2º Ingeniería Industrial

Teoría de circuitos y sistemas

EXAMEN TEORÍA DE SISTEMAS 8-9-2003

PROBLEMA 1

En el sistema definido por las ecuaciones diferenciales que se indican a continuación, la señal **x(t)** representa la entrada y la señal **y(t)** representa la salida:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3}+a\cdot\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{dy(t)}{dt}\cdot y^2(t)+2\cdot\frac{dy(t)}{dt}+20\cdot y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+3x(t)$$

- Se pide discutir la estabilidad del sistema en función del parámetro a.

Dato: el punto de funcionamiento del sistema queda definido por $\mathbf{x(0)=20}$

VALORACIÓN: 2.5 puntos

SOLUCIÓN

En primer lugar, se linealiza la ecuación y se expresa en variables incrementales:

$$\Delta\dddot{y}(t)+a\cdot\Delta\ddot{y}(t)+\frac{\partial}{\partial y(t)}\left[\dot{y}(t)\cdot y^2(t)\right]_0\cdot\Delta y(t)+\frac{\partial}{\partial\dot{y}(t)}\left[\dot{y}(t)\cdot y^2(t)\right]_0\cdot\Delta\dot{y}(t)+$$
$$+2\cdot\Delta\dot{y}(t)+20\cdot\Delta y(t)=\Delta\dot{x}(t)+3\cdot\Delta x(t)$$

El resultado al que se llega es:

$$\Delta\dddot{y}(t)+a\cdot\Delta\ddot{y}(t)+11\cdot\Delta\dot{y}(t)+20\cdot\Delta y(t)=\Delta\dot{x}(t)+3\cdot\Delta x(t)$$

A continuación se hace la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación y se despeja la función de transferencia:

$$s^3\cdot Y(s)+a\cdot s^2\cdot Y(s)+11\cdot s\cdot Y(s)+20\cdot Y(s)=s\cdot X(s)+3\cdot X(s)$$
$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{s+3}{s^3+as^2+11s+20}$$

Una vez conocida la función de transferencia, se estudia la estabilidad del sistema mediante el criterio de Routh:

- 1ª condición estabilidad: a > 0 (coeficientes del denominador del mismo signo).

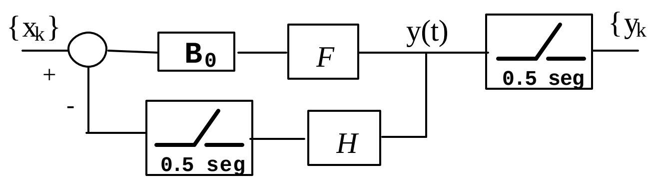
- 2ª condición estabilidad: ningún cambio de signo en la tabla de Routh.

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 11 \\ s^2 & a & 20 \\ s^1 & \dfrac{11a-20}{a} & 0 \\ s^0 & 20 & \end{array}$$

Se obtiene como condición final de estabilidad **a > 20/11**

PROBLEMA 2

En el sistema de la figura, **{xk}** es una secuencia de periodo 0.5 segundos y se conocen las funciones de transferencia de los bloques **F** y **H**:



$$F(s) = \frac{1}{s+2} \qquad H(s) = 3$$

Se pide:

- Obtener la función de transferencia **M(z)** que relaciona la entrada **$\{x_k\}$** xon la salida **$\{y_k\}$.**
- Si **$\{x_k\}$** = {1 1 0 0 0 …} obtener **y(t)** en los instantes **t = 1 seg** y **t = 1.5 seg**

VALORACIÓN: 3 puntos

SOLUCIÓN

La función de transferencia en Z que relaciona la entrada **$\{x_k\}$** con la salida **$\{y_k\}$** es:

$$M(z) = \frac{BF(z)}{1 + BFH(z)}$$

BF(z) es el equivalente discreto del sistema F, con un bloqueador de orden cero:

$$BF(z) = \left(1 - z^{-1}\right) \cdot \sum_{polos} res\left[\frac{1}{p \cdot (p+2)} \cdot \frac{1}{1 - e^{pT} \cdot z^{-1}}\right] = \frac{0.316 z^{-1}}{1 - 0.368 z^{-1}}$$

BFH(z) es el equivalente discreto del sistema F en serie con el sistema H, con un bloqueador de orden cero:

$$BFH(z) = \left(1 - z^{-1}\right) \cdot \sum_{polos} res\left[\frac{3}{p \cdot (p+2)} \cdot \frac{1}{1 - e^{pT} \cdot z^{-1}}\right] = \frac{0.948 z^{-1}}{1 - 0.368 z^{-1}}$$

Se obtiene como función de transferencia:

$$M(z) = \frac{0.316 z^{-1}}{1 + 0.58 z^{-1}}$$

A continuación se calcula la salida **$\{y_k\}$** ante la entrada **$\{x_k\}$** indicada:

$$X(z) = Z^{-1}\left[\{x_k\}\right] = 1 + z^{-1}$$

$$Y(z) = X(z) \cdot M(z) = \frac{0.316 z^{-1} + 0.316 z^{-2}}{1 + 0.58 z^{-1}}$$

Para obtener los valores de **$\{y_k\}$** se hace la transformada inversa empleando el método de la división larga, resultando:

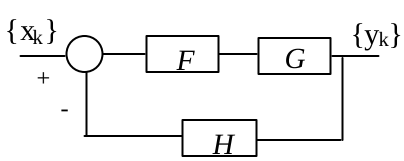
$$\{y_k\} = \{0 \quad 0.316 \quad 0.133 \quad -0.077 \quad \ldots\}$$

Dado que el periodo de muestreo es 0.5 segundos, los datos pedidos son:

$$y(1) = y_2 = 0.133$$
$$y(1.5) = y_3 = -0.077$$

PROBLEMA 3

Considérese el sistema de la figura, donde se conocen las funciones de transferencia de los bloques **G** y **H**:



$$G(z) = \frac{z}{z+1} \qquad H(z) = \frac{1}{z}$$

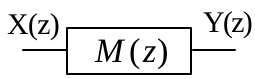
- Se pide obtener la función de transferencia del bloque **F** a partir de la ecuación en diferencias que relaciona las secuencias **$\{x_k\}$** e **$\{y_k\}$**:

$$y_k - 3y_{k-1} + 2y_{k-2} = x_k + 5x_{k-1}$$

VALORACIÓN: 2 puntos

SOLUCIÓN

En primer lugar se simplifica el sistema, llegando a una función de transferencia que denominaremos M(z) :



$$\boxed{M(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{F(z)\cdot G(z)}{1+F(z)\cdot G(z)\cdot H(z)}}$$

De esa expresión se puede despejar F(z), llegando a:

$$F(z)=\frac{M(z)}{G(z)-M(z)\cdot G(z)\cdot H(z)}$$

A continuación se obtiene M(z) a partir de la ecuación en diferencias, mediante el paso al dominio Z:

$$y_k-3y_{k-1}+2y_{k-2}=x_k+5x_{k-1}$$

$$\Delta y_k-3\Delta y_{k-1}+2\Delta y_{k-2}=\Delta x_k+5\Delta x_{k-1} \qquad (linealización)$$

$$Y(z)-3z^{-1}Y(z)+2z^{-2}Y(z)=X(z)+5z^{-1}X(z) \qquad (dom.\ Z)$$

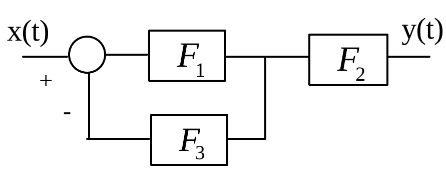
$$M(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+5z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}=\frac{z^2+5z}{z^2-3z+2}$$

A partir de M(z) se puede despejar el dato F(z) pedido, llegando a:

$$F(z)=\frac{z^2+6z+5}{z^2-4z-3}$$

PROBLEMA 4

En el sistema de la figura inferior se conocen las funciones de transferencia de los bloques $\mathbf{F_2}$ y $\mathbf{F_3}$:

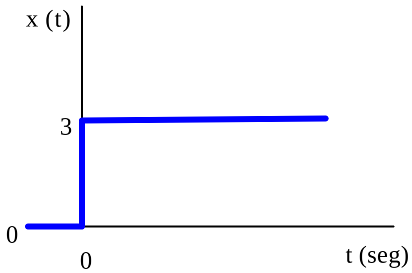


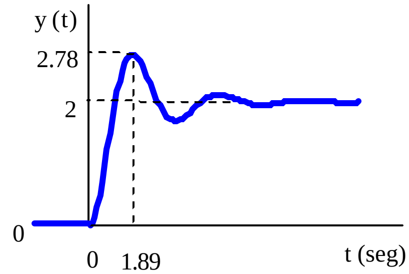
$$\boxed{F_2(s)=\frac{s+1}{s}} \qquad \boxed{F_3(s)=\frac{1}{s}}$$

Se pide:

- Obtener la función de transferencia del bloque $\mathbf{F_1}$.
- Indicar si el sistema $\mathbf{F_1(s)}$ es estable.

Dato: señales x(t) e y(t)





VALORACIÓN: 2.5 puntos

SOLUCIÓN

En primer lugar se simplifica el sistema, llegando a una función de transferencia que denominaremos M(s):

X(s) → $M(s)$ → Y(s)

$$\boxed{M(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{F_1(s)\cdot F_2(s)}{1+F_1(s)\cdot F_3(s)}}$$

De esa expresión se puede despejar $F_1(s)$, llegando a:

$$F_1(s)=\frac{M(s)}{F_2(s)-M(s)\cdot F_3(s)}$$

De acuerdo con las gráficas ofrecidas, el sistema M(s) será un sistema de segundo orden:

$$M(s)=\frac{Kw_n^2}{s^2+2xw_n s+w_n^2}$$

A continuación se calcula cada uno de los coeficientes:

$$K=\frac{2}{3}$$

$$M_p=\frac{2.78-2}{2}=e^{-\frac{p}{tgq}}\quad\Rightarrow\quad q=1.28rad$$

$$t_p=1.89=\frac{p}{w_d}\quad\Rightarrow\quad w_d=1.66$$

$$x=\cos q=0.287$$

$$w_n=\frac{w_d}{senq}=1.735$$

El resultado final es:

$$M(s) = \frac{2}{s^2 + s + 3}$$

A partir de M(s) se puede despejar F_1(s), resultando:

$$F_1(s) = \frac{2s}{s^3 + 2s^2 + 4s + 1}$$

Para determinar la estabilidad de F_1(s) se utiliza el criterio de Routh:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 4 \\ s^2 & 2 & 1 \\ s^1 & 7/2 & 0 \\ s^0 & 1 & \end{array}$$

En la función de transferencia todos los coeficientes del denominador son del mismo signo; y en la tabla de Routh no hay cambios de signo en la primera columna, con lo cual el sistema es estable.