UNIVERSITAS Miguel Hernández

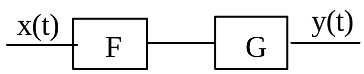
2º Ingeniería Industrial

Teoría de circuitos y sistemas

EXAMEN TEORÍA DE SISTEMAS 13-6-2003

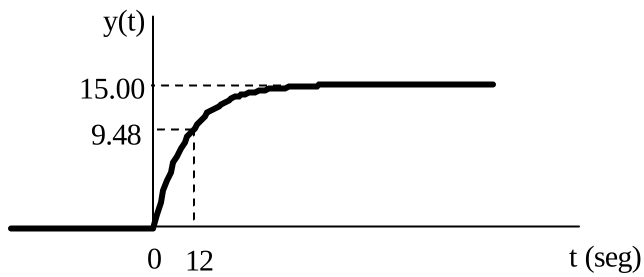
PROBLEMA 1

En el diagrama de la figura se conoce la función de transferencia del bloque F:



$$F(s) = \frac{s-3}{s+5}$$

Se hace un experimento aplicando una entrada escalón unitario a la entrada x(t), y se obtiene en la salida y(t) la siguiente respuesta:



Se pide:

- Obtener la función de transferencia G(s)
- Determinar si el sistema G(s) es estable o no.

VALORACIÓN: 2 puntos

SOLUCIÓN

El equivalente serie de los sistemas **F** y **G** será un sistema de primer orden, dado que la entrada al mismo es un escalón:

$$F(s) \cdot G(s) = \frac{K}{1+Ts}$$

La ganancia será **K=15** de acuerdo con la gráfica (K = valor final ante escalón unitario) y la constante de tiempo será **T=12seg** (T = instante en el que la salida alcanza el 63.2% del valor final: **15·0.632=9.48**). Por tanto, tendremos:

$$F(s) \cdot G(s) = \frac{15}{1+12s}$$

Despejando G(s) queda:

$$G(s) = \frac{15 \cdot (s+5)}{(1+12s) \cdot (s-3)}$$

G(s) es inestable dado que tiene un polo con parte real positiva: el polo en **s = 3**.

PROBLEMA 2

Considérese el sistema definido por las ecuaciones diferenciales siguientes:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2w(t)}{dt^2} - 3\cdot\dfrac{dw(t)}{dt} = 40 - 20\cdot\dfrac{w(t)}{x(t)} \\ y(t) = 5\cdot w(t) - 2\cdot y(t)\cdot\dfrac{dy(t)}{dt} + 2\cdot v(t) \end{cases}$$

- **x, v:** señales de entrada
- **y:** señal de salida

Punto de funcionamiento: **x(0)=2; v(0)=5**

Se pide:

- Obtener la función de transferencia $G_1(s) = Y(s) / X(s)$. ¿Corresponde a un sistema estable?
- Obtener la función de transferencia $G_2(s) = Y(s) / V(s)$. ¿Corresponde a un sistema estable?

VALORACIÓN: 2 .5 puntos

SOLUCIÓN

Obtención del punto de funcionamiento (derivadas=0):

$$\begin{cases} 0 - 3\cdot 0 = 40 - 20\cdot\dfrac{w(0)}{x(0)} \\ y(0) = 5\cdot w(0) - 2\cdot y(0)\cdot 0 + 2\cdot v(0) \\ x(0) = 2 \\ v(0) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w(0) = 4 \\ y(0) = 30 \end{cases}$$

Linealización y expresión en variables incrementales:

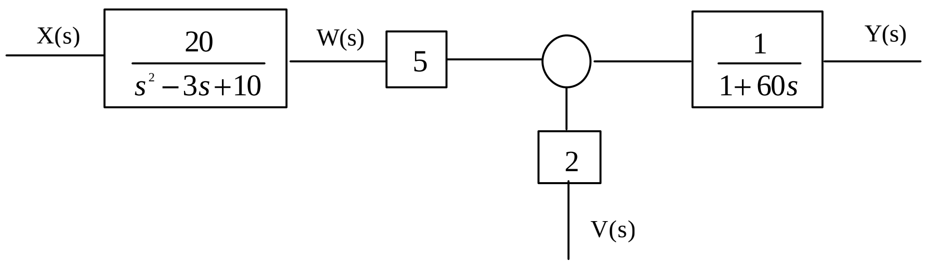
$$\begin{cases} \Delta\ddot{w}(t) - 3\Delta\dot{w}(t) = 0 - 20\dfrac{d}{dw(t)}\left[\dfrac{w(t)}{x(t)}\right]_0 \Delta w(t) - 20\dfrac{d}{dx(t)}\left[\dfrac{w(t)}{x(t)}\right]_0 \Delta x(t) \\ \Delta y(t) = 5\Delta w(t) - 2\dfrac{d}{dy(t)}\left[y(t)\cdot\dot{y}(t)\right]_0 \Delta y(t) - 2\dfrac{d}{d\dot{y}(t)}\left[y(t)\cdot\dot{y}(t)\right]_0 \Delta\dot{y}(t) + 2\Delta v(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\ddot{w}(t) - 3\Delta\dot{w}(t) = -10\Delta w(t) + 20\Delta x(t) \\ \Delta y(t) = 5\Delta w(t) - 60\Delta\dot{y}(t) + 2\Delta v(t) \end{cases}$$

Transformación al dominio de Laplace:

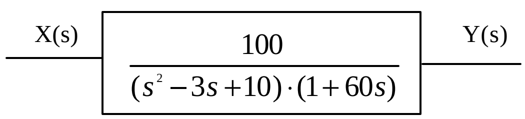
$$\begin{cases} s^2\cdot W(s) - 3s\cdot W(s) = -10\cdot W(s) + 20\cdot X(s) \\ Y(s) = 5\cdot W(s) - 60s\cdot Y(s) + 2\cdot V(s) \end{cases} \qquad \begin{cases} W(s)\cdot\left[s^2 - 3s + 10\right] = 20\cdot X(s) \\ Y(s)\cdot\left[1 + 60s\right] = 5\cdot W(s) + 2\cdot V(s) \end{cases}$$

Diagrama de bloques:



Función de transferencia $G_1(s)$:

v(t) = cte ?   V(s) = 0. Se reduce el diagrama y queda:

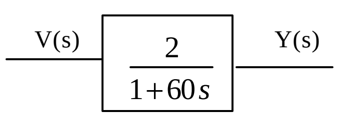


$$G_1(s)=\frac{100}{(s^2-3s+10)\cdot(1+60s)}=\frac{100}{60s^3-179s^2+597s+10}$$

$G_1(s)$ es inestable según el criterio de Routh por no tener todos los términos del denominador el mismo signo.

Función de transferencia $G_2(s)$:

x(t) = cte ?   X(s) = 0. Se reduce el diagrama y queda:

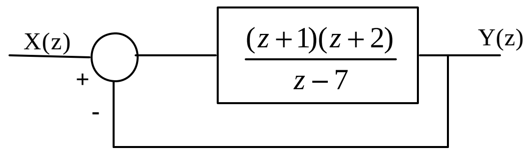


$$G_2(s)=\frac{2}{1+60s}$$

$G_2(s)$ es estable porque su único polo (s = -1/60) tiene parte real negativa.

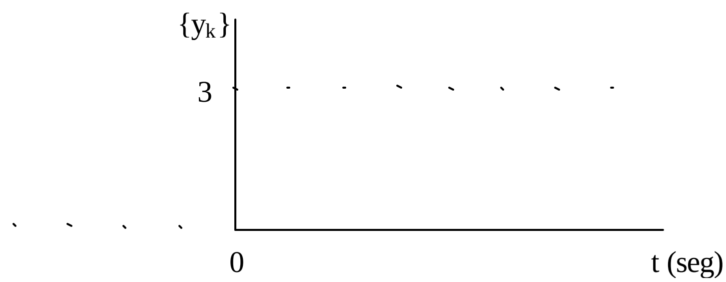
PROBLEMA 3

Considérese el sistema discreto de la figura:



Se pìde:

- Obtener la ecuación en diferencias que relaciona la secuencia de entrada **{xk}** con la secuencia de salida **{yk}**.
- Calcular la secuencia **{xk}** que sería necesario introducir a la entrada para que en la salida se obtuviese la secuencia **{yk}** que se representa en la figura. Nota: calcular el término general de la secuencia **{xk}**.



VALORACIÓN: 2.5 puntos

SOLUCIÓN

Se obtiene la función de transferencia G(z)=Y(z)/X(z) reduciendo el diagrama de bloques:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\dfrac{(z+1)(z+2)}{z-7}}{1+\dfrac{(z+1)(z+2)}{z-7}} = \frac{z^2+3z+2}{z^2+4z-5} = \frac{1+3z^{-1}+2z^{-2}}{1+4z^{-1}-5z^{-2}}$$

Despejando y haciendo la antitransformada Z se obtiene la ecuación en diferencias:

$$Y(z)\cdot\left[1+4z^{-1}-5z^{-2}\right] = X(z)\cdot\left[1+3z^{-1}+2z^{-2}\right]$$

$$Y(z)+4z^{-1}\cdot Y(z)-5z^{-2}\cdot Y(z) = X(z)+3z^{-1}\cdot X(z)+2z^{-2}\cdot X(z)$$

$$Z^{-1}\left[Y(z)+4z^{-1}\cdot Y(z)-5z^{-2}\cdot Y(z)\right] = Z^{-1}\left[X(z)+3z^{-1}\cdot X(z)+2z^{-2}\cdot X(z)\right]$$

$$\{y_k\}+4\{y_{k-1}\}-5\{y_{k-2}\} = \{x_k\}+3\{x_{k-1}\}+2\{x_{k-2}\}$$

$$y_k+4y_{k-1}-5y_{k-2} = x_k+3x_{k-1}+2x_{k-2}$$

La salida $\{y_k\}$ pedida en el gráfico es un escalón de 3 unidades, por tanto:

$$Y(z) = \frac{3}{1-z^{-1}}$$

Para calcular la entrada X(z) conocidas la salida Y(z) y la función de transferencia, basta despejar:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad \Rightarrow \quad X(z) = \frac{Y(z)}{G(z)}$$

$$X(z) = \frac{3}{1-z^{-1}} \cdot \frac{1+3z^{-1}+2z^{-2}}{1+4z^{-1}-5z^{-2}} = \frac{3}{1-z^{-1}} \cdot \frac{(1-z^{-1})\cdot(1+5z^{-1})}{(1+z^{-1})\cdot(1+2z^{-1})} = \frac{3+15z^{-1}}{(1+z^{-1})\cdot(1+2z^{-1})}$$

Para obtener el término general de la secuencia $\{x_k\}$ se hace la antitransformada mediante el método de la descomposición en fracciones simples:

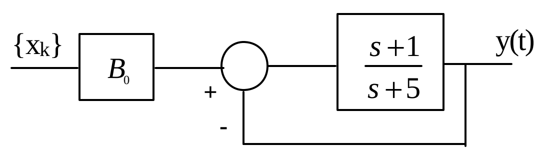
$$X(z) = \frac{A}{1+z^{-1}} + \frac{B}{1+2z^{-1}} = \frac{12}{1+z^{-1}} - \frac{9}{1+2z^{-1}}$$

$$x_k = 12\cdot(-1)^k - 9\cdot(-2)^k$$

PROBLEMA 4

En el sistema de la figura, la secuencia de entrada **$\{x_k\}$** tiene periodo **1 segundo** y toma los siguientes valores:

$$\{x_k\} = \{1 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots\}$$



Se pide obtener el valor de la señal de salida y(t) en los instantes:

- t = 1 seg.
- t = 1.5 seg.
- t = 2 seg.

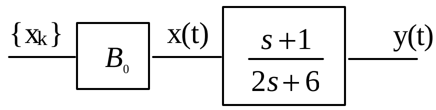
VALORACIÓN: 3 puntos

SOLUCIÓN

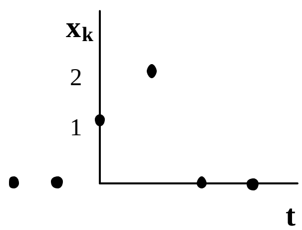
El problema se puede resolver por dos métodos: en el dominio de Laplace o en el dominio Z; a continuación se desarrollan las dos soluciones.

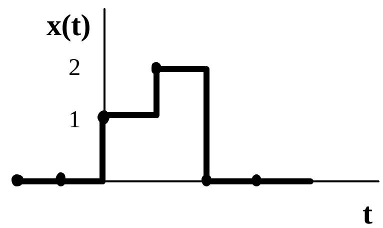
SOLUCIÓN A: en el dominio de Laplace.

En primer lugar, se reduce el diagrama de bloques, y se obtiene:



La señal x(t) se puede obtener fácilmente como el resultado de aplicar el bloqueador de orden cero a la secuencia $\{x_k\}$:





Para obtener X(s) basta con calcular la transformada de Laplace de x(t); esto es inmediato considerando x(t) como suma de escalones retrasados:

$$X(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s} \cdot e^{-s} - \frac{2}{s} \cdot e^{-2s}$$

La señal Y(s) se obtiene como producto de X(s) por la función de transferencia:

$$Y(s) = X(s) \cdot \frac{s+1}{2s+6} = (1 + e^{-s} + e^{-2s}) \cdot \frac{s+1}{s \cdot (2s+6)}$$

La señal y(t) es la transformada inversa de Laplace de Y(s). Se obtiene en primer lugar la transformada del término que no incluye retrasos:

$$L^{-1}\left[\frac{s+1}{s \cdot (2s+6)}\right] = \frac{1}{6} \cdot \left(1 + 2 \cdot e^{-3t}\right)$$

Y a continuación se consideran los retrasos:

$$y(t) = \frac{1}{6} \cdot \left[(1 + 2 \cdot e^{-3t}) \cdot u_0(t) + (1 + 2 \cdot e^{-3(t-1)}) \cdot u_0(t-1) - 2 \cdot (1 + 2 \cdot e^{-3(t-2)}) \cdot u_0(t-2)\right]$$

Sustituyendo sobre la expresión anterior:

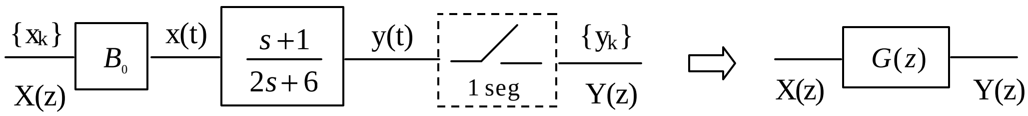
$$y(1) = \frac{1}{6} \cdot \left[(1 + 2 \cdot e^{-3}) \cdot 1 + (1 + 2 \cdot e^{0}) \cdot 1 - 2 \cdot (1 + 2 \cdot e^{3}) \cdot 0\right] = 0.68$$

$$y(1.5) = \frac{1}{6} \cdot \left[(1 + 2 \cdot e^{-4.5}) \cdot 1 + (1 + 2 \cdot e^{-1.5}) \cdot 1 - 2 \cdot (1 + 2 \cdot e^{1.5}) \cdot 0\right] = 0.411$$

$$y(2) = \frac{1}{6} \cdot \left[(1 + 2 \cdot e^{-6}) \cdot 1 + (1 + 2 \cdot e^{-3}) \cdot 1 - 2 \cdot (1 + 2 \cdot e^{0}) \cdot 1\right] = -0.65$$

SOLUCIÓN B: en el dominio Z.

Se añade al sistema un bloqueador ficticio y se obtiene el sistema discreto equivalente:



$$G(z) = (1 - z^{-1}) \cdot \sum_{polos} residuos\left[\frac{0.5 \cdot (p+1)}{(p+3) \cdot p} \cdot \frac{1}{1 - e^{pT} \cdot z^{-1}}\right]$$

Se obtiene:

$$G(z) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1.5 - 1.025 \cdot z^{-1}}{1 - 0.05 \cdot z^{-1}}\right)$$

La entrada X(z) se obtiene como transformada Z de la secuencia $\{x_k\}$:

$$X(z) = Z[\{x_k\}] = 1 + 2z^{-1}$$

Con la entrada y la función de transferencia se calcula la salida Y(z):

$$Y(z) = G(z) \cdot X(z) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1.2 - 1.025 z^{-1}}{1 - 0.05 z^{-1}}\right) \cdot (1 + 2z^{-1}) = \frac{0.5 + 0.66 z^{-1} - 0.68 z^{-2}}{1 - 0.05 z^{-1}}$$

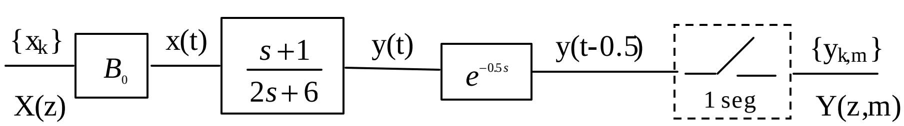
La secuencia $\{y_k\}$ se obtiene haciendo la antitransformada de Y(z) por división larga:

$$\{y_k\} = \{0.5 \quad 0.685 \quad -0.646 \quad ...\}$$

Los términos que nos interesan son los correspondientes a k=1 y a k=2:

$$y(1) = y_1 = 0.685$$
$$y(2) = y_2 = -0.646$$

Para calcular y(1.5) es necesario introducir un retraso de 0.5 segundos:



$$G(z) = z^{-1}(1 - z^{-1}) \cdot \sum_{polos} residuos\left[\frac{0.5 \cdot (p+1)}{(p+3) \cdot p} \cdot e^{mTp} \frac{1}{1 - e^{pT} \cdot z^{-1}}\right]$$

El valor del parámetro m se obtiene a partir del retraso ?

$$\begin{cases} l = (1-m) \cdot T \\ l = 0.5 \end{cases} \quad \rightarrow \quad m = 0.5$$

Se obtiene:

$$G(z,m) = \frac{0.24z^{-1} - 0.082z^{-2}}{1 - 0.05z^{-1}}$$

Con la entrada y la función de transferencia se calcula la salida Y(z,m):

$$Y(z,m) = G(z,m) \cdot X(z) = \frac{0.24z^{-1} - 0.082z^{-2}}{1 - 0.05z^{-1}} \cdot (1 + 2z^{-1}) = \frac{0.24z^{-1} - 0.4z^{-2} - 0.164z^{-3}}{1 - 0.05z^{-1}}$$

La secuencia $\{y_{k,m}\}$ se obtiene haciendo la antitransformada de Y(z,m) por división larga:

$$\{y_{k,m}\} = \{0 \quad 0.24 \quad 0.412 \quad ...\}$$

El término que nos interesa es el correspondiente a k=2:

$$y(1.5) = y_2 = 0.412$$