EXAMEN TEORÍA DE SISTEMAS 8-9-2004

SOLUCIONES

pregunta	respuesta
1.1	b
1.2	c
1.3	b
1.4	a
2.1	d
2.2	c
2.3	a
2.4	b
2.5	c
3.1	d
3.2	a
3.3	c
3.4	c
3.5	a
4.1	d
4.2	c
4.3	a
4.4	d
4.5	b
4.6	a

PROBLEMA 1 ***(2 puntos)***

Un sistema desconocido responde a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3}+2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+3\frac{dx(t)}{dt}\cdot y(t)+2y(t)-10\frac{dx(t)}{dt}-x^2(t)-2=0$$

Se trabajará en torno al punto de funcionamiento definido por **x(0)=2**; y se considerará que **x(t)** es la entrada del sistema e **y(t)** la salida. Se pide:

1.1. Indicar los valores de x e y en el punto de funcionamiento:

En el punto de funcionamiento las derivadas son igual a cero:

$$\left.\begin{array}{l} 2y(0)-x^2(0)-2=0 \\ x(0)=2 \end{array}\right\} \quad y(0)=3$$

1.2. Linealizar la ecuación y expresarla en variables incrementales:

$$\Delta \dddot{y}(t)+2\Delta \ddot{y}(t)+5\Delta \dot{y}(t)+\left[3\dot{x}(0)\right]\Delta y(t)+\left[3y(0)\right]\Delta \dot{x}(t)+$$

$$+2\Delta y(t)-10\Delta \dot{x}(t)-\left[2x(0)\right]\Delta x(t)=0$$

$$\Delta \dddot{y}(t)+2\Delta \ddot{y}(t)+5\Delta \dot{y}(t)+2\Delta y(t)-\Delta \dot{x}(t)-4\Delta x(t)=0$$

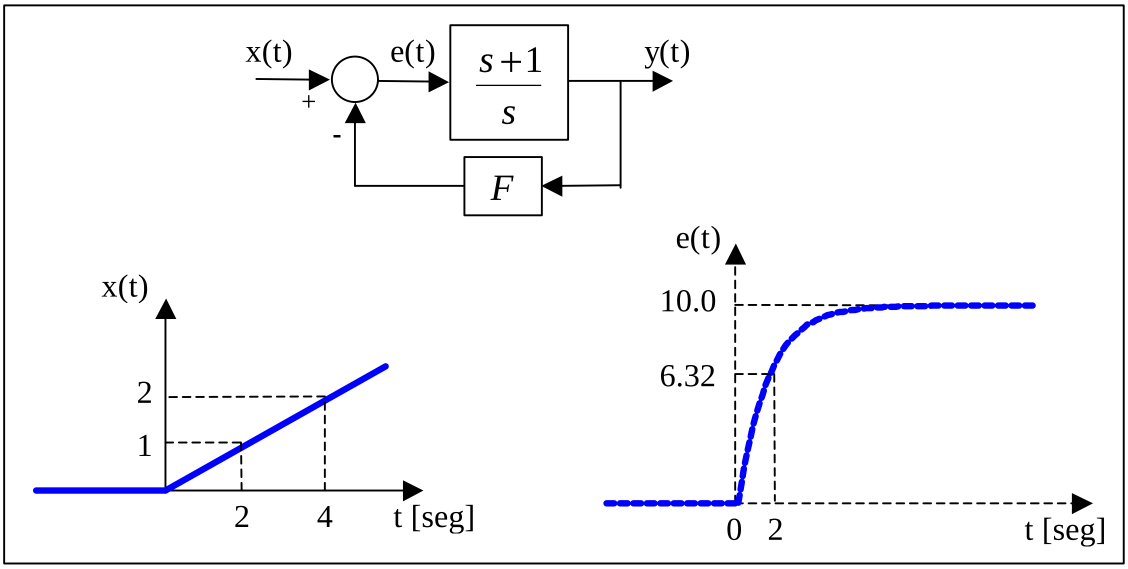
1.3. Expresar la ecuación en el dominio de Laplace:

$$s^3Y(s)+2s^2Y(s)+5sY(s)+2Y(s)-sX(s)-4X(s)=0$$

1.4. Obtener la función de transferencia del sistema:

$$F(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{s+4}{s^3+2s^2+5s+2}$$

PROBLEMA 2 ***(2.5 puntos)***



En el sistema de la figura anterior se conocen las señales x(t) y e(t). Se pide:

2.1. Expresar la señal x(t) en el dominio de Laplace:

Se trata de una rampa de pendiente 0.5:

$$X(s) = \frac{0.5}{s^2}$$

2.2. Expresar la señal e(t) en el dominio de Laplace:

Por su aspecto, la señal e(t) parece la respuesta de un sistema de primer orden ante entrada escalón, por tanto:

$$E(s) = \frac{K}{1+Ts} \cdot \frac{1}{s}$$

Donde K es la ganancia o valor final y T es la constante de tiempo, o el tiempo que tarda la señal en alcanzar el 63.2% del valor final:

$$E(s) = \frac{10}{1+2s} \cdot \frac{1}{s}$$

2.3. Expresar la señal y(t) en el dominio de Laplace

De acuerdo con el diagrama de bloques mostrado, se cumple:

$$Y(s) = \frac{s+1}{s} \cdot E(s) = \frac{10(s+1)}{(1+2s)s^2}$$

2.4. Expresar la función de transferencia F(s) en el dominio de Laplace:

De acuerdo con el diagrama de bloques mostrado, se cumple:

$$E(s) = X(s) - F(s) \cdot Y(s)$$

despejando F(s):

$$F(s)=\frac{X(s)-E(s)}{Y(s)}=\frac{0.5-9s}{10s+10}$$

2.5. F(s) es un sistema…

Es un sistema de primer orden (un único polo en s=-1) y con un cero no en el origen (un cero en s=0.5/9.

PROBLEMA 3 ***(2.5 puntos)***

Un sistema desconocido responde a la siguiente ecuación en diferencias:

$$y_k+5y_{k-1}+6y_{k-2}=6x_k+6x_{k-1}+36$$

Si se trabaja sobre el punto de funcionamiento definido por $\mathbf{x_0=100}$; y se considera $\mathbf{\{x_k\}}$ como la entrada e $\mathbf{\{y_k\}}$ como la salida, se pide:

3.1. Indicar los valores de x e y en el punto de funcionamiento:

En el punto de equilibrio las señales no varían de instante a instante:

$$\left.\begin{array}{l} y_0+5y_0+6y_0=6x_0+6x_0+36 \\ x_0=100 \end{array}\right\} y_0=103$$

3.2. Transformar la ecuación en diferencias al dominio Z:

El primer paso es la linealización y expresión en variables incrementales; este paso es inmediato ya que todos los términos son lineales:

$$\Delta y_k+5\Delta y_{k-1}+6\Delta y_{k-2}=6\Delta x_k+6\Delta x_{k-1}$$

La ecuación linealizada se transforma al dominio Z sustituyendo los retrasos con productos por z^{-1}:

$$Y(z)+5z^{-1}Y(z)+6z^{-2}Y(z)=6X(z)+6z^{-1}X(z)$$

3.3. Obtener la función de transferencia:

$$F(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{6+6z^{-1}}{1+5z^{-1}+6z^{-2}}$$

3.4. Si se aplica como señal de entrada $\{x_k\}=\{1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots\}$, calcular el valor de la salida en el instante t=1 segundo (suponer periodo 1 segundo):

3.5. Idem en el instante t=2 segundos (también suponer periodo 1 segundo):

La salida será igual a la entrada multiplicada por la función de transferencia:

$$\left.\begin{array}{l} Y(z) = X(z)\cdot F(z) \\ X(z) = Z^{-1}\left[\{x_k\}\right] = 1 + z^{-1} \end{array}\right\} Y(z) = \frac{6+12z^{-1}+6z^{-2}}{1+5z^{-1}+6z^{-2}}$$

Para obtener los valores en los instantes pedidos se utiliza la división larga, resultando:

$$Y(z) = 6 - 18z^{-1} + 60z^{-2} - 192z^{-3} + \dots$$

A partir del resultado de la división larga se obtienen los términos de $\{\Delta y_k\}$:

$$\{\Delta y_k\} = \{6, -18, 60, -192, \dots\}$$

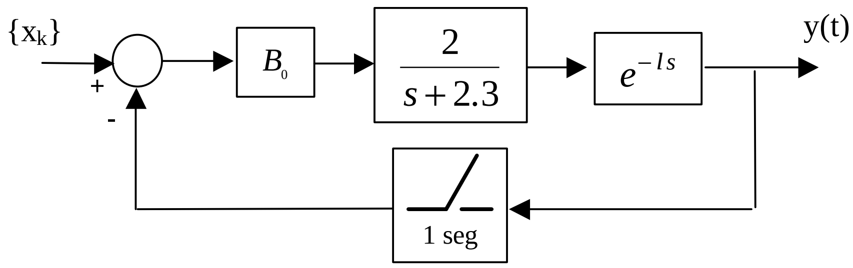
Para obtener el valor de la salida, se debe sumar el valor inicial a los términos incrementales anteriores, resultando:

$$\{y_k\} = y_0 + \{\Delta y_k\} = \{109, 85, 163, -89, \dots\}$$

Los valores pedidos corresponden a y_1 e y_2:

$$y(1) = y_1 = 85; \quad y(2) = y_2 = 163$$

<u>PROBLEMA 4 *(3 puntos)*</u>

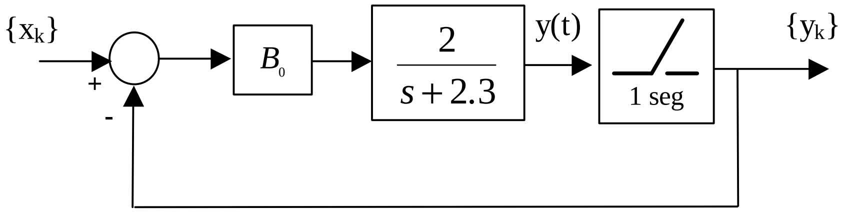


En el sistema de la figura anterior, la entrada $\{x_K\}$ es una secuencia de periodo 1 segundo y valores $\{x_K\} = \{1\ \ 2\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \dots\}$. Se pide:

<u>4.1. Si $l = 0$, calcular el valor de la salida y(t) en el instante t = 1 segundo:</u>

<u>4.2. Si $l = 0$, calcular el valor de la salida y(t) en el instante t = 2 segundos.</u>

En estos dos casos el retraso es de cero segundos, por lo tanto no existe retraso. El diagrama de bloques se puede redibujar de la forma mostrada en la figura siguiente, donde los valores de la salida se obtendrán sobre la secuencia $\{y_k\}$:



En primer lugar, se calcula el equivalente discreto para los tres elementos presentes: bloqueador, bloque continuo y muestreador:

$$BF(z) = (1 - z^{-1}) \cdot \sum_{polos} residuos\left(\frac{F(p)}{p} \cdot \frac{1}{1 - e^{pT} \cdot z^{-1}} \right) =$$

$$= (1 - z^{-1}) \cdot \sum_{polos} residuos\left(\frac{2}{p(p+2.3)} \cdot \frac{1}{1 - e^{p} \cdot z^{-1}} \right)$$

Operando, se llega a: $BF(z) = \dfrac{0.78z^{-1}}{1 - 0.1z^{-1}}$

A continuación se resuelve la realimentación, obteniéndose la f. de transferencia final:

$$M(z) = \frac{BF(z)}{1 + BF(z)} = \frac{0.78z^{-1}}{1 + 0.68z^{-1}}$$

La salida se calcula como la entrada multiplicada por la función de transferencia:

$$\left. \begin{array}{l} Y(z) = X(z) \cdot F(z) \\ X(z) = Z^{-1}\left[\{x_k\}\right] = 2 + z^{-1} \end{array} \right\} Y(z) = \frac{0.78z^{-1} + 1.56z^{-2}}{1 + 0.68z^{-1}}$$

Los valores de $\{y_k\}$ se obtienen haciendo la antitransformada de Y(z) por el método de la división larga, resultando:

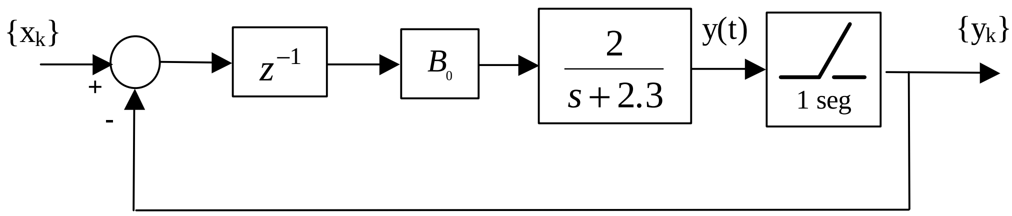
$$\{y_k\} = \{0 \quad 0.78 \quad 1.03 \quad \ldots\}$$

Los valores pedidos son, por tanto:

$$y(1) = y_1 = 0.78; \quad y(2) = y_2 = 1.03$$

<u>4.3. Si $l = 1$, calcular el valor de la salida y(t) en el instante t = 2 segundos.</u>
<u>4.4. Si $l = 1$, calcular el valor de la salida y(t) en el instante t = 3 segundos.</u>

El siguiente caso corresponde a un retraso de un segundo. Dado que se trata de un retraso de un periodo completo, puede ser desplazado y representado como z^{-1} en el diagrama de bloques, resultando:



La función de transferencia global resulta, en este caso:

$$M(z) = \frac{z^{-1} \cdot BF(z)}{1 + z^{-1}BF(z)} = \frac{0.78z^{-2}}{1 - 0.1z^{-1} + 0.78z^{-2}}$$

Y la salida se obtiene del mismo modo que anteriormente:

$$\left.\begin{array}{l} Y(z) = X(z) \cdot F(z) \\ X(z) = Z^{-1}[\{x_k\}] = 2 + z^{-1} \end{array}\right\} Y(z) = \frac{0.78z^{-2} + 1.56z^{-3}}{1 - 0.1z^{-1} + 0.68z^{-2}}$$

Los valores de $\{y_k\}$ se obtienen haciendo la antitransformada de Y(z) por el método de la división larga, resultando:

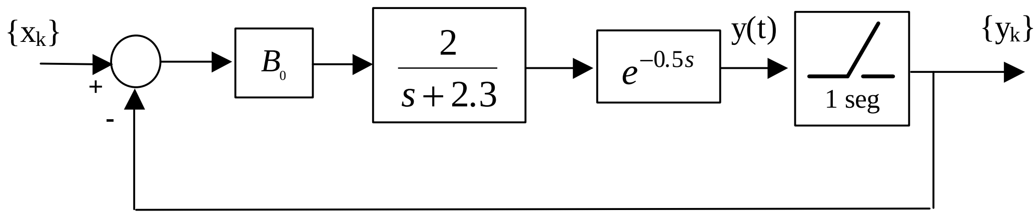
$$\{y_k\} = \{0 \quad 0 \quad 0.78 \quad 1.64 \quad ...\}$$

Los valores pedidos son, por tanto:

$$y(2) = y_2 = 0.78; \quad y(3) = y_3 = 1.64$$

<u>4.5. Si $l = 0.5$, calcular el valor de la salida y(t) en el instante t = 1 segundo.</u>
<u>4.6. Si $l = 0.5$, calcular el valor de la salida y(t) en el instante t = 2 segundos.</u>

En este caso el retraso es de 0.5 segundos, con lo cual será necesario utilizar la función de transferencia en Z modificada. El diagrama queda de la forma siguiente:



Para calcular el sistema discreto equivalente es necesario en primer lugar expresar el retraso en términos de la variable m:

$$l = (1-m)T \quad \Rightarrow \quad m = 0.5$$

A continuación se calcula el sistema discreto equivalente:

$$BF(z,m) = z^{-1} \cdot (1 - z^{-1}) \cdot \sum_{polos} residuos\left(\frac{F(p)}{p} \cdot e^{mTp} \cdot \frac{1}{1 - e^{pT} \cdot z^{-1}} \right) =$$

$$= z^{-1} \cdot (1 - z^{-1}) \cdot \sum_{polos} residuos\left(\frac{2}{p(p+2.3)} \cdot e^{0.5p} \frac{1}{1 - e^{p} \cdot z^{-1}} \right)$$

Operando, se llega a: $BF(z,0.5) = \dfrac{0.59z^{-1} + 0.19z^{-2}}{1 - 0.1z^{-1}}$

A continuación se resuelve la realimentación, obteniéndose la f. de transferencia final:

$$M(z,0.5) = \frac{BF(z,0.5)}{1 + BF(z,0.5)} = \frac{0.59z^{-1} + 0.19z^{-2}}{1 + 0.49z^{-1} + 0.19z^{-2}}$$

La salida se calcula como la entrada multiplicada por la función de transferencia:

$$\left.\begin{array}{l} Y(z) = X(z) \cdot F(z) \\ X(z) = Z^{-1}[\{x_k\}] = 2 + z^{-1} \end{array}\right\} Y(z) = \frac{0.59z^{-1} + 1.37z^{-2} + 0.38z^{-3}}{1 + 0.49z^{-1} + 0.19z^{-2}}$$

Los valores de $\{y_k\}$ se obtienen haciendo la antitransformada de Y(z) por el método de la división larga, resultando:

$$\{y_k\} = \{0 \quad 0.59 \quad 1.08 \quad ...\}$$

Los valores pedidos son, por tanto:

$$y(1) = y_1 = 0.59; \quad y(2) = y_2 = 1.08$$