada punto y quince por la colineación
  - Para **seis puntos coplanares**: 6x2-(9-1)=4 (dos grados de libertad para cada punto y ocho para la colineación)
  - Para **dos cónicas no coplanares**: 2x(5+3)-(16-1)=1 (por cada cónica hay cinco grados de libertad, más tres para cada plano que la contiene y quince por la colineación)

Invariantes Espaciales ante una Colineación

Seis puntos espaciales:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_1 &\xrightarrow{T} (1,0,0,0)^T \\
\tilde{X}_2 &\xrightarrow{T} (0,1,0,0)^T \\
\tilde{X}_3 &\xrightarrow{T} (0,0,1,0)^T \\
\tilde{X}_4 &\xrightarrow{T} (0,0,0,1)^T \\
\tilde{X}_5 &\xrightarrow{T} (1,1,1,1)^T \\
\tilde{X}_6 &\xrightarrow{T} (I_1, I_2, I_3, 1)^T
\end{aligned}$$

Son invariantes: I_1, I_2, I_3

Invariantes Espaciales ante una Colineación

Seis puntos coplanares:

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}_1 &\xrightarrow{T} (1,0,0)^T \\
\tilde{x}_2 &\xrightarrow{T} (0,1,0)^T \\
\tilde{x}_3 &\xrightarrow{T} (0,0,1)^T \\
\tilde{x}_4 &\xrightarrow{T} (1,1,1)^T \\
\tilde{x}_5 &\xrightarrow{T} (i_1, i_2, 1)^T \\
\tilde{x}_6 &\xrightarrow{T} (i_3, i_4, 1)^T
\end{aligned}
$$

Son invariantes: i_1, i_2, i_3, i_4

Invariantes Espaciales ante una Colineación

- Curva Alabeada Cúbica (The twisted cubic)

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \tilde{T} \begin{bmatrix} \theta^3 \\ \theta^2 \\ \theta \\ 1 \end{bmatrix}
$$

Ante cualquier transformación proyectiva, dados cuatro puntos de la curva: $\tilde{P}_1(\theta_1), \tilde{P}_2(\theta_2), \tilde{P}_3(\theta_3), \tilde{P}_4(\theta_4)$ la razón doble permanece constante

Existe una única twisted cubic que pasa por seis puntos espaciales. Los seis puntos originan sólo tres combinaciones de "cross-ratio" independientes, por lo que sólo existirán tres invariantes.

Invariantes Espaciales ante una Colineación

En un espacio P^n se toman $n+3$ puntos:

$$[\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_{n+3}]$$

Un invariante será (con sus permutaciones):

$$I = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_{n-1} & x_n & x_{n+2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_{n-1} & x_n & x_{n+3} \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_{n-1} & x_{n+1} & x_{n+3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_{n-1} & x_{n+1} & x_{n+2} \end{vmatrix}}$$

Es invariante ante cualquier colineación (transformación entre espacios proyectivos de dimensión n)

Invariantes Espaciales ante una Colineación

En un espacio P^3 se toman $3+3$ puntos:

$$[\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_6]$$

Se define el determinante $D_{ijkl} = \begin{vmatrix} \tilde{x}_i & \tilde{x}_j & \tilde{x}_k & \tilde{x}_l \end{vmatrix}$

Invariantes: $I_1 = \dfrac{D_{2345} \cdot D_{1346}}{D_{2346} \cdot D_{1345}}$

$$I_2 = \frac{D_{2345} \cdot D_{1246}}{D_{2346} \cdot D_{1245}} \quad ; \quad I_3 = \frac{D_{2345} \cdot D_{1236}}{D_{2346} \cdot D_{1235}}$$

Invariantes Espaciales

- Relación entre invariantes proyectivos espaciales e invariantes proyectivos en la imagen:
  - Se considera un conjunto de elementos proyectivos $Q \in P^3$ con un vector de invariantes α
  - Se considera la imagen del conjunto de elementos proyectivos $q \in P^2$ con un vector de invariantes β
  - Para ciertos conjuntos de elementos proyectivos α, β satisfacen una o más polinomios $f(\alpha, \beta)=0$

Invariantes Espaciales. Relaciones

- 6 puntos $\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \cdots, \tilde{X}_6\} \in P^3$ (4 no coplanares)

  Se define el determinante $D_{ijkl} = \left|\tilde{X}_i \quad \tilde{X}_j \quad \tilde{X}_k \quad \tilde{X}_l\right|$

  $$\text{Inv}: \quad I_1 = \frac{D_{2345} \cdot D_{1346}}{D_{2346} \cdot D_{1345}} \; ; \; I_2 = \frac{D_{2345} \cdot D_{1246}}{D_{2346} \cdot D_{1245}} \quad ; \quad I_3 = \frac{D_{2345} \cdot D_{1236}}{D_{2346} \cdot D_{1235}}$$

- 6 puntos $\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_6\} \in$ Imagen

  Se define el determinante $d_{ijk} = \left|\tilde{x}_i \quad \tilde{x}_j \quad \tilde{x}_k\right|$

  $$\text{Inv}: \; i_1 = \frac{d_{346} \cdot d_{235}}{d_{345} \cdot d_{236}} \quad i_2 = \frac{d_{346} \cdot d_{124}}{d_{246} \cdot d_{134}} \quad i_3 = \frac{d_{346} \cdot d_{245}}{d_{345} \cdot d_{246}} \quad i_4 = \frac{d_{346} \cdot d_{123}}{d_{236} \cdot d_{134}}$$

- Se cumple: $I_3(I_2 - 1)i_1 i_2 - I_3(I_1 - 1)i_1 - I_1(I_2 - 1)i_2 =$

  $= I_2(I_3 - 1)i_3 i_4 - I_2(I_1 - 1)i_3 - I_1(I_3 - 1)i_4$

Invariantes Espaciales. Varias vistas

- No es posible obtener los invariantes proyectivos de seis puntos espaciales con una sola vista.
- Se puede demostrar que si es posible determinar los invariantes de seis puntos espaciales con al menos tres vistas:
  - No es necesario que la cámara y las vistas estén calibradas.
  - Si es necesario establecer la correspondencia entre las proyecciones de los seis puntos en las tres imágenes
- En general se cumple: número de vistas=número de invariantes / número de relaciones *f(αβ)=0*

Invariantes Espaciales

- $\begin{cases} r \text{ puntos } \left\{ \tilde{X}_i ; 1 \le i \le r \right\} \in P^3 \\ 6 - r \text{ rectas } \left\{ \tilde{L}_i ; 1 \le i \le 6-r \right\} \in P^3 \end{cases}$ $\quad r \ne 0{,}4$

Existe una única "twisted cubic" que pasa por los r puntos $\tilde{\mathrm{X}}_\mathrm{i}$ y corta a la recta $\tilde{L}_i$ en dos puntos : $\tilde{U}_i, \tilde{V}_i$

Existirán $9-r$ relaciones invariantes.

Así para $r=3 \quad (i=1,2,3)$:

$$\mathrm{Cr}\left\{\left(\theta_{\tilde{x}_1},\theta_{\tilde{x}_2},\theta_{\tilde{x}_3},\theta_{\tilde{u}_i}\right)\right\}+\mathrm{Cr}\left\{\left(\theta_{\tilde{x}_1},\theta_{\tilde{x}_2},\theta_{\tilde{x}_3},\theta_{\tilde{v}_i}\right)\right\}$$
$$\mathrm{Cr}\left\{\left(\theta_{\tilde{x}_1},\theta_{\tilde{x}_2},\theta_{\tilde{x}_3},\theta_{\tilde{u}_i}\right)\right\}\cdot\mathrm{Cr}\left\{\left(\theta_{\tilde{x}_1},\theta_{\tilde{x}_2},\theta_{\tilde{x}_3},\theta_{\tilde{v}_i}\right)\right\}$$