EXAMEN DE SISTEMAS ELECTRÓNICOS DE CONTROL

Septiembre 2004

SOLUCIÓN:

Problema 2 **(5 puntos)**

Sea el sistema discreto:

$$x[(k+1)T] = Ax(kT) + Bu(kT)$$
$$y(kT) = Cx(kT)$$

Donde

$$T = 0.1s \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Considerando que sólo es conocida la salida y la entrada del sistema, diseñar un control por realimentación del estado de forma que en bucle cerrado se sitúen el máximo número de polos en el origen.

Detallar el esquema de control a emplear.

Puntuación del problema: (5 puntos)

1. Análisis completo del sistema: (1.5 puntos)
2. Diseño del sistema de control (3 puntos)
3. Representación gráfica del sistema de control: (0.5 puntos)

1. Análisis completo del sistema: (1.5 puntos)

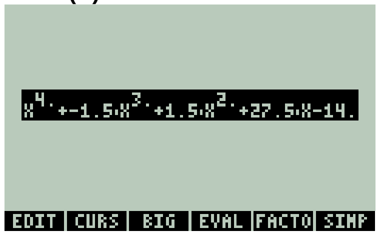
Almacenamos en las variables A,B,C las matrices del modelo de estado del sistema.

a) Análisis dinámico:

Polos del sistema actual

Polinomio característico $\det(zI - A)$:

PCAR(A)



Polos: **EGVL(A)** -> (0.5) , (-2.64), (1.82+- j2.7) Sistema Inestable

Polos deseados: *z=0*

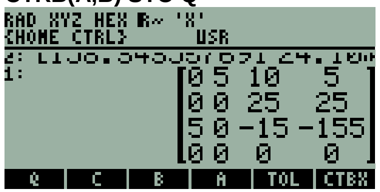
b) Controlabilidad:

Para poder implantar un control por realimentación del estado, el sistema debe ser controlable. Si el sistema no fuera controlable, su comportamiento sería independiente de la entrada, por lo que no sería modificable a pesar de realizar una realimentación del estado sobre ella.

Para saber si un sistema lineal e invariante en el tiempo es controlable, únicamente hay que comprobar que el rango de la matriz de controlabilidad Q coincida con el orden del sistema:

$$Q = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix}$$

CTRB(A,B) STO Q



Para calcular el rango efectivo de Q, en lugar de usar la función RANK2, calculamos los valores singulares de Q y buscamos en rango máximo para una condición adecuada (<100).

Valores Singulares: **SVL(Q)**

Condición a rango 4: **rCOND2(Q,4)** -> infinito
Condición a rango 3: **rCOND2(Q,3)** -> 34.47

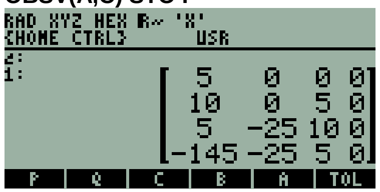
Por tanto Q es una matriz de rango 3 con condición 34.47. El sistema es no controlable

c) <u>Observabilidad</u>:

Puesto que sólo es conocida la salida y la entrada al sistema, no es posible realimentar las variables de estado directamente, por lo que será necesario diseñar un observador del estado para estimar su valor. Para poder estimar las variables de estado el sistema debe ser observable. Para saber si un sistema lineal e invariante en el tiempo es observable, hay que comprobar que el rango de la matriz de observabilidad *P* coincida con el orden del sistema:

$$P = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix}$$

OBSV(A,C) STO P



Para calcular el rango efectivo de P, en lugar de usar la función RANK2, calculamos los valores singulares de P y buscamos en rango máximo para una condición adecuada (<100)

Valores singulares: **SVL(P)**

Condición a rango 4: **rCOND2(P,4)** -> infinito
Condición a rango 3: **rCOND2(P,3)** -> 34.34
Rango 3 con condición 34.34 -> Sistema no observable.

Deberemos realizar la separación del subsistema controlable y observable. En este caso no es necesario utilizar Kalman ya que de la simple observación de las matrices del modelo podemos observar que la última variable x_4 es no controlable y no observable y las variables $\{x_1,x_2,x_3\}$ son controlables y observables.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{array}\right] \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Igualmente esta misma conclusión se puede extraer de las matrices Q y P. La última fila de Q (correspondiente a x_4) es nula y por lo tanto supone que x_4 es no controlable y al ser el rango de Q igual a 3 implica que $\{x_1,x_2,x_3\}$ son controlables. La última columna de P (correspondiente a x_4) es nula y por lo tanto supone que x_4 es no observable y al ser el rango de P igual a 3 implica que $\{x_1,x_2,x_3\}$ son observables..

BSC={[1 0 0 0], [0 1 0 0], [0 0 1 0]}
BSNO={[0 0 0 1]}➔ Px=0
La intersección entre BSC y BSNO es nula

Extraemos las matrices del Subsistema Controlable y Observable:
SUB(A, {1 1}, {3 3}) STO A1 *(Almacenamos en A1 la matriz de estado del subsistema)*
SUB(B, {1 1}, {3 1}) STO B1 *(Almacenamos en B1 la matriz de entrada del subsistema)*
SUB(C, {1 1}, {1 3}) STO C1 *(Almacenamos en C1 la matriz de salida del subsistema)*

$$A_{aa} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad C_a = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los valores propios de A_{aa} corresponden a los polos inestables que podremos cambiar.
PCAR(A1) -> $P_{Aaa}=z^3-z^2+z+28$
EGVL(A1) -> (-2.64), (1.82+- j2.7)

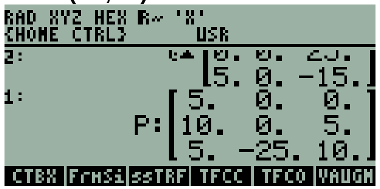
2. Diseño del sistema de control (3 puntos)

2.a Observador:

Pasamos a la Forma Canónica Observable:

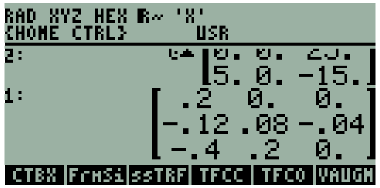
Calculamos la matriz de observabilidad -> $P_a = \begin{bmatrix} C_a \\ C_a A_{aa} \\ C_a A_{aa}^2 \end{bmatrix}$

OBSV(A1,C1) STO P1 *(Almacenamos en P1 la matriz de observabilidad)*



La invertimos: P_a^{-1}

INV(P1) STO P1i *(Almacenamos en P1i la matriz de observabilidad inversa)*



Extraemos la última columna (e_3)

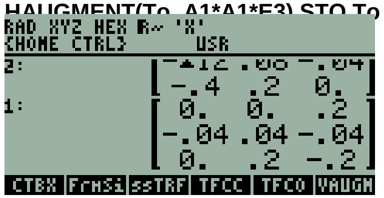
SUB(P1i, {3 1}, {3 3}) STO E3 *(Almacenamos en E3 la última columna de P1i)*

Calculamos $T_o=[e_3, A_{aa}e_3, A^2_{aa}e_3]$ a partir de E3 y A1

E3 STO To *(Almacenamos en To la matriz de transformación FCO)*

HAUGMENT(To, A1*E3) STO To

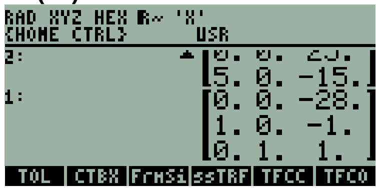
HAUGMENT(To, A1*A1*E3) STO To



Comprobamos la transformación de estado:

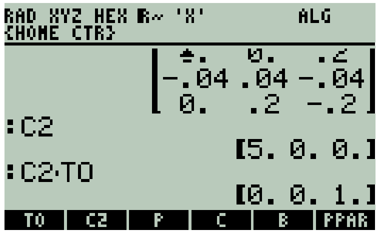
$\tilde{A}_{aa} = To^{-1} * Aaa * To$

INV(To)*A1*To STO A2 *(Almacenamos en A2 la matriz transformada)*



$\tilde{C}_a = Ca * To$

C1*To STO C2 *(Almacenamos en C2 la matriz transformada)*



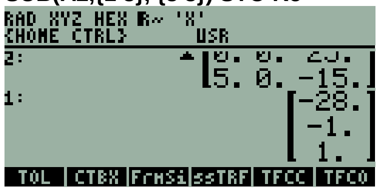
$P_{Aaa}=z^3-z^2+z+28$ Polinomio característico del susbsistema controlable y observable

Polinomio deseado para el observador: polos en z=0 ya que tiene que ser más rápidos que el sistema observado y nos piden ubicar el máximo número de polos en el origen, y los polos del observador aparecen directamente en el sistema realimentado.

$P_{Aaa-KoCa}=z^3$

$\tilde{K}_o = [(\alpha_0 - a_0) \quad (\alpha_1 - a_1) \quad (\alpha_2 - a_2)]^T$ Siendo los $\alpha_i = 0$. Por tanto corresponde a la última columna de $\tilde{A}_{aa}$

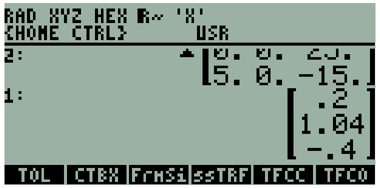
SUB(A2,{1 3}, {3 3}) STO Ko



Deshacemos el cambio de base $Ko = To * \tilde{K}o$

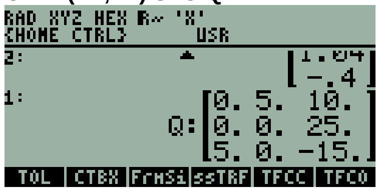
To*Ko STO Ko *(Almacenamos en Ko la ganancia del observador)*

Campus de Elche. Avda. del Ferrocarril s/n – 03202 ELCHE



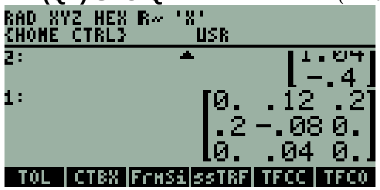
<u>2.b Cálculo del Regulador</u>
Pasamos a la Forma Canónica Controlable:
Calculamos la matriz de controlabilidad -> $Q_a = \begin{bmatrix} B_a & A_{aa} * B_a & A_{aa}{}^2 * B_a \end{bmatrix}$

CTRB(A1,B1) STO Q1 *(Almacenamos en Q1 la matriz de controlabilidad)*



La invertimos: Q_a^{-1}

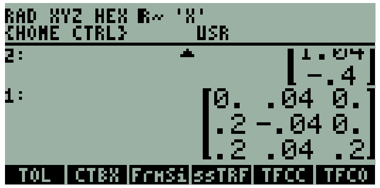
INV(Q1) STO Q1i *(Almacenamos en Q1i la matriz de controlabilidad inversa)*



Extraemos la última fila (e_3^T)
SUB(Q1i, {1 3}, {3 3}) STO E3 *(Almacenamos en E3 la última fila de Q1i)*

Calculamos $Tc^{-1} = \begin{bmatrix} e_3{}^T \\ e_3{}^T * A_{aa} \\ e_3{}^T * A_{aa}{}^2 \end{bmatrix}$ a partir de E3 y A1

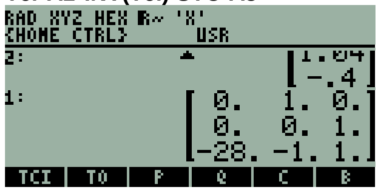
E3 STO Tci *(Almacenamos en Tci la inversa de la matriz de transformación FCO)*
VAUGMENT(Tci, E3*A1) STO Tci
VAUGMENT(Tci, E3*A1*A1) STO Tci



Comprobamos la transformación de estado:

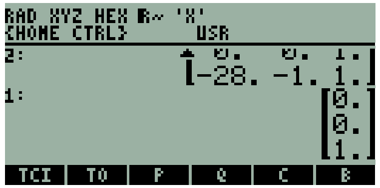
$\tilde{A}_{aa} = Tc^{-1} * Aaa * Tc$

Tci*A1*INV(Tci) STO A3 *(Almacenamos en A3 la matriz transformada)*



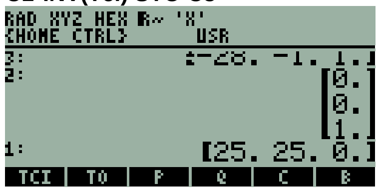
$\tilde{B}_a = Tc^{-1} Ba$

Tci*B1 STO B3 *(Almacenamos en B3 la matriz transformada)*



$\tilde{C}_a = Ca * Tc$

C1*INV(Tci) STO C3 *(Almacenamos en C3 la matriz transformada)*



$P_{Aaa} = z^3 - z^2 + z + 28$ Polinomio característico del susbsistema controlable y observable

Polinomio deseado para el sistema realimentado: polos en z=0 ya que nos piden ubicar el máximo número de polos en el origen.

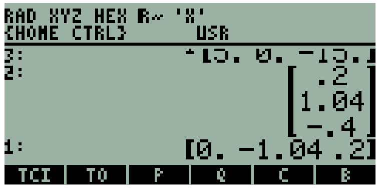
$P_{Aaa-BaKc} = z^3$

$\tilde{K}_c = [(\alpha_0 - a_0) \quad (\alpha_1 - a_1) \quad (\alpha_2 - a_2)]$ Siendo los $\alpha_i = 0$. Por tanto corresponde a la última fila de $\tilde{A}_{aa}$

SUB(A2,{3 1}, {3 3}) STO Kc

Deshacemos el cambio de base $Kc = \tilde{K}c * Tc^{-1}$

Kc*Tci STO Kc *(Almacenamos en Kc la ganancia delregulador)*



3. Representación gráfica del sistema de control: (0.5 puntos)