2º Ingeniería Industrial

Teoría de Circuitos y Sistemas

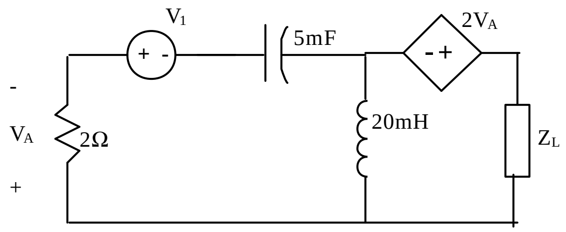
1er parcial. Fecha: 14 febrero 2003

PROBLEMA 1 (Valoración: 4 puntos)

En el circuito de la figura:

- Obtened el valor de la impedancia de carga $\mathbf{Z_L}$ para obtener una transferencia de potencia máxima. En estas condiciones, calculad el valor de la potencia media y la potencia reactiva de la carga Z_L. (**2 puntos**)
- Con el circuito cargado con la impedancia Z_L, hallad la potencia media y reactiva de las fuentes de circuito, razonad si actúan como componentes activos o pasivos. (**2 puntos**)

V_1=24 cos(100t) V_{eff}



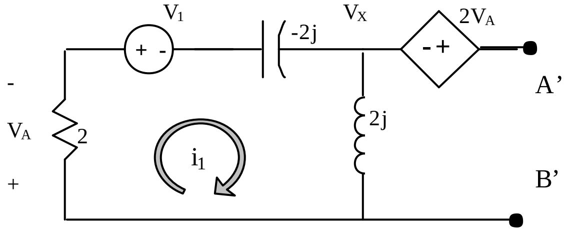
SOLUCIÓN:

Obtened el valor de la impedancia de carga $\mathbf{Z_L}$ para obtener una transferencia de potencia máxima. En estas condiciones, calculad el valor de la potencia media y la potencia reactiva de la carga Z_L.

Por el teorema de máxima transferencia de potencia, $Z_L = Z_{TH}{}^*$.
Vamos a calcular el valor de Z_{TH}:

$$Z_{TH} = \frac{V_{TH}}{I_N}$$

Cálculo de V_{TH}:



$$Z_R = 2$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j100 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = -2j$$

$$Z_L = j\omega L = j100 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 2j$$

$$\widehat{V}_1 = 24$$

Si colocamos la referencia a masa en el nodo B', la tensión de Thevenin será:

$$\hat{V}_{TH} = (\hat{V}_{A'} - \hat{V}_{B'})_{abierto} = \hat{V}_{A'} - 0 = \hat{V}_X + 2\hat{V}_A$$

donde

$$\hat{V}_X = \hat{i}_1 \cdot 2j$$
$$\hat{V}_A = \hat{i}_1 \cdot 2$$

El valor de la corriente $\hat{i}_1$ lo obtenemos a partir de la ecuación de malla:

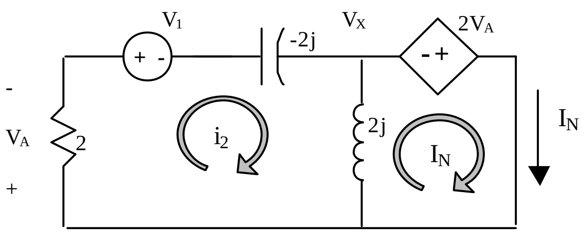
$$-\hat{V}_1 = \hat{i}_1 \cdot (2 + 2j - 2j)$$
$$-24 = \hat{i}_1 \cdot 2$$
$$\hat{i}_1 = -12$$

por tanto:

$$\hat{V}_X = \hat{i}_1 \cdot 2j = -12 \cdot 2j = -24j$$
$$\hat{V}_A = \hat{i}_1 \cdot 2 = -12 \cdot 2 = -24$$

$$\hat{V}_{TH} = \hat{V}_X + 2\hat{V}_A = -24j + 2 \cdot (-24) = -24(2 + j)V_{eff}$$

Cálculo de I_N:



$$I_N = (I_{A'} - I_{B'})_{cortocircuito}$$

Aplicando análisis de mallas:

$$-24 = (2 - 2j) \cdot \hat{i}_2 + 2j \cdot (\hat{i}_2 - \hat{I}_N)$$
$$2\hat{V}_A = 2j \cdot (\hat{I}_N - \hat{i}_2)$$

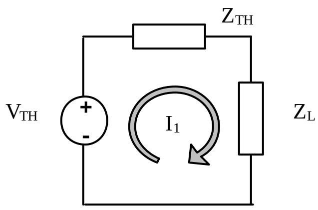
y utilizando la ecuación de control de la fuente de tensión dependiente de tensión: $\hat{V}_A = \hat{i}_2 \cdot 2$, tenemos el sistema de ecuaciones que nos permitirá hallar el valor de la corriente de Norton:

$$\left.\begin{array}{l} -24 = (2 - 2j) \cdot \hat{i}_2 + 2j \cdot (\hat{i}_2 - \hat{I}_N) \\ 4\hat{i}_2 = 2j \cdot (\hat{I}_N - \hat{i}_2) \end{array}\right\} \ldots\ldots \rightarrow \quad \hat{I}_N = -6(1 + 3j)A_{eff}$$

La impedancia de Thevenin será: $Z_{TH} = \dfrac{V_{TH}}{I_N} = \dfrac{-24(2+j)}{-6(1+3j)} = 4\dfrac{(2+j)}{(1+3j)} = 2-2j$

y el valor de la impedancia de carga: $Z_L = Z_{TH}^{\ *} = 2+2j$

El valor de la potencia media y la potencia reactiva de la carga Z_L los calculamos utilizando el circuito equivalente de Thevenin:

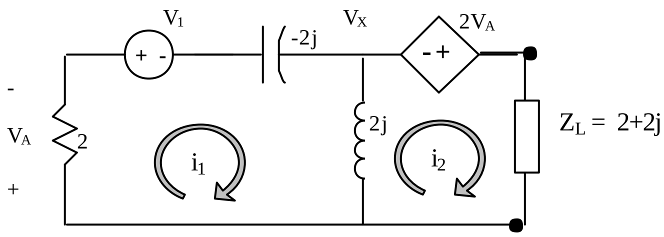


$$\hat{I} = \frac{\widehat{V}_{TH}}{Z_{TH}+Z_L} = \frac{-24(2+j)}{2-2j+2+2j} = -6(2+j)A_{eff}$$

$$P_{Z_L} = \left|\hat{I}\right|^2 \cdot \mathrm{Re}\{Z_L\} = 180*2 = 360W$$

$$Q_{Z_L} = \left|\hat{I}\right|^2 \cdot \mathrm{Im}\{Z_L\} = 180*2 = 360VAR$$

Con el circuito cargado con la impedancia Z_L, hallad la potencia media y reactiva de las fuentes de circuito, razonad si actúan como componentes activos o pasivos.



Vamos a calcular las corrientes por las fuentes del circuito mediante el análisis de mallas para así hallar la potencia media y reactiva de cada fuente.

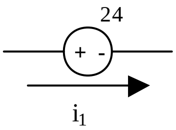
Ecuaciones de malla:

$$-24 = (2-2j)\cdot\hat{i}_1 + 2j\cdot(\hat{i}_1 - \hat{i}_2)$$
$$2\hat{V}_A = 2j\cdot(\hat{i}_2 - \hat{i}_1) + \hat{i}_2\cdot(2+2j)$$

y utilizando la ecuación de control de la fuente de tensión dependiente de tensión: $\hat{V}_A = \hat{i}_1 \cdot 2$, obtenemos:

$$\hat{i}_1 = -(6+12j)$$
$$\hat{i}_2 = -(12+6j)$$

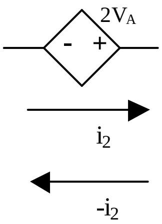
Potencias en las fuentes (utilizando el criterio de signos pasivo):



$$\vec{S} = \hat{V}\cdot\hat{I}^{*} = 24\cdot(-6-12\,j)^{*} = 24\cdot(-6+12j) = -144+288j$$

$$P = -144W \quad \rightarrow \quad \text{fuente ACTIVA}$$

$$Q = 288VAR$$



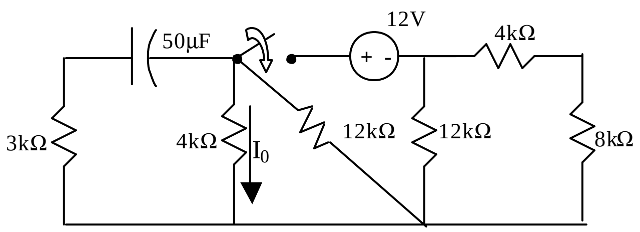
$$\vec{S} = \hat{V}\cdot\hat{I}^{*} = 2\cdot\hat{V}_A\cdot(-\hat{i}_2)^{*} = 2\cdot 2\cdot\hat{i}_1\cdot(12-6\,j) = -4\cdot(-6-12\,j)\cdot(12-6j) = -576-432\,j$$

$$P = -576W \quad \rightarrow \quad \text{fuente ACTIVA}$$

$$Q = -432VAR$$

PROBLEMA 2 **(Valoración: 3 puntos)**

En el circuito de la figura, el interruptor lleva abierto mucho tiempo y se cierra en el instante t = 0, calculad la corriente $\mathbf{I_0}$ a lo largo del tiempo y representadla gráficamente.



SOLUCIÓN:

El circuito anterior es un circuito de primer orden, se hallará la tensión en el condensador en primer lugar y a partir de ella se obtendrá el dato pedido $\mathbf{I_0(t)}$.

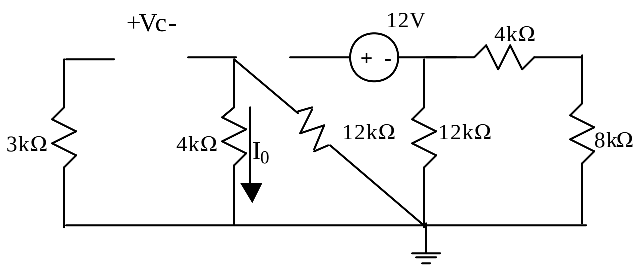
Transitorio en t = 0:

$$V_C(t) = V_{Cfinal} + (V_{Cinicial} - V_{Cfinal}) \cdot e^{-t/\tau}; \quad \tau = R_{eq} \cdot C$$

Vamos a hallar los parámetros: V_{Cfinal}, $V_{Cinicial}$ y R_{eq}

Circuito para t<0:

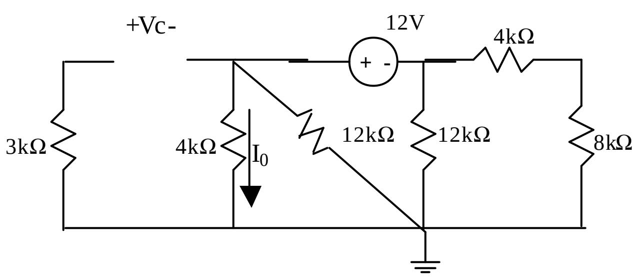
El condensador es un circuito abierto en DC:



por lo tanto:

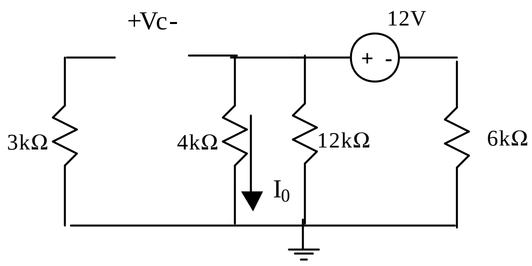
$$V_C(0^-) = V_{Cinicial} = 0V$$
$$I_0(0^-) = 0mA$$

Circuito para t>0:



Podemos simplicar el circuito anterior, agrupando las resistencias situadas a la derecha de la fuente de 12V:

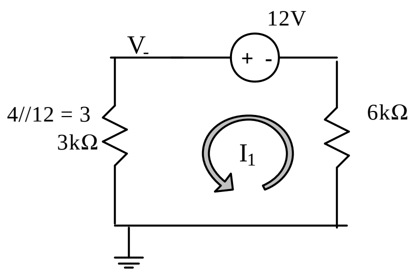
4kΩ en serie con 8 kΩ $\rightarrow$ 12 kΩ
12 kΩ en paralelo con 12 kΩ $\rightarrow$ 6 kΩ



a partir del circuito anterior se obtiene V_{Cfinal} y R_{eq}:

$$V_{Cfinal} = V_C(\infty) = V_+ - V_-$$

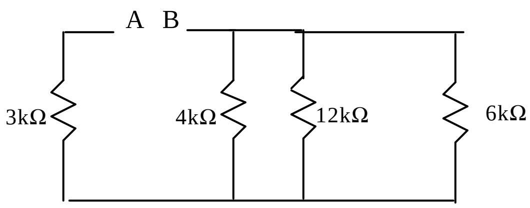
Resulta evidente que $V_+ = 0$, y V_- se obtiene de la siguiente forma:



$$I_1 = \frac{12}{6+3} = \frac{4}{3}mA$$
$$V_- = I_1 \cdot 3 = 4V$$

Por tanto, $V_{Cfinal} = V_C(\infty) = V_+ - V_- = -4V$

Cálculo de R_{eq}:



R_{eq}= 4 en paralelo con 12 en paralelo con 6 y en serie con 3.
R_{eq}= 4//12//6 + 3 = 3//6 + 3 = 2 + 3 =5kΩ

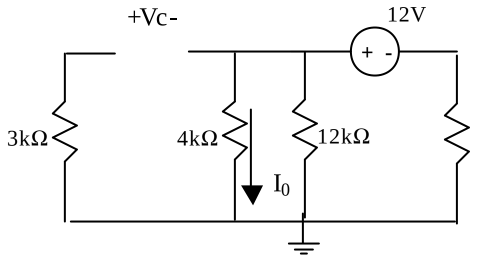
R_{eq}= 5kΩ

Sustituyendo en la ecuación del transitorio:

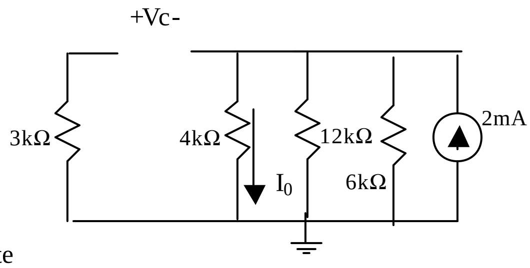
$$V_C(t) = -4 + (0-(-4)) \cdot e^{-t/\tau}; \quad \tau = R_{eq} \cdot C = 5 \cdot 10^3 \cdot 50 \cdot 10^{-6} = 0.25s; \quad \frac{1}{\tau} = 4$$

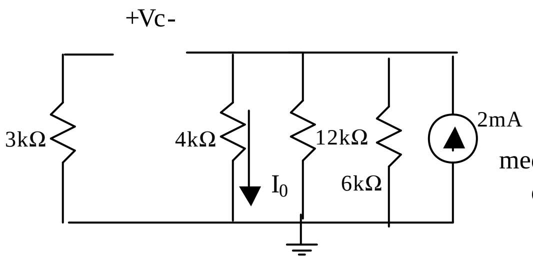
$$V_C(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -4 + 4 \cdot e^{-4t} & t \geq 0 \end{cases}$$

Ahora se obtiene $I_0(t)$ para t >=0, a partir del circuito para t > 0 y el dato de la tensión en el condensador :

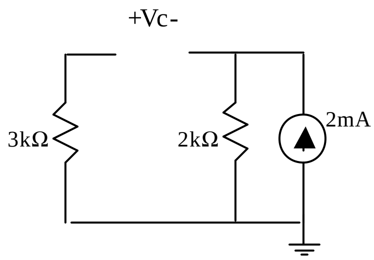


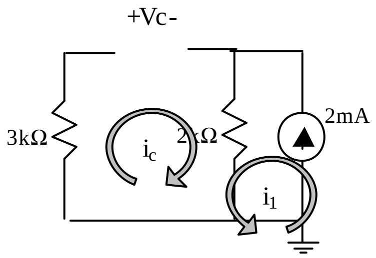
mediante transformación de fuentes





mediante agrupación de resistencias



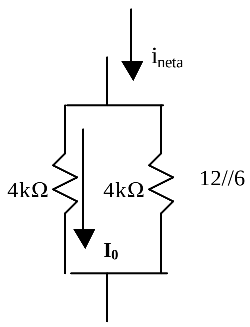


Ecuaciones de malla:

$i_1 = 2mA$

$$i_c = C\frac{dV_C}{dt} = 50{\cdot}10^{-6}{\cdot}(0 + 4{\cdot}(-4)e^{-4t}) = -0.8e^{-4t}mA$$

$$i_{neta(R=2k)} = i_1 + i_c = 2 - 0.8e^{-4t}mA$$



La corriente $I_0(t)$ la obtenemos mediante el divisor de corriente formado por la resistencias del dibujo de la izquierda:

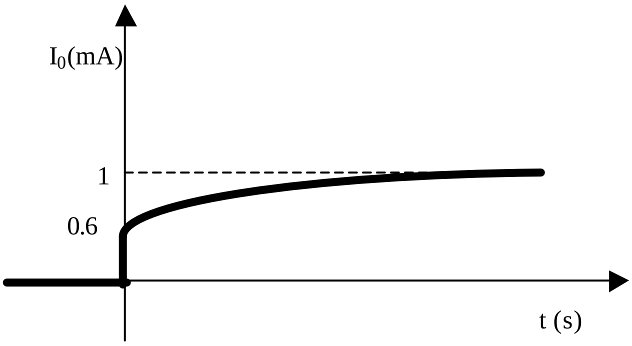
$$I_0 = i_{neta}\frac{4}{4+4} = \frac{i_{neta}}{2} = 1 - 0.4e^{-4t}mA$$

Por tanto, el valor de la corriente para todo el intervalo temporal es el siguiente:

$$I_0 = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - 0.4e^{-4t}mA & t \geq 0 \end{cases}$$

Para realizar la representación gráfica, se detalla el resultado anterior:

$$I_0 = \begin{cases} 0 \quad t < 0 \\ 0.6mA \quad t = 0^+ \\ 1 - 0.4e^{-4t}mA \quad t > 0 \\ 1 \quad t \to \infty \end{cases}$$

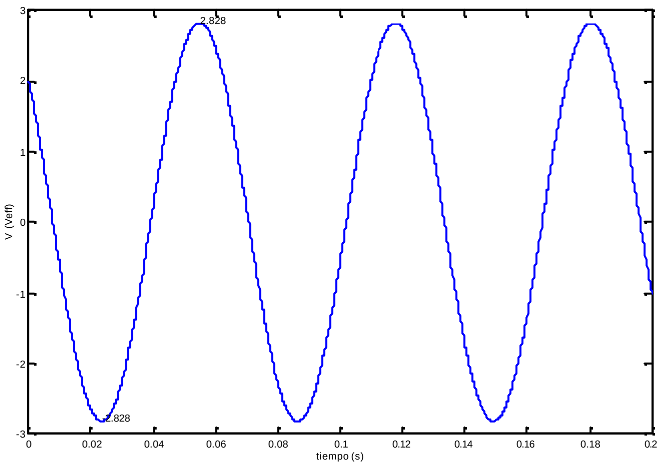


En el gráfico es posible apreciar el cambio brusco de corriente que se produce en t = 0, la corriente pasa de ser nula a valer0.6 mA.

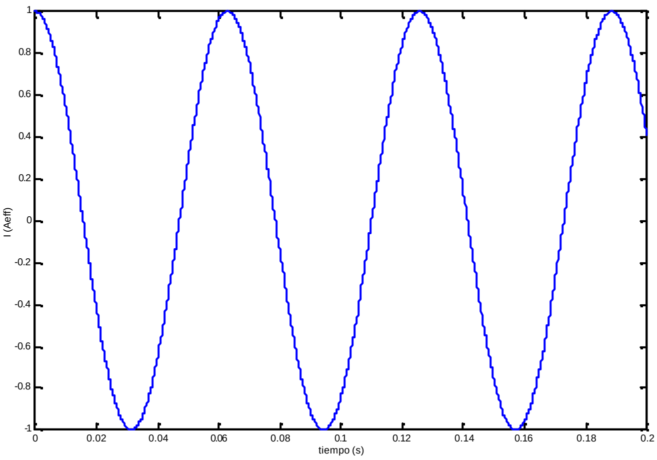
PROBLEMA 3 (Valoración: 2 puntos)

Sobre un circuito desconocido, que sólo contiene elementos pasivos (resistencias, condensadores y bobinas) y fuentes de tensión de alterna de frecuencia ω=100 rad/s se realizaron las siguientes medidas:

- Conectando un osciloscopio entre dos de los terminales del circuito, se observó una tensión como la mostrada en la siguiente gráfica:



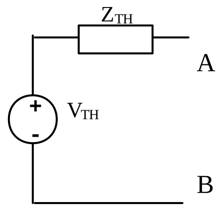
- Conectando una carga (compuesta por una resistencia de 1Ω en serie con una bobina de 10mH) entre esos dos mismos terminales, se midió con el osciloscopio la corriente a través de la carga, tal como se muestra en la siguiente gráfica:

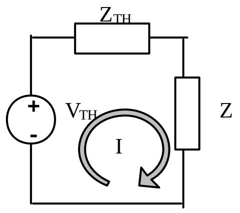


¿Qué potencia media consumirá carga (compuesta por una resistencia de 2Ω en serie con una bobina de 20mH) conectada entre los mencionados terminales? Razónese la respuesta.

SOLUCIÓN:

Cualquier circuito puede ser representado por su equivalente Thevenin entre 2 de sus terminales:





La tensión del primer gráfico se corresponde directamente con la V_{TH} y la segunda gráfica se refiere a la corriente que circula por el circuito al colocar una carga entre los terminales A-B.

Cálculo de V_{TH}:

En el primer gráfico se observa que la amplitud de la señal es 2.828 V_{eff}, por tanto:

$$V_{TH}(t) = 2.828\cos(100t + \phi)$$

también se obtiene del gráfico que para t = 0, V_{TH} = 2 V_{eff} , lo que permite deducir el valor de la fase:

$$2 = 2.828\cos\phi \rightarrow \cos\phi = 0.7072 \rightarrow \phi = 45º = \frac{\pi}{2}\text{rad}$$

Por lo tanto, la tensión de Thevenin en el dominio temporal es:

$$V_{TH}(t) = 2.828\cos(100t + \frac{\pi}{4})\ V_{eff}$$

y como fasor:

$$\hat{V}_{TH} = 2.828(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}) = 2 + j2$$

Cálculo de I:

En el primer gráfico se observa que la amplitud de la señal es 1 A_{eff}, por tanto:

$$I(t) = \cos(100t + \phi)$$

también se obtiene del gráfico que para t = 0, I = 1 A_{eff} , lo que permite deducir el valor de la fase:

$$1 = \cos\phi \rightarrow \phi = 0º = 0\text{rad}$$

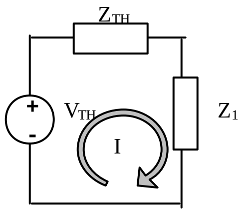
Por lo tanto, la corriente por el circuito con la carga en el dominio temporal es:

$$I(t) = \cos(100t)\ A_{eff}$$

y como fasor:

$$\hat{I} = 1(\cos 0 + j\sin 0) = 1$$

A partir del dato de la corriente que circula por el circuito al colocar una carga compuesta por una resistencia de 1Ω en serie con una bobina de 10mH ($\hat{I} = 1$), se deduce el valor de la impedancia de Thevenin Z_{TH} del circuito:



Z_1 = resistencia de 1Ω en serie con bobina de 10mH

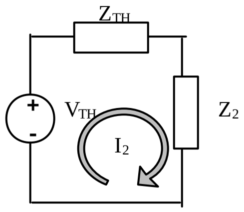
$$Z_1 = R + j\omega L = 1 + j \cdot 100 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 1 + j$$

Ecuación de malla:

$$\hat{V}_{TH} = \hat{I} \cdot Z_{TH} + \hat{I} \cdot Z_1$$

$$Z_{TH} = \frac{\hat{V}_{TH} - \hat{I} \cdot Z_1}{\hat{I}} = \frac{2 + 2j - 1 \cdot (1 + j)}{1} = 1 + j$$

Ahora ya conocemos el circuito equivalente Thevenin del circuito "desconocido", por lo que se puede calcular el dato que pedía el enunciado, esto es, la potencia media consumida por una carga compuesta por una resistencia de 2Ω en serie con una bobina de 20mH (Z_2):



$$Z_2 = R + j\omega L = 2 + j \cdot 100 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 2 + j2$$

$$\hat{V}_{TH} = \hat{I}_2 \cdot Z_{TH} + \hat{I}_2 \cdot Z_1$$

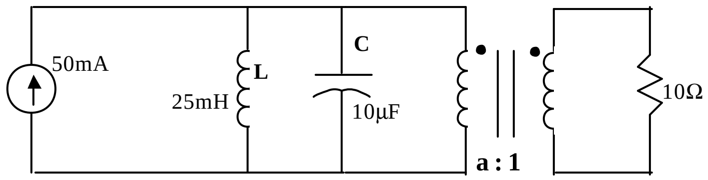
$$\hat{I}_2 = \frac{\hat{V}_{TH}}{Z_{TH} + Z_1} = \frac{2 + 2j}{1 + j + 2 + 2j} = \frac{2(1 + j)}{3(i + j)} = \frac{2}{3}\ A_{eff}$$

La potencia media consumida por la carga Z_2: $P = \left|\hat{I}_2\right|^2 \cdot \mathrm{Re\,al}\{Z_2\} = \left[\frac{2}{3}\right]^2 \cdot 2 = \frac{8}{9} W$

PROBLEMA 4 (Valoración: 1 punto)

En el siguiente circuito resonante:

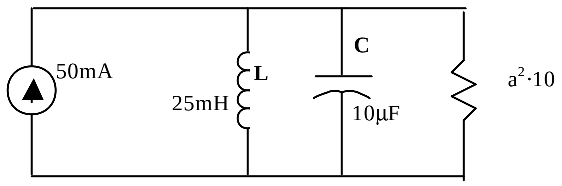
- hallad el valor de la relación de transformación **a**, para obtener un factor de calidad Q de 50.
- calculad el valor de la corriente y la tension en el condensador y en la bobina a la frecuencia de resonancia.



SOLUCIÓN:

Cálculo de la relación de transformación a:

Si se refleja la resistencia de secundario en primario, el circuito anterior queda reducido al siguiente:



$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{25 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-6}}} = .. = 2000 \text{rad/s}$$

$$\beta = \frac{1}{RC}$$

$$Q = \frac{\omega_o}{\beta} \rightarrow Q = \frac{2000}{1/RC} = 2000 \cdot RC = 2000 \cdot a^2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10^{-6}$$

Si el factor de calidad Q ha de valer 50:

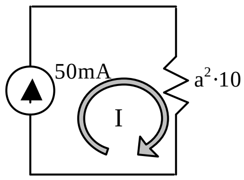
$$Q = 2000 \cdot a^2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 50$$

$$\vdots$$

$$a = \sqrt{250} = 15.81$$

Cálculo del valor de la corriente y la tension en el condensador y en la bobina a la frecuencia de resonancia:

Si el circuito anterior es resonante, la bobina y el condensador son equivalentes a un circuito abierto, y reflejando la resistencia de secundario en primario (con a^2 = 250), el circuito anterior queda reducido a una sola malla:



$$\left|I_L\right| = Q \cdot I = 50\text{mA} \cdot 50 = 2500\text{mA}$$

$$\left|I_C\right| = Q \cdot I = 50\text{mA} \cdot 50 = 2500\text{mA}$$

$$V_C = V_L = I \cdot R = I \cdot a^2 \cdot 10 = 50 \cdot 10^{-3} \cdot 250 \cdot 10 = 125\text{V}$$