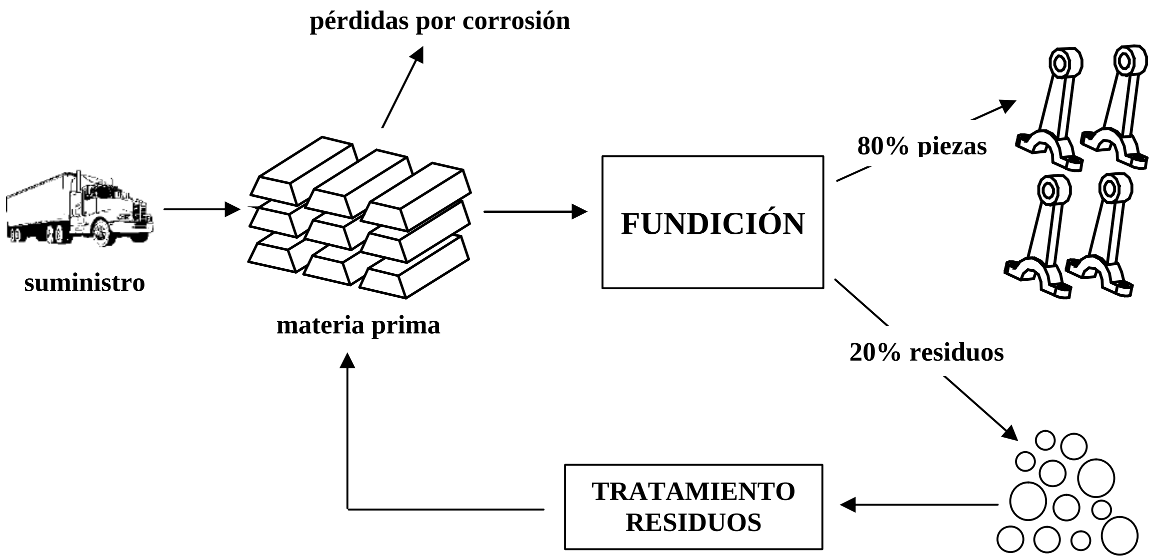
2º INGENIERÍA INDUSTRIAL

TEORÍA DE CIRCUITOS Y SISTEMAS

PRÁCTICA 5 SISTEMAS. ANÁLISIS DE SISTEMAS DISCRETOS

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El sistema a analizar es una fundición. El esquema de funcionamiento de la misma se muestra en la siguiente figura:



Se pueden apreciar las siguientes características:

- El proceso de fundición tiene un rendimiento del 80%
- Los residuos pueden tratarse para reconvertirse en materia prima

Además, se tendrá en cuenta lo siguiente:

- Existe un suministro diario de materia prima (hierro)
- Sólo se producen las piezas pedidas por los clientes.
- Al final de cada día se debe desechar un 25% de la materia prima existente por corrosión.
- Cada día se tratan los residuos producidos el día anterior.

Analizaremos el funcionamiento del sistema día a día, empleando las siguientes variables (secuencias):

- $\mathbf{f_k}$ hierro fundido el día **k** (medido en Kg)
- $\mathbf{p_k}$ piezas fabricadas el día **k** (medido en Kg)
- $\mathbf{t_k}$ residuos tratados el día **k** (producidos el día **k-1**)
- $\mathbf{h_k}$ kg de materia prima (hierro) al final del día **k**
- $\mathbf{s_k}$ suministro de hierro el día **k**

De acuerdo con todo lo anterior, se pueden plantear las ecuaciones en diferencias del sistema:

- $\mathbf{h_k = h_{k-1} - 0.25h_k + s_k - f_k + t_k}$
- $\mathbf{0.8f_k = p_k}$
- $\mathbf{0.2f_{k-1} = t_k}$

2. RESOLUCIÓN

1er paso: obtención de las condiciones de equilibrio

Buscaremos el punto de equilibrio correpondiente a:

- un suministro de 500 kg de hierro al día **(s_0)**
- una fabricación de 300 kg de piezas al día **(p_0)**

En equilibrio, los valores en el instante **k-1** serán iguales a los valores en el instante **k**; por tanto:

$$h_0 = h_0 - 0.25h_0 + s_0 - f_0 + t_0$$

$$0.8f_0 = p_0$$

$$0.2f_0 = t_0$$

Se llega a los siguientes valores:

- **h_0 = 800 kg**
- **f_0 = 375 kg**
- **t_0 = 75 kg**

2do paso: linealización y expresión de las ecuaciones en términos incrementales

Todas las ecuaciones son lineales. Sólo será necesario sustituir cada una de las variables por variables incremento, con lo que queda:

- $Dh_k = Dh_{k-1} - 0.25Dh_k + Ds_k - Df_k + Dt_k$
- $0.8Df_k = Dp_k$
- $0.2Df_{k-1} = Dt_k$

3er paso: transformación al dominio Z

Las ecuaciones en diferencias anteriores se pasarán al dominio Z tomando la transformada Z a ambos lados de la ecuación. Para una secuencia cualquiera, por ejemplo $\{\Delta h_k\}$, se considerará:

$Z(Dh_k) = H(z)$
$Z(Dh_{k-1}) = z^{-1}H(z)$ (el retraso equivale a la multiplicación por z^{-1} en el dominio Z)

De este modo, las ecuaciones quedan:

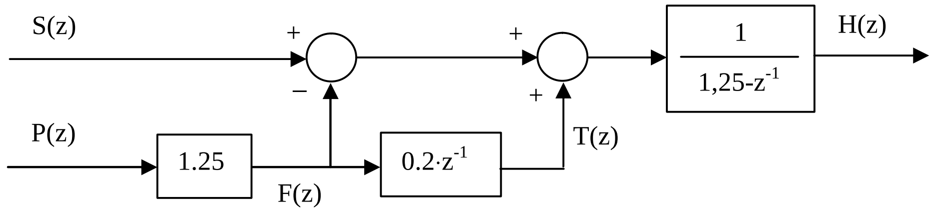
- $H(z)= z^{-1}H(z) - 0.25H(z) + S(z) - F(z) + T(z)$
- $0.8F(z) = P(z)$
- $0.2z^{-1}F(z) = T(z)$

4º paso: diagrama de bloques del sistema

Consideraremos las siguientes entradas y salidas para el sistema:

- **Entradas:** Suministro de material **S(z)**
  Piezas fabricadas (o demanda de piezas) **P(z)**
- **Salida:** materia prima en stock (kg de hierro en lingotes) **H(z)**

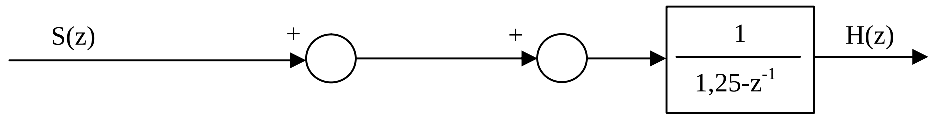
El diagrama de bloques resultante se muestra en la figura siguiente:



5º paso: reducción del diagrama y obtención de funciones de transferencia

Buscaremos en primer lugar la función de transferencia que nos relaciona el stock de hierro con el suministro diario.

La otra variable de entrada (cantidad de piezas fabricada diariamente) se considerará constante y por tanto su valor incremental (con respecto a la posición de equilibrio) será cero. El diagrama queda:



Y por tanto la función de transferencia buscada es:

$$\frac{H(z)}{S(z)} = \frac{1}{1.25 - z^{-1}}$$

6º paso: análisis realizables sobre la función de transferencia

Una vez obtenida la función de transferencia podemos analizar el comportamiento de la secuencia de salida $\{h_k\}$ en función de la secuencia de entrada $\{s_k\}$

Ejemplo 1: Calcular el valor que tomará en régimen permanente el nivel de hierro en stock $\{h_k\}$ si el suministro diario $\{s_k\}$ aumenta en 20kg

Variable de entrada: escalón de 20 unidades: $S(z) = \frac{20}{1 - z^{-1}}$

$$H(z) = \frac{1}{1.25 - z^{-1}} \cdot S(z) = \frac{20}{(1.25 - z^{-1})(1 - z^{-1})}$$

Para obtener el valor en régimen permanente de $\{h_k\}$ aplicaremos el teorema del valor final (se puede comprobar que el resultado es correcto calculando la antitransformada Z):

$$lim_{k\to\infty}(\Delta h_k) = lim_{z\to 1}\left[(1 - z^{-1}) \cdot H(z)\right]$$

En nuestro caso queda:

$$lim_{k\to\infty}(\Delta h_k) = lim_{z\to 1}\left[\frac{20}{1.25 - z^{-1}}\right] = \frac{20}{0.25} = 80kg$$

Dado que la secuencia $\{\Delta h_k\}$ está representada respecto de un punto de equilibrio h_0 = 800kg, la cantidad de hierro en stock será:

h_∞ = 800 + 80 = 880kg

Ejemplo 2: Calcular la secuencia de valores que tomará el nivel de hierro en stock {h_k} durante los 5 primeros días después de que el suministro de hierro se reduzca en 10kg.

Variable de entrada: escalón de -10 unidades:

$$H(z) = \frac{1}{1.25 - z^{-1}} \cdot S(z) = \frac{-10}{(1.25 - z^{-1})(1 - z^{-1})}$$

Para obtener la secuencia de valores que toma {Δh_k} se calculará su antitransformada Z:

$$\Delta h_k = Z^{-1}\left[H(z)\right] = Z^{-1}\left[\frac{-10}{(1.25 - z^{-1})(1 - z^{-1})}\right]$$

Calculando la antitransformada Z por reducción a fracciones simples se obtiene:

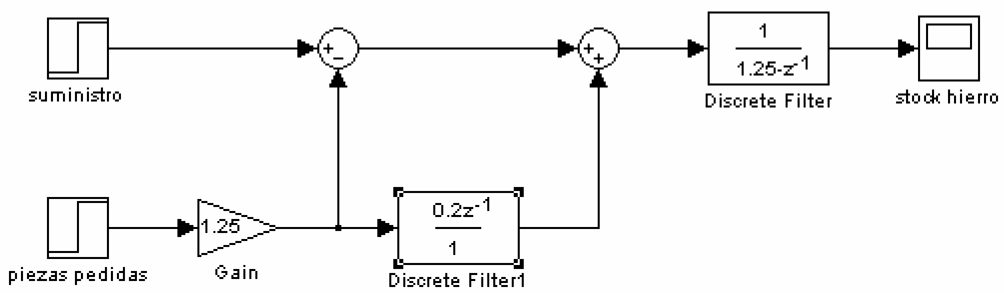
$$\Delta h_k = 32 \cdot 0.8^n - 40$$

Por lo tanto, en los cinco primeros días se obtienen los siguientes valores:

día	D$\mathbf{h_k}$	$\mathbf{h_k}$
0	-8	792 kg
1	-14.4	785.6 kg
2	-19.5	780.5 kg
3	-23.5	776.4 kg
4	-26.9	773.1 kg
5	-29.5	770.5 kg

<u>7º paso: simulación y comprobación de resultados</u>

Para la comprobación de resultados con Simulink realizaremos un esquema como el siguiente:



- Las funciones de transferencia en Z que aparecen se obtendrán con el bloque **'Discrete Filter'** de la categoría **'Discrete'**. Los coeficientes de numerador y denominador se introducen como vectores, al igual que se hizo en la práctica anterior con las funciones de transferencia de sistemas continuos.
- También sería posible expresar estas funciones de transferencia en potencias positivas de z; en este caso utilizaríamos el bloque **'Discrete Transfer Function'**, también de la categoría **'Discrete'**. Los coeficientes de numerador y denominador se introducen igualmente como vectores.
- Las secuencias de entrada **'suministro'** y **'piezas pedidas'** se han representado como escalones, podrían ser cualquier otro tipo de secuencias.

Siempre que se trabaje con bloques discretos existirá un parámetro de **'tiempo de muestreo'** o **'sample time'** que representa el periodo de las secuencias de valores. En nuestro caso dejaremos este valor a uno, representando un periodo de un día entre un valor y el siguiente, <u>en todos los bloques</u>.

Antes de lanzar la simulación, tendremos en cuenta lo siguiente:

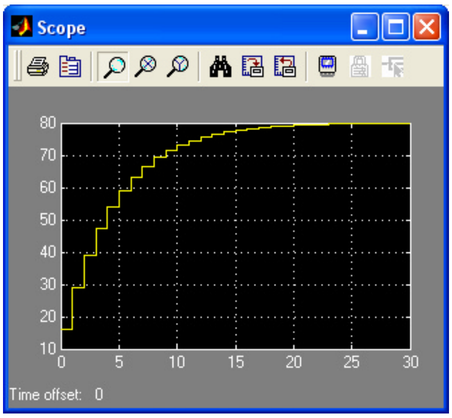
Si queremos ver el efecto de aplicar un escalón a la entrada **'suministro'** mientras la entrada **'piezas pedidas'** se mantiene constante, haremos los siguientes ajustes:

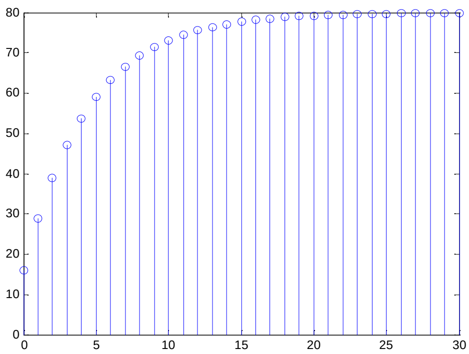
- el valor del escalón para **'suministro'** se fijará adecuadamente
- el valor del escalón para **'piezas pedidas'** se fijará en cero.

Si quisiéramos ver el efecto de aplicar un escalón a la otra entrada, haríamos los ajustes contrarios:

- el valor del escalón para **'piezas pedidas'** se fijará en el valor que se desee
- el valor del escalón para **'suministro'** se fijará en cero.

Como ejemplo, se comprueban los resultados obtenidos teóricamente en los apartados anteriores. En primer lugar, comprobamos el efecto en régimen permanente tras aplicar un escalón de 20 unidades a la entrada **'suministro'**. Tras simular el sistema durante suficiente tiempo se comprueba como el valor final para el incremento de stock es de aproximadamente 80 kg.

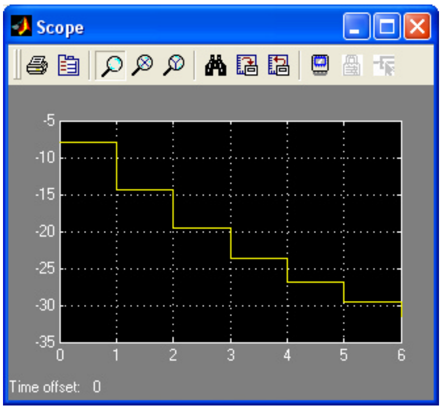


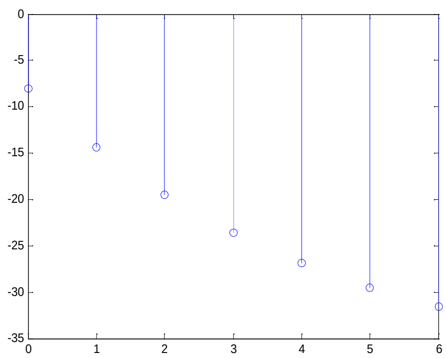


Se han mostrado dos gráficos: el obtenido directamente sobre el elemento **Scope** y el generado con Matlab activando la opción **'save data to workspace'** del bloque **Scope** y utilizando la instrucción **stem** en Matlab. Esta instrucción será la que utilizaremos para representar secuencias en lugar de la instrucción **plot** que se utilizaba para representar señales continuas. Los parámetros de **stem** son exactamente los mismos que los de **plot**. Si a la variable Matlab se le ha dado como nombre **stock** (por ejemplo) la instrucción a ejecutar en este caso será (recuérdese práctica 3):

```
>> stem (stock(:,1), stock(:,2))
```

El otro resultado que se desea comprobar son los cinco primeros valores tras aplicar un escalón de -10 unidades a la entrada **'suministro'.** A continuación se muestran los gráficos obtenidos, donde se puede ver como los resultados coinciden con los obtenidos teóricamente:





EJERCICIO 1

Repetir los pasos 5, 6 y 7 del ejercicio puesto como ejemplo pero utilizando la función de transferencia que relaciona la cantidad de hierro en stock con los pedidos de piezas (o piezas fabricadas).

Se piden dos resultados similares a las anteriores:

- Efecto en régimen permanente si el número de piezas pedidas se incrementa en 40 kilos
- Valores para los cinco primeros términos de la secuencia si el número de piezas pedidas se reduce en 30 kilos.

Resultados a obtener en Matlab:

- Gráficos para los dos resultados utilizando la instrucción **stem** tal y como se muestra en el ejemplo y la instrucción **title** para poner el nombre del alumno como título del gráfico.
- Comprobación de que los resultados teóricos coinciden con los obtenidos en simulación.

EJERCICIO 2

Con la intención de mantener constante la cantidad de hierro en stock, se decide automatizar los suministros de hierro: en lugar de tener cada día un suministro constante, se pide al suministrador tanto hierro como reducción ha habido en el stock el día anterior.

Esto puede representarse por la siguiente ecuación en diferencias:

$$\mathbf{S_k = 500 + f_{k-1} - t_{k-1}}$$

Donde 500 representa el nivel de kg. de hierro por debajo del cual nunca podría estar el stock. En la práctica se verá como aplicando esta automatización el nivel de hierro en equilibrio es mucho mayor.

Se deben recalcular los pasos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7, añadiendo esta nueva ecuación, para obtener la función de transferencia que relaciona el nivel de hierro en stock con los pedidos de piezas y simular el comportamiento del sistema. Es necesario tener en cuenta que una vez que el suministro se ha automatizado, sólo existe una variable de entrada que son las piezas pedidas cada día (el suministro deja de ser una entrada). Se buscará el equilibrio para unos pedidos de 300 kg. de piezas al día.

Se pide calcular el efecto sobre el stock de las mismas acciones que las consideradas en el apartado anterior:

- Valor en régimen permanente del stock si se produce un incremento de 40 kg. en la cantidad de piezas pedidas cada día.
- Cinco primeros valores de los términos de la secuencia del stock si se reduce en 30 kg. el número de piezas pedidas.

Resultados a obtener en Matlab:

- Esquema Simulink para el sistema una vez que se han automatizado los suministros diarios de hierro.
- Gráficos para los dos resultados utilizando la instrucción **stem** tal y como se muestra en el ejemplo y la instrucción **title** para poner el nombre del alumno como título del gráfico.
- Comprobación de que los datos obtenidos teóricamente coinciden con los devueltos por Simulink.