Visión 3D

Reconstrucción 3D Proyectiva
(Autocalibración)

Luis M. Jiménez – José M. Sebastián

Ingeniería de Sistemas y Automática (UMH)

Objetivos

- Hasta que punto podemos obtener información de la ubicación de objetos en la escena y de las cámaras a partir de dos vistas (no calibradas)
- Datos: correspondencias entre puntos proyectados en dos planos de imagen:

$$\tilde{m}_i \cong \tilde{P}\,\tilde{M}_i \cong [P \quad p]\begin{bmatrix} M_i \\ 1 \end{bmatrix} \cong PM_i + p$$

$$\tilde{m}'_i \cong \tilde{P}'\,\tilde{M}_i \cong [P' \quad p']\begin{bmatrix} M_i \\ 1 \end{bmatrix} \cong P'M_i + p'$$

Calibración (Proyectiva)

- Matriz Fundamental:

$$\tilde{m}'^T F \tilde{m} = 0$$

$$\boxed{F = A'^{-T} t_{[\wedge]} R A^{-1}}$$

$$\tilde{M}_{c'}^{c} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \; \tilde{M}_{c}^{c'} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz Esencial:

$$\tilde{P} = \tilde{A}\tilde{M}_c^w , \quad \tilde{P}' = \tilde{A}'\tilde{M}_{c'}^w$$

$$\tilde{q}'^T \, E \, \tilde{q} = 0$$

$$\boxed{E = t_{[\wedge]} R}$$

$$\tilde{m} \cong A\tilde{q} \qquad \tilde{m}' \cong A'\tilde{q}'$$

Esquema general

- Calcular la matriz Fundamental/Esencial a partir de la correspondencia de puntos
- Calcular las matrices proyectivas de cada cámara a partir de la matriz Fundamental
- Triangulación: para cada correspondencia $\tilde{m}_i \leftrightarrow \tilde{m}_i'$ calcular el punto en el espacio proyectivo que se proyecta en estos dos puntos.

Cálculo de la matriz Fundamental

$$\tilde{m}_i'^T F \tilde{m}_i = 0$$

$$F = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & -e_1h_1 - e_2h_2 \\ h_3 & h_4 & -e_1h_3 - e_2h_4 \\ -e_1'h_1 - e_2'h_3 & -e_1'h_2 - e_2'h_4 & e_1e_1'h_1 + e_2e_1'h_2 + e_1e_2'h_3 + e_2e_2'h_4 \end{bmatrix}$$

Siendo los epipolos:

$$\tilde{e} \cong \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \tilde{e}' \cong \begin{bmatrix} e_1' \\ e_2' \\ 1 \end{bmatrix}$$

Homografía entre rectas epipolares

$$\tau \rightarrow \tau' = \frac{a\tau + b}{d\tau + c} = -\frac{h_2\tau + h_1}{h_4\tau + h_3}$$

Matrices de cada cámara P, P'

- A partir de la matriz fundamental (***F***):

$$F = \left[p' - P'P^{-1}p\right]_{[\wedge]} P'P^{-1} \qquad F = A'^{-T} t_{[\wedge]} R A^{-1}$$

  - Quedan determinadas salvo una transformación proyectiva del espacio 3D
  - Una solución es (cámara canónica):

$$\tilde{P} = \left[I \mid 0\right] \qquad \tilde{P}' = \left[[e']\wedge F \mid e'\right]$$

  - P' es singular => centro óptico en el plano del infinito

Matrices de cada cámara P, P'

- A partir de la matriz Esencial (***E***): $E = t_{[\wedge]} R$
  - Quedan determinadas salvo un factor de escala y una ambigüedad de cuatro configuraciones posibles:

$$\tilde{P} = \left[I \quad | \ 0 \right],$$

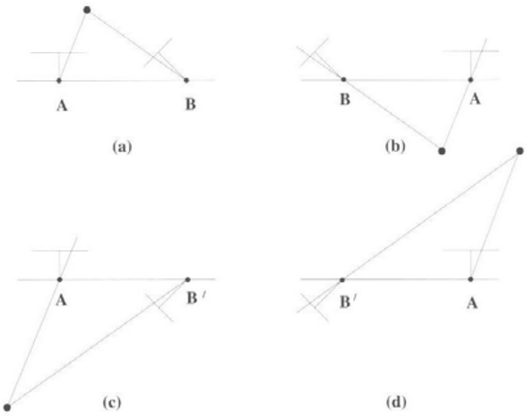
$$\tilde{P}' = \left[UWV^T \quad | u_3 \right]$$

$$\tilde{P}' = \left[UW^T V^T \quad | u_3 \right]$$

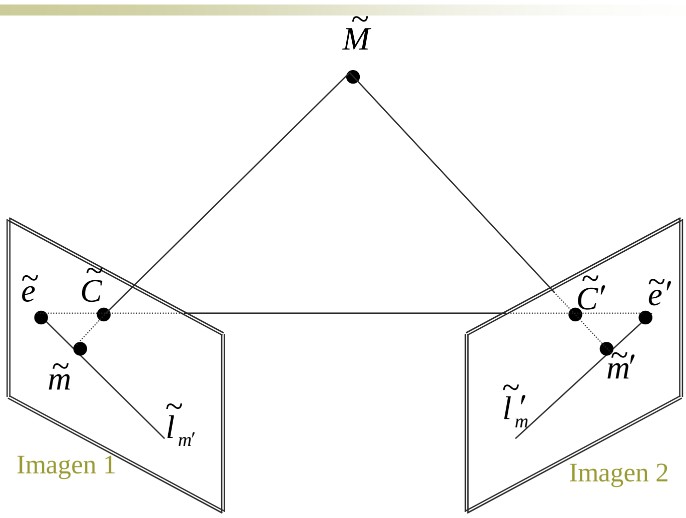
$$\tilde{P}' = \left[UWV^T \quad | -u_3 \right]$$

$$\tilde{P}' = \left[UW^T V^T \quad | -u_3 \right]$$

U, V^T, SVD de E



Triangulación



Triangulación

- Rectas proyección: $\tilde{m}_i \cong \tilde{P}\,\tilde{M}_i \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^T \\ P_2^T \\ P_3^T \end{bmatrix} \tilde{M}_i$

$$\begin{matrix} P_3^T \tilde{M}_i x = P_1^T\ \tilde{M}_i \\ P_3^T \tilde{M}_i y = P_2^T\ \tilde{M}_i \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} P_3^T x - P_1^T \\ P_3^T y - P_2^T \end{bmatrix} \tilde{M}_i = 0$$

- Triangulación:

$$\begin{bmatrix} P_3^T x - P_1^T \\ P_3^T y - P_2^T \\ P'^T_3\, x' - P'^T_1 \\ P'^T_3\, y' - P'^T_2 \end{bmatrix} \tilde{M}_i = 0$$

- Estimación mínimos cuadrados: (SVD)

$$\min_{\tilde{M}_i} \left[\left(\tilde{m} - \lambda^{-1} P \tilde{M}_i\right)^2 + \left(\tilde{m}' - \lambda'^{-1} P' \tilde{M}_i\right)^2 \right]$$

Ambigüedad de la reconstrucción

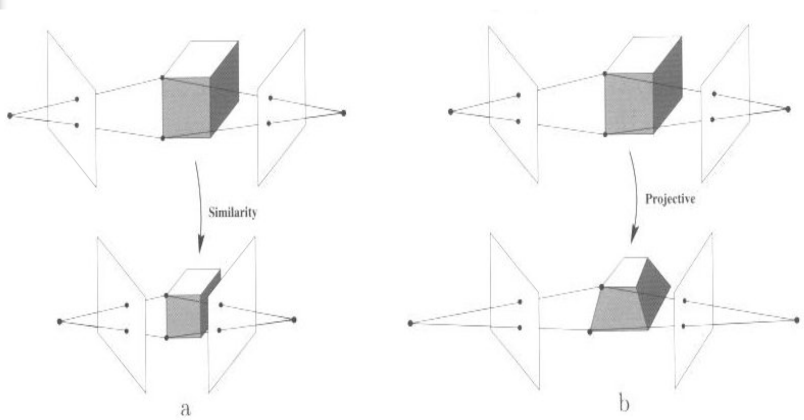
- De forma general no es posible reconstruir la posición y orientación absolutas sin información adicional acerca de la escena respecto a un SC.
- Para un par de cámaras calibrado (*A, A'*):
  - La escena queda determinada salvo una transformación de similaridad (Rotación, Traslación y Escala)

$$\tilde{H}_S = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\textit{Cambiando} \quad \tilde{M}_i \to \tilde{H}_S \tilde{M}_i\,, \quad \tilde{P} \to \tilde{P}\tilde{H}_S^{-1}, \quad \tilde{P}' \to \tilde{P}'\tilde{H}_S^{-1}$$

$$\tilde{m}_i \cong \tilde{P}\tilde{M}_i \cong (\tilde{P}\tilde{H}_S^{-1})(\tilde{H}_S \tilde{M}_i), \quad \tilde{m}_i' \cong \tilde{P}\tilde{M}_i' \cong (\tilde{P}'\tilde{H}_S^{-1})(\tilde{H}_S \tilde{M}_i')$$

Ambigüedad de la reconstrucción



Cámaras calibradas

Cámaras no calibradas

Ambigüedad de la reconstrucción

- Para un par de cámaras no calibradas:
  - La escena queda determinada salvo una transformación proyectiva
- Otras ambigüedades:
  - Dos cámaras relacionadas por una movimiento de traslación (misma *A*): -> es posible la reconstrucción salvo una transformación afín
  - Dos cámaras calibradas salvo su distancia focal -> es posible la reconstrucción salvo una transformación de similaridad

Reconstrucción Proyectiva

- Teorema:
  - SI un conjunto de correspondencias en dos vistas determina la matriz Fundamental de forma única, ENTONCES la escena y las cámaras pueden ser reconstruidas a parir de estas correspondencias, siendo cualquier reconstrucción obtenida proyectivamente equivalente.
  - (Los puntos de la línea base quedan excluidos)

Reconstrucción Proyectiva

- Sean: $\left(\tilde{P}_1, \tilde{P}_1', \{\tilde{M}_{1i}\}\right), \left(\tilde{P}_2, \tilde{P}_2', \{\tilde{M}_{2i}\}\right)$
- Dos reconstrucciones obtenidas a partir de los puntos correspondientes.

$$\tilde{m}_i'^T F \tilde{m}_i = 0$$

- Entonces existe una matriz no singular tal que:

$$\tilde{P}_2 = \tilde{P}_1 \tilde{H}^{-1}, \quad \tilde{P}_2' = \tilde{P}_1' \tilde{H}^{-1}, \quad \tilde{M}_{2i} = \tilde{H} \tilde{M}_{1i} \Rightarrow mismos \quad (\tilde{m}_i, \tilde{m}_i')$$

- Excepto para aquellos puntos tal que:

$$F \tilde{m}_i = \tilde{m}_i'^T F \quad = 0 \quad \text{Epipolos}$$

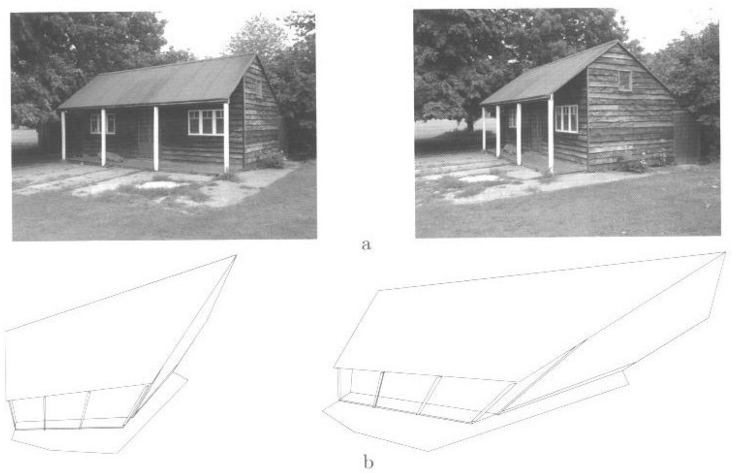
Reconstrucción Proyectiva

- Ventajas:
  - Permite reconstruir proyectivamente una escena sin información acerca de la calibración o posición de las dos cámaras.
  - La verdadera reconstrucción (Euclidea) esté en alguna transformación proyectiva de la anterior.

$$\left(\tilde{P},\tilde{P}',\{\tilde{M}_i\}\right),\left(\tilde{P}_E,\tilde{P}_E',\{\tilde{M}_{Ei}\}\right)$$

$$\tilde{P}_E=\tilde{P}\tilde{H}^{-1},\quad \tilde{P}_E'=\tilde{P}'\tilde{H}^{-1},\quad \tilde{M}_{Ei}=\tilde{H}\tilde{M}_i$$

Reconstrucción Proyectiva



Reconstrucción Proyectiva

- Aplicaciones:
  - Paralelaje: Navegación de robots, distancia colisión
  - Homografía entre vistas: modelado a partir de vistas
  - Homografía entre puntos con una cámara sin traslación: Mosaicos

Paralelaje proyectivo

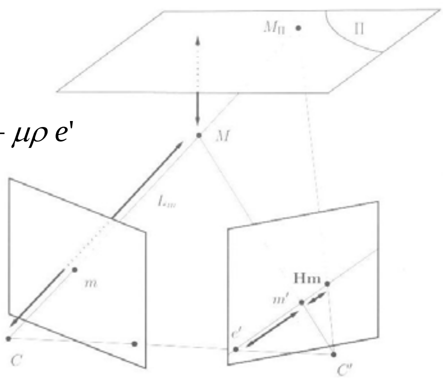
- Paralelaje: distancia a un plano (obstáculo)

$$\tilde{m} \cong [I_3 \quad | 0_3]\tilde{M} \quad \Rightarrow \quad \tilde{M} \cong \begin{bmatrix} \tilde{m} \\ \rho \end{bmatrix}$$

$$\tilde{m}' \cong [H \quad | \mu\, e']\tilde{M} \quad \Rightarrow \tilde{m}' \cong H\tilde{m} + \mu\rho\, e'$$

$$\tilde{m}' \cong H\tilde{m} + \kappa\, e'$$

$$\boxed{[\tilde{m}']_\wedge H\tilde{m} + \kappa\, [\tilde{m}']_\wedge e' = 0}$$

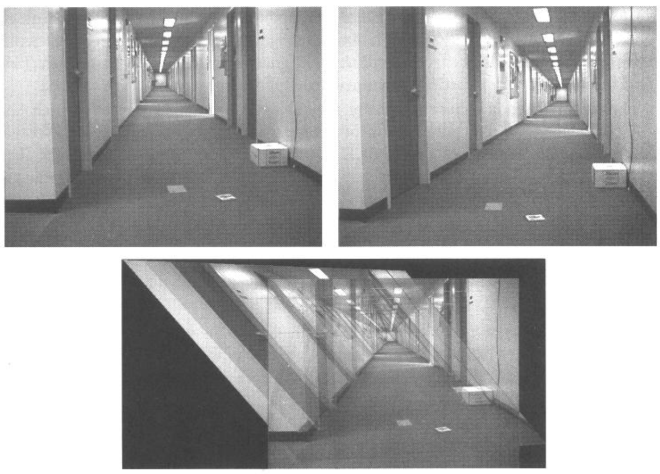


- k: ratio de distancias desde ***m'*** a H_m y ***e'***

Paralelaje proyectivo

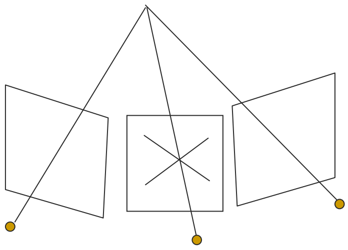
- Paralelaje:
  - Directamente proporcional a la distancia al plano
  - Inversamente proporcional a la profundidad
- Datos: F, H
- Cambio de signo de K indica si el punto está delante o detrás del plano
  - Las transformaciones proyectivas no preservan el orden en profundidad

Paralelaje proyectivo



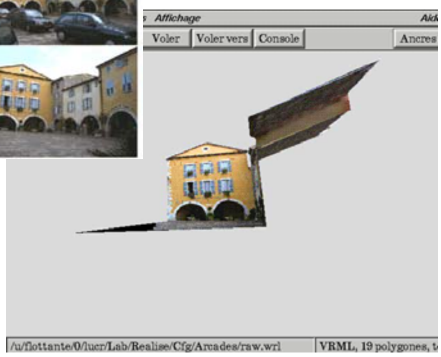
Homografía entre vistas

- Permite obtener la vista desde otro punto si precisar de un modelo 3D
  - Basta definir una nueva matriz de cámara ***P''*** y calcular las dos matrices fundamentales (F_{12}, F_{13}) -> matrices de transferencia
  - La nueva imagen se calcula como intersección de las líneas epipolares



$$\tilde{m}'' \cong F_{12}\tilde{m} \wedge F_{23}\tilde{m}'$$

Homografía entre vistas



Homografía entre Puntos. Mosaico

- Mosaico: Se adquiere una secuencia de imágenes:
  - Sin translación (t=0)
  - Con rotación y cambio de parámetros intrínsecos

$$\text{Si} \quad \tilde{m} \cong \tilde{A}\,\tilde{M}_c \cong [A \quad 0]\,\tilde{M}_c \cong A\,M_c$$

$$\tilde{m}' \cong \tilde{A}' \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{M}_C \cong [A' \quad 0] \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{M}_C \cong A' R\, M_C$$

Homografía entre Puntos. Mosaico

- Proyectando $\tilde{M}_c = [M_c \quad 1]^T \quad \Rightarrow$

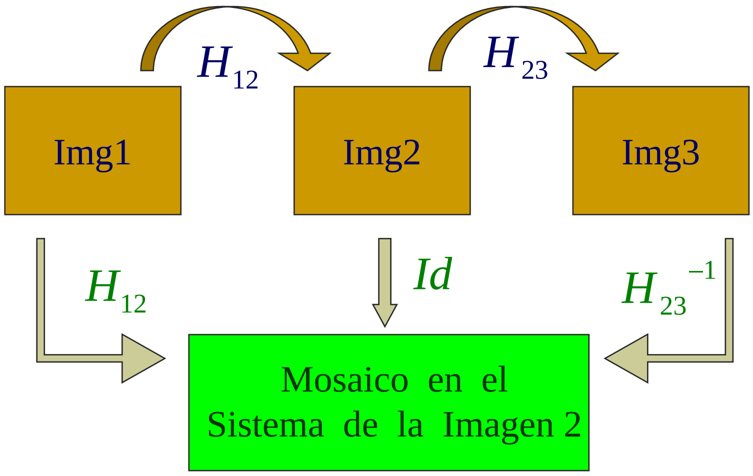
$$\tilde{m} = \kappa\, A\, M_c \quad \Rightarrow \quad M_c = \kappa^{-1} A^{-1} \tilde{m}$$

- Proyectando $\tilde{M}_c = [M_c \quad 1]$ en la otra vista

$$\tilde{m}' = k' k^{-1} A' R A^{-1} \tilde{m} \;\Rightarrow$$

$$\boxed{\tilde{m}' = H_\theta \tilde{m} \quad \text{con} \quad H_\theta = H_\infty}$$

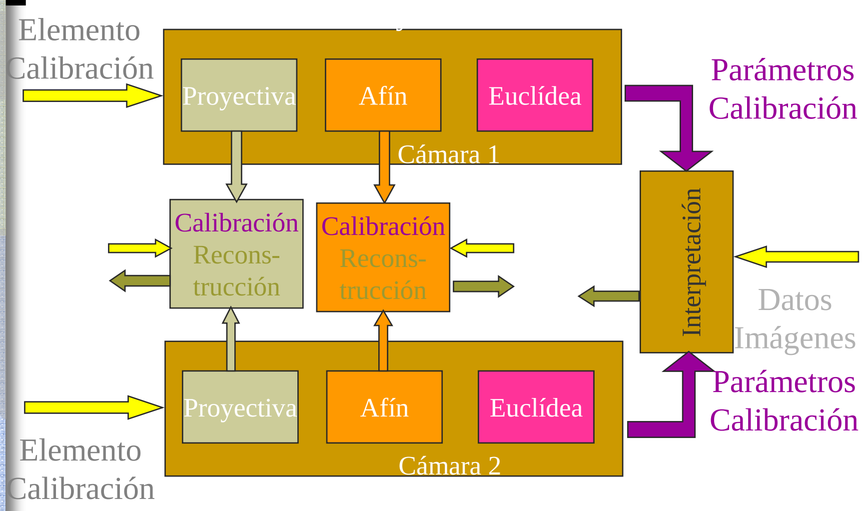
Homografía entre Puntos. Mosaico



Homografía entre Puntos. Mosaico

Mosaico del Hotel Carlton
(Imad Zoghlami)

Reconstrucción por niveles



Reconstrucción Afín

- La calibración Afín supone calcular la matriz fundamental y la Homografía en el infinito (equivale al plano en el infinito).

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix} \in \Pi_\infty \qquad \tilde{m}' = H_\infty \tilde{m} \quad \text{con} \quad H_\infty = A'RA^{-1}$$

- Dada una cierta reconstrucción Proyectiva y el valor del plano en el infinito. Podemos calcular la transformación proyectiva de dicho plano a sus coordenadas en la reconstrucción Afín:

$$\left(\tilde{P}, \tilde{P}', \{\tilde{M}_i\}\right)$$

$$H^{-T}\tilde{\Pi}_\infty = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \Rightarrow \qquad H = \begin{bmatrix} I \mid 0 \\ \Pi_\infty \end{bmatrix}$$

- La transformación H se aplicaría a todos los puntos y a las dos cámaras

Reconstrucción Afín

- La reconstrucción afín difiere de la reconstrucción Euclidea en una transformación Afín.
- Aplicaciones:
  - Paralelaje Afín: umbral de distancia a obstáculos
  - Centroide de un conjunto de puntos
  - Punto medio entre dos puntos
  - Líneas paralelas a otras o a planos
  - Ratios de distancias

Reconstrucción Afín

- Cálculo del plano en el infinito (caso particular):
  - Solo existe traslación entre ambas cámaras:
    - Un punto en el plano del infinito se proyecta en el mismo punto en dos planos imagen trasladados

$$(\tilde{m}_i \leftrightarrow \tilde{m}_i) \Rightarrow \tilde{M}_i$$

    - Se precisan tres puntos para calcular el plano en el infinito.
    - En este caso la matriz fundamental queda:

$$F = e_{[\wedge]} = e'_{[\wedge]}$$

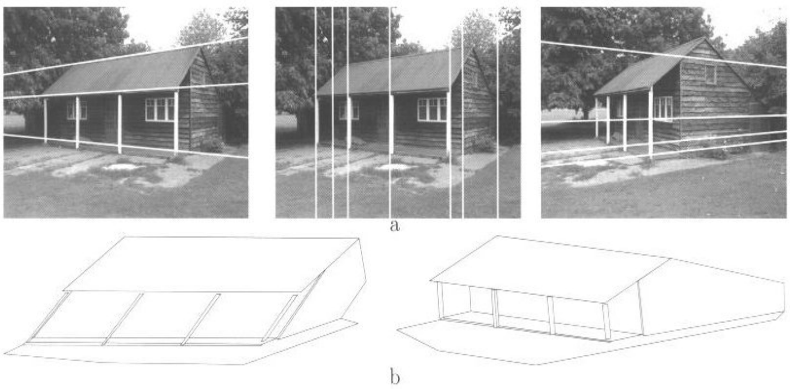
$$\tilde{P} = [I \quad | \ 0], \quad \tilde{P}' = [I \quad | \ e']$$

Reconstrucción Afín

- Cálculo del plano en el infinito:
  - A partir de líneas 3D paralelas:
    - Intersectan en un punto del plano del infinito
    - La rectas proyectadas intersectarán en un punto del plano proyectivo (punto de desvanecimiento) que es proyección del punto en el plano del infinito.
    - Se precisan tres pares de líneas paralelas dos-a-dos -> tres puntos que determina el plano en el infinito.
    - No es preciso detectar el punto de desvanecimiento en las dos imágenes. Conocido *v* en una imagen y una línea *l'* en la otra imagen se puede calcular *v'* a partir de la matriz Fundamental.

$$v' = l' \times Fv \quad \Rightarrow (v_{[\wedge]}P)X = 0, \quad (l'^{T}_{[\wedge]} P')X = 0$$

Reconstrucción Afín

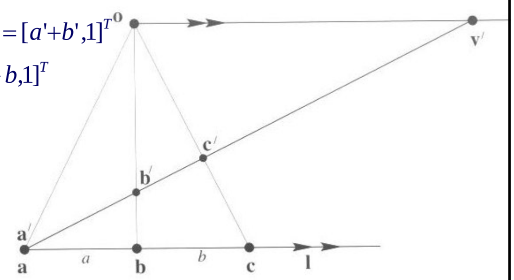


Reconstrucción Afín

- Cálculo del plano en el infinito:
  - A partir de ratios de distancia en tres líneas:
    - Dada una recta 3D y conocido el ratio de distancia entre dos intervalos podemos obtener el punto de intersección con el plano en el infinito.

$$(Imagen) \quad \tilde{a}'=[0,1]^T, \tilde{b}'=[a',1]^T, \tilde{c}'=[a'+b',1]^T$$

$$(3D) \quad \tilde{a}=[0,1]^T, \tilde{b}=[a,1]^T, \tilde{c}=[a+b,1]^T$$



$$\tilde{a}' \cong \tilde{H}_{(2x2)}\tilde{a}, \quad \tilde{b}' \cong \tilde{H}_{(2x2)}\tilde{b},$$

$$\tilde{c}' \cong \tilde{H}_{(2x2)}\tilde{c}$$

$$\tilde{v}' \cong \tilde{H}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

Reconstrucción Afín

- Homografía en el infinito:
  - Podemos obtenerla a partir del plano en el infinito.
  - A partir de la reconstrucción proyectiva de ambas cámaras:

$$\tilde{P}=[P \quad p], \quad \tilde{P}'=[P' \quad p']$$

$$\tilde{m}' = H_\infty \tilde{m} \quad \text{con} \quad H_\infty = P'P^{-1} = A'RA^{-1}$$

  - Entonces se puede transformar en:

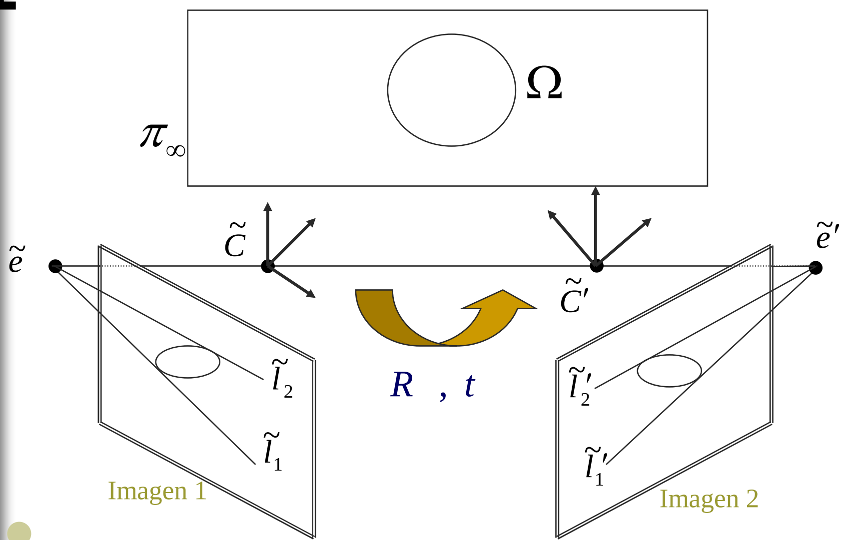
$$\tilde{P}_a = [I \quad 0], \quad \tilde{P}'_a = [P' \quad e'], \quad H_\infty = P'$$

Reconstrucción Euclídea (métrica)

- Supone conocer además la cónica en el infinito (cónica absoluta) Ω_∞
  - Cónica que está en el plano del infinito y es invariante a una transformación Euclídea.
  - Su proyección solo depende los parámetros intrínsecos de la cámara (A)
  - La reconstrucción Euclídea consiste en calcular la transformación proyectiva H_m que transforma la cónica Ω_∞ obtenida en la reconstrucción proyectiva a sus coordenadas Euclídeas:

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 0 = x_4 \quad \Rightarrow \; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} \tilde{x}^T \tilde{x} = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Reconstrucción Euclídea: Cónica absoluta



Reconstrucción Euclídea: Cónica absoluta

- Cónica Absoluta: Ω_∞

$$\tilde{M}_c = \begin{bmatrix} X & Y & Z & 0 \end{bmatrix} \in P^3$$

$$\tilde{M}_c^T \tilde{M}_c = M_c^T M_c = X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$$

- Proyección 1ª imagen:

$$\tilde{m} = \tilde{A}\tilde{M}_c = AM_c \Rightarrow M_c = A^{-1}\tilde{m}$$

$$M_c^T M_c = \tilde{m}^T A^{-T} A^{-1} \tilde{m} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{B = A^{-T} A^{-1}}$$

- Proyección 2ª imagen:

$$\tilde{m}' = \tilde{A}'\tilde{M}_c' = A'RM_c \Rightarrow M_c = R^{-1}A'^{-1}\tilde{m}$$

$$M_c^T M_c = \tilde{m}^T A'^{-T} R^{-T} R^{-1} A'^{-1} \tilde{m} = \tilde{m}^T A'^{-T} A'^{-1} \tilde{m} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{B' = A'^{-T} A'^{-1}}$$

Reconstrucción Euclídea: Cónica absoluta

- La imagen de la cónica absoluta solo depende de los parámetros intrínsecos. Es el elemento de calibración ideal para independizar los parámetros extrínsecos/intrínsecos
- Dual de la imagen de la cónica absoluta

$$K = B^* = AA^T$$

$$\tilde{l}_t^T K \tilde{l}_t = 0 \qquad (K \text{ Matriz de Kruppa})$$

- A partir de ***K*** se pueden obtener de forma analítica los parámetros intrínsecos (***A***)

Reconstrucción Euclídea

- Cálculo de la Homografía H_m
  - 1. Obtener la imagen de la cónica absoluta proyectada en una imagen

$$\tilde{P} = [P \quad p], \quad \tilde{P}' = [P' \quad p'] \qquad \Omega_\infty \rightarrow \omega_\infty$$

  - Calcular H_m a partir de la factorización de Cholesky

$$H_m = \begin{bmatrix} K^{-1} & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}, \quad H^{-1}{}_m = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}, \quad KK^T = \left(P^T \omega_\infty P\right)$$

$$\tilde{P}_M = PH^{-1}{}_m = [P_m \quad p_m] = [P\,K \quad p\ ]$$

$$siendo: \omega^*{}_\infty = P_m P_m{}^T \quad (coordenas \quad euclídeas)$$

Reconstrucción Euclídea

- Cálculo de la proyección de la cónica en el infinito.
  - A partir de la ortogonalidad de la escena
    - Parejas de puntos de desvanecimiento

$$v_1{}^T \omega_\infty v_2 = 0$$

    - Líneas y puntos de desvanecimiento (línea de horizonte y punto de desvanecimiento horizontal.

$$l = \omega_\infty v$$

  - A partir de los parámetros de calibración de las cámaras (A, A')

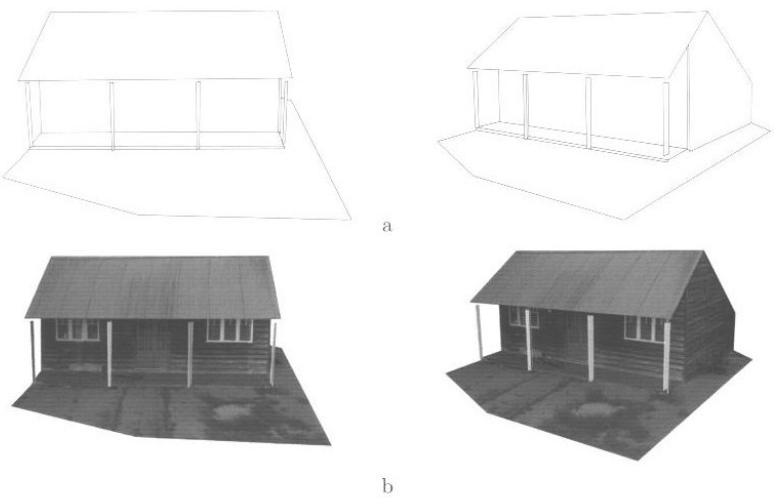
$$\omega_\infty = A^{-T} A^{-1}, \quad \omega_\infty' = A'^{-T} A'^{-1}$$

Reconstrucción Euclídea

- Cálculo de la proyección de la cónica en el infinito.
  - Cámara en movimiento: mismos parámetros intrínsecos por lo que la proyección de la cónica en el infinito va a ser la misma

$$\omega_\infty = \omega_\infty' \Rightarrow \quad \omega_\infty' = H_\infty^{-T} \omega_\infty H_\infty^{-1}$$

Reconstrucción Euclídea



Reconstrucción Euclídea

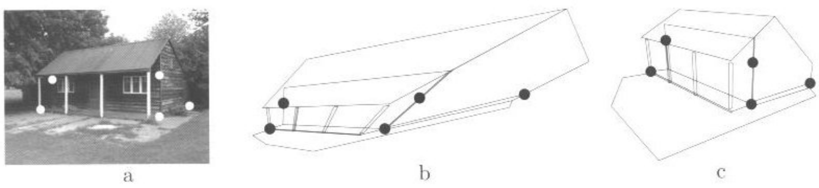
- Reconstrucción Directa: Proyectiva -> Euclídea
  - Si disponemos de al menos 5 puntos de control cuya posición 3D es conocida en el espacio Euclídeo podemos calcular la transformación proyectiva H_m directamente desde cualquier reconstrucción proyectiva

$$\left(\tilde{P}, \tilde{P}', \{\tilde{M}_i\}\right) \qquad \{\tilde{M}_{Ei}\} \qquad \tilde{m}_i \leftrightarrow \tilde{m}'_i$$

$$1) \quad \tilde{M}_{Ei} = H_m \tilde{M}_i$$

$$2) \quad \tilde{m}_{Ei} = \tilde{P} H_m^{-1} \tilde{M}_{Ei}$$
$$\tilde{m}'_{Ei} = \tilde{P}' H_m^{-1} \tilde{M}_{Ei}$$

Reconstrucción Euclídea



Reconstrucción Euclídea a partir de la Homografía del Infinito

- Se parte del conocimiento de la Homografía del plano del Infinito (reconstrucción Afín) H_∞
- Se utiliza la descomposición de Kruppa:

  Se cumple $\tilde{H}_\infty K \tilde{H}_\infty = K'$

  Siendo $K = AA^T$; $K' = A'A'^T$

  la matriz de coeficientes de Kruppa
- Se calculan los parámetros extrínsecos:

$$R = A^{-1}\tilde{H}_\infty A$$

$$t = A^{-1}\tilde{e}'$$

Resumen

Información disponible	Objetos proyectivos	Objetos del espacio 3D	Ambigüedad reconstrucción
Correspondencias de puntos	F		Proyectiva
Correspondencias de puntos + puntos de desvanecimiento	F, H_∞	Π_∞	Afín
Correspondencias de puntos + calibración de las cámaras	F, H_∞ ω, ω'	$\Pi_\infty, \Omega_\infty$	Euclídea (métrica)