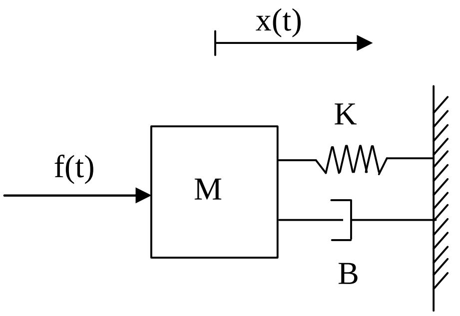
2º INGENIERÍA INDUSTRIAL

TEORÍA DE CIRCUITOS Y SISTEMAS

PRÁCTICA 4 SISTEMAS. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

1. REPRESENTACIÓN DE UN SISTEMA MEDIANTE SU FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Recordemos el sistema físico analizado en la práctica 2. Se trata de una masa **M** unida a un muelle de constante **K**, y con un rozamiento viscoso **B**, tal y como se describe en la figura:



El objetivo será ver cómo afecta la fuerza aplicada **f(t)** al movimiento de la masa, descrito por **x(t)**

La ecuación diferencial que rige el comportamiento de este sistema es:

$$f(t) = M \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2} + B \cdot \frac{dx(t)}{dt} + K \cdot x(t)$$

Para obtener la representación del sistema mediante su función de transferencia, daremos los siguientes pasos:

1. Planteamiento de la ecuación diferencial

En este caso, la ecución diferencial es un dato del problema

2. Obtención de un punto de equilibrio

Dado que trabajaremos con variables incrementales (valor inicial = 0) será necesario determinar el punto de equilibrio sobre el que se va a trabajar.

En este caso se buscará el punto de equilibrio para una fuerza inicial:

`f(0) = 10`

En el punto de equilibrio las derivadas serán cero, por tanto:

`f(0) = M×0 + B×0 + K×x(0)`   **`x(0) = 10/K`**

3. Linealización de las ecuaciones y expresión en variables incrementales

En este caso todos los terminos de la ecuación son lineales; por tanto sólo hay que expresar la ecuación en variables incrementales:

$$\Delta f(t) = M \cdot \Delta \ddot{x}(t) + B \cdot \Delta \dot{x}(t) + K \cdot \Delta x(t)$$

4. Paso de las ecuaciones al dominio de Laplace

Una vez las ecuaciones expresadas en términos incrementales, el paso al dominio de Laplace es inmediato:

$$L(x(t)) = X(s)$$

$$L(\dot{x}(t)) = s \cdot X(s) \quad (\textit{propiedad de derivación en dominio } t)$$

En el caso que nos ocupa, la ecuación queda:

$$F(s) = M \cdot s^2 \cdot X(s) + B \cdot s \cdot X(s) + K \cdot X(s)$$

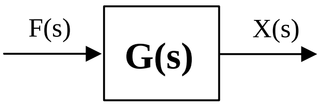
5. Función de transferencia

Una vez las ecuaciones en el dominio de Laplace, es posible obtener la función de transferencia **G(s)** o función que permite obtener la salida **X(s)** a partir de la entrada **F(s)**:

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{M \cdot s^2 + B \cdot s + K}$$

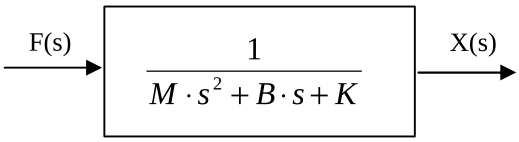
6. Diagrama de bloques

Cada función de transferencia se representa en un diagrama de bloques como el operador que multiplicado por la entrada nos ofrece la salida:



$$X(s) = G(s) \cdot F(s)$$

En nuestro caso:

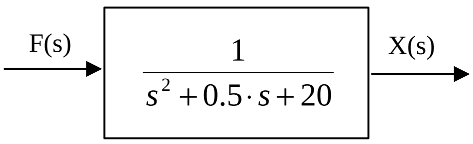


7. Simulación

Para representar una función de transferencia en Simulink se debe usar el bloque **'Transfer Fcn'** de la categoría **'Continuous'**. Este bloque permite introducir funciones de transferencia como cociente de dos polinomios. Cada polinomio se especifica por sus coeficientes en orden decreciente de potencias.

En nuestro caso, si:

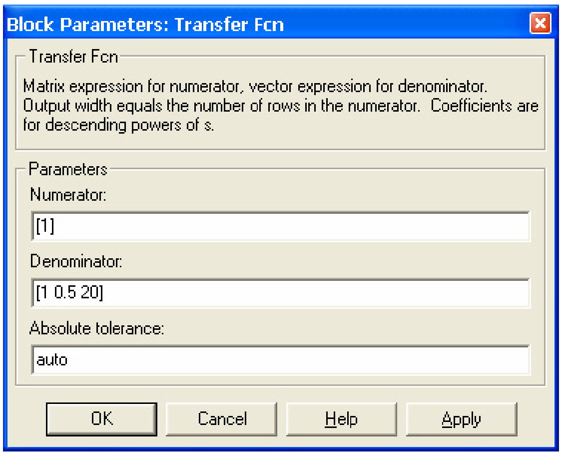
- M = 1
- B = 0.5
- K =20



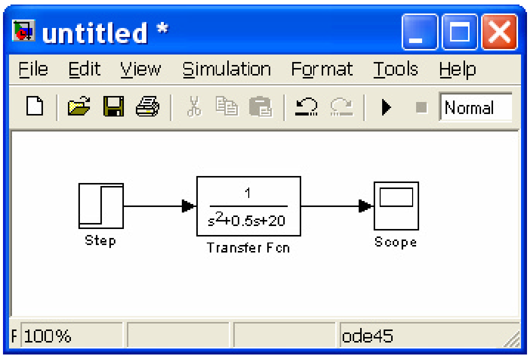
Tendremos como coeficientes del numerador: **[1]**

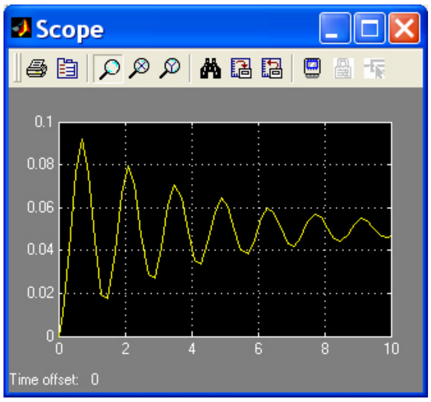
Y como coeficientes del denominador: **[1 0.5 20]**

Estos parámetros se introducirán como configuración del bloque **’Transfer Fcn’** tal y como muestra la figura inferior. El parámetro **‘Absolute tolerance’** hace referencia al máximo error permitido en la simulación y no se modificará.



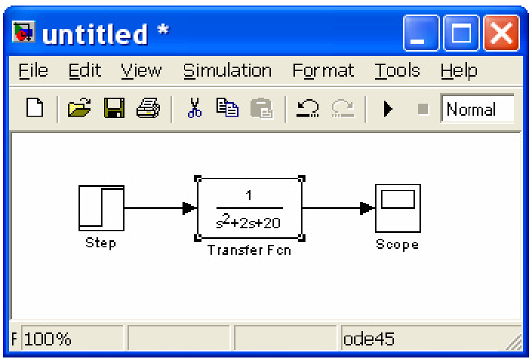
Para simular, conectaremos una señal de entrada cualquiera (escalón, senoidal, etc.) a la entrada del bloque y un osciloscopio a la salida:

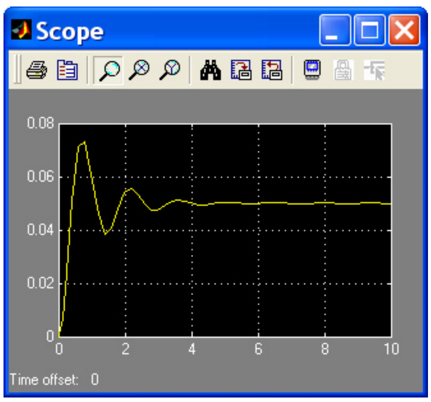


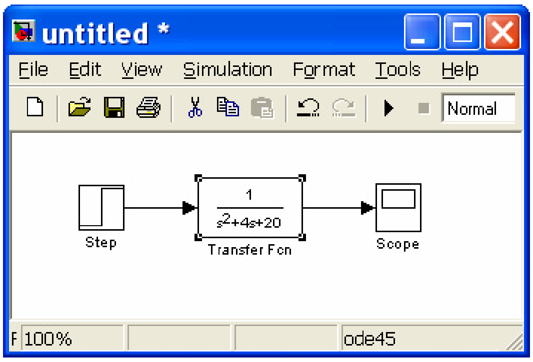


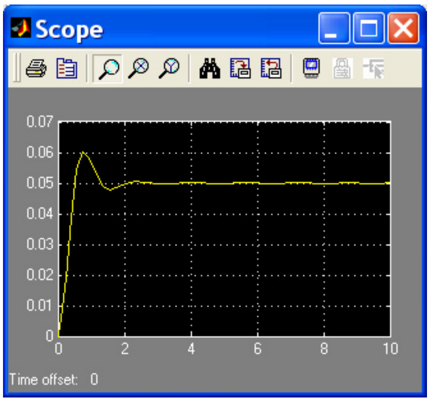
A continuación podríamos probar el efecto que produce la variación de los distintos parámetros del sistema (M, B y K) sobre el comportamiento del mismo con sólo cambiar los valores de la función de transferencia.

Podemos ver, por ejemplo, como al aumentar el parámetro B (rozamiento) el movimiento del muelle es más amortiguado (se producen menos oscilaciones):









NOTA IMPORTANTE: Las variables con las que estamos trabajando son **incrementales:**

- <u>Fuerza o variable de entrada:</u> valor en el punto de equilibrio = 10N

  Aplicar un escalón de valor 1 equivale a ejercer una fuerza de 11N

  $f(0) = 10N$

  $\Delta f(t) = 1N$

  $f(t) = f(0) + \Delta f(t) = 11N$

- <u>Posición o variable de salida:</u> valor en el punto de equilibrio = 10/K = 0.5m

  Una posición que en el gráfico aparece como 0.08 equivale a una posición real de 0.58m

  $x(0) = 0.5m$

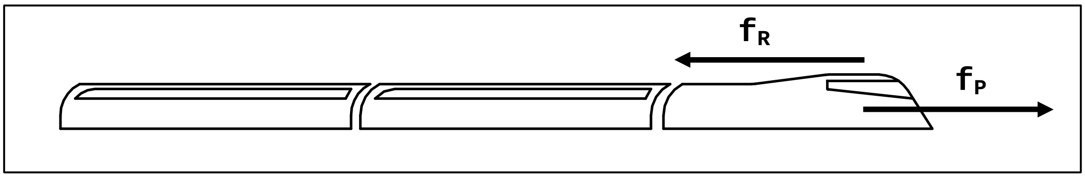
  $\Delta x(t) = 0.08m$

  $x(t) = x(0) + \Delta x(t) = 0.58m$

EJERCICIO 1: TREN-BALA

Se desea estudiar el comportamiento de un tren-bala a altas velocidades. Se supondrá que existen dos fuerzas antagónicas:

- **f_P:** fuerza de propulsión producida por el motor
- **f_R:** fuerza de resistencia aerodinámica que se opone al avance



Las ecuaciones de comportamiento del sistema son las siguientes:

$$f_R(t) = K_R \cdot v^2(t)$$
$$f_P(t) = K_P \cdot z(t)$$
$$M \cdot \frac{dv(t)}{dt} = f_P(t) - f_R(t)$$

v(t) = velocidad del tren (m/s)
z(t) = posición de la palanca de mando del motor (mm)
K_R = constante de resistencia aerodinámica = 4 N·s^2/m^2
K_P = constante del propulsor = 1000 N/mm
M = masa tren = 5000 kg

Se pide:

- Operar como en el ejercicio anterior (muelle) hasta llegar a la función de transferencia que relaciona la velocidad del tren con la posición de la palanca de mando del motor. Se analizará el problema sobre la posición de equilibrio correspondiente a una posición de la palanca de mando = 40 mm.

  Dado que en este caso no partimos de una única ecuación sino de varias ecuaciones y por tanto de varios bloques, caben dos posibilidades: representar el diagrama de bloques en Simulink o reducir el mismo hasta obtener un único bloque y representar sólo este bloque en Simulink. En cualquier caso, la variable Z(s) será la entrada y la variable V(s) la salida:

$$Z(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow V(s)$$

- Utilizar como entrada un escalón de 2 unidades (cambio brusco de 2 mm. en la palanca de mando) y comprobar cuál es el efecto en la velocidad del tren. Se deberan obtener los siguientes valores, tanto teóricamente como a partir de las medidas tomadas sobre el gráfico:
  - ✓ Velocidad final alcanzada por el tren.
  - ✓ Tiempo que tarda el tren en alcanzar la mitad del incremento de velocidad total.
- Repetir los cálculos anteriores para un escalón de 50 unidades. Comprobar que el sistema es lineal (utilizar los valores finales y algún valor intermedio).
- Repetir los calculos del primer apartado (escalón de 2 unidades) obteniendo la función de transferencia resultante para cada uno de estos grupos de valores:
  - ✓ M = 10000, K_R = 4, K_P=1000
  - ✓ M = 5000, K_R = 16, K_P=1000
  - ✓ ¿En qué aspectos coinciden y en qué aspectos difieren estos sistemas con respecto al primero?

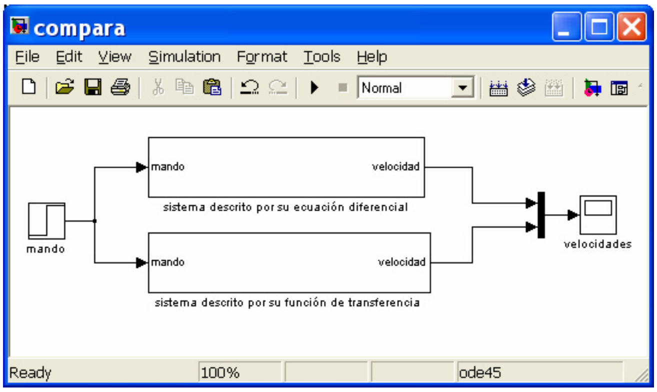
<u>Resultados a obtener con Matlab en cada uno de los casos:</u>

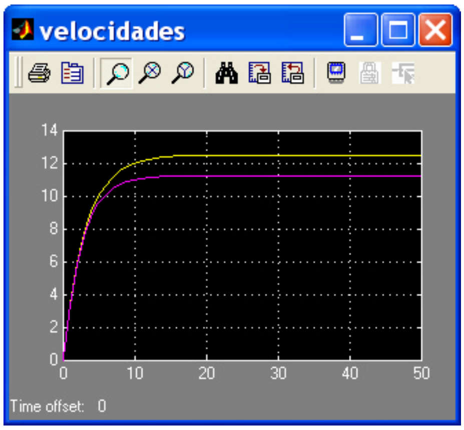
- Gráficos de la velocidad alcanzada por el tren para cada apartado. Los gráficos se obtendrán con la instrucción **plot** tras haber sido llevados a una variable **Matlab** desde el bloque **Scope**.
- Ccomprobación de que los resultados teóricos obtenidos para cada apartado coinciden con los de Simulink.

EJERCICIO 2 (opcional): ERRORES COMETIDOS CON LA LINEALIZACIÓN

Sobre el mismo ejemplo del ejercicio anterior (tren bala) se desea conocer cuál es el error cometido en el proceso de linealización. Para ello se hará lo siguiente:

- Conservar el esquema Simulink del último apartado (M = 5000, K_R = 16, K_P = 1000).
- En la misma ventana, crear un esquema Simulink que represente el comportamiento del mismo sistema sin linealizar. En este caso no se puede hacer uso del bloque función de transferencia, y deberá representarse directamente la ecuación diferencial (como en la primera práctica de Simulink).
- Aplicar la misma entrada escalón (amplitud 20) a los dos sistemas y representar las dos salidas en un mismo osciloscopio; el resultado debe ser similar al que se muestra:





- Comprobar las diferencias de comportamiento obtenidas para distintos valores del escalón de entrada. ¿Por qué los errores son mayores cuanto mayor es el valor del escalón?

AYUDA:

- La función 'elevar al cuadrado' se obtiene con el bloque **'Math function'** perteneciente a la categoría **'Math Operations'**.
- Para comparar valores correctamente, se deben utilizar unas ecuaciones diferenciales modificadas que trabajen con incrementos. Se recomienda desarrollar estas ecuaciones a partir de las siguientes:

$$(f_R(0) + \Delta f_R(t)) = K_R \cdot (v(0) + \Delta v(t))^2$$
$$(f_P(0) + \Delta f_P(t)) = K_P \cdot (z(0) + \Delta z(t))$$
$$M \cdot \frac{dv(t)}{dt} = \Delta f_P(t) - \Delta f_R(t)$$

Sustituyendo los valores iniciales de cada variable por los calculados en el problema, deben cancelarse los términos independientes.