EXAMEN DE SISTEMAS ELECTRÓNICOS DE CONTROL

Diciembre 2001

SOLUCIÓN

Problema 2

Para el sistema indicado en la figura formado por:

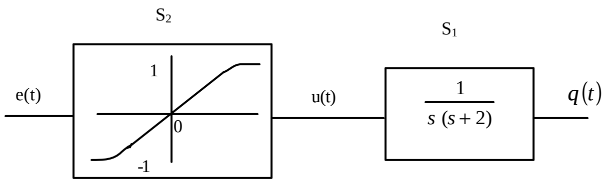
- Un sistema lineal S1 que representa un motor de corriente continua controlado por tensión de inducido, con función de transferencia:

$$G(s) = \frac{1}{s\,(s+2)}$$

- Un amplificador no lineal S2 con saturación, representado por la siguiente ecuación:

$$u(t) = \left(1 - e^{-K|e(t)|}\right)\cdot SGN(e(t))$$
$$SGN(e(t)) = \begin{cases} +1 & e(t) \geq 0 \\ -1 & e(t) < 0 \end{cases}$$

El comportamiento es prácticamente lineal en el origen pero según nos alejamos la señal se va atenuando según una exponencial.



Se pide:

a) **Obtener el modelo de estado continuo del sistema lineal S indicado anteriormente considerando como variables de estado las variables *x1* (posición angular del eje del motor) y *x2* (velocidad de giro del motor).**

Para las variables de estado indicadas y la función de transferencia del sistema S1 tenemos:

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad \dot{x}_2 = -2\,x_2 + u(t)$$

De forma matricial:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

b) **Obtener el modelo de estado <u>no lineal</u> del sistema completo incluyendo el amplificador con saturación S 1 y el motor S2. (<u>El modelo debe estar en términos de las constantes indicadas sin sustituir su valor</u>)**

La ecuación del amplificador es estática (la salida no depende de valores de la salida o la entrada en instantes anteriores) por lo que no introduce ninguna dinámica. Sustituimos el valor de u(t) en la ecuación de estado anterior y obtenemos el modelo no lineal.

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -2\,x_2 + \left(1 - e^{-K|e(t)|}\right)\cdot SGN(e(t))$$
$$y = x_1$$

c) **A partir del modelo no lineal anterior obtener el modelo de estado linealizado entorno al punto de consigna e_0. Datos**:

$e_0=2$

K=0.5

Aplicamos la formula de linealización entorno al punto de consigna. El signo de *e(t)* entorno a este punto lo consideramos positivo al ser $e_0>0$.

$$\Delta\dot{x}(t) = \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_0 \Delta x_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_0 \Delta x_2 + \left.\frac{\partial f}{\partial e}\right|_0 \Delta e$$
$$\Delta y(t) = \Delta x_1$$

$$\begin{bmatrix}\Delta\dot{x}_1\\ \Delta\dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ -K\,e^{-K|e0|}\end{bmatrix}\Delta e(t)$$

Sustituyendo valores

$$\begin{bmatrix}\Delta\dot{x}_1\\ \Delta\dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ -0.184\end{bmatrix}\Delta e(t)$$
$$\Delta y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\Delta x(t)$$

d) **Considerando que sólo es conocida la salida y la entrada del sistema, diseñar un control por realimentación del estado de forma que el sistema, ante entrada en escalón unitario, presente una <u>sobreoscilación máxi</u>ma del 21<u>%</u> y su <u>tiempo de establecimiento</u> sea aproximadamente <u>3,14 segundos</u>**.

Dibujar, asimismo, el diagrama de bloques del conjunto diseñado, indicando flujos monovariables (trazo simple) o multivariables (trazo doble) según proceda.

En primer lugar se debe comprobar que el sistema no cumple las especificaciones dinámicas impuestas.

<u>Cálculo de los polos deseados a partir de las especificaciones de diseño</u>

Pico de sobreoscilación (21%):

$$M_p = e^{-\frac{z \cdot p}{\sqrt{1-z^2}}} \cdot 100 = e^{-\frac{p}{\tan J}} \cdot 100 = 21 \Rightarrow -\frac{p}{\tan J} = \ln 0.1 = -1.56$$

$$J = 63.43°, \quad z = \cos J = 0.447$$

Tiempo de establecimiento ≈ 3.14 seg

$$t_s \approx \frac{p}{s} \rightarrow s = 1$$

Por tanto los polos del sistema se encuentran en:

$$s_{1,2} = -s \pm j w_d = -1 \pm j2$$

<u>Cálculo de los polos del sistema actual</u>

$$\det(sI - A) = s(s+2)$$

Como puede comprobarse no se cumplen las especificaciones de diseño.

Por lo tanto será necesario diseñar un control por realimentación del estado para fijar los polos en la ubicación deseada.

<u>Análisis de *Controlabilidad*</u>:

Para poder implantar un control por realimentación del estado, el sistema debe ser controlable. Si el sistema no fuera controlable, su comportamiento sería independiente de la entrada, por lo que no sería modificable a pesar de realizar una realimentación del estado sobre ella.

Como es conocido, para saber si un sistema lineal e invariante en el tiempo es controlable, únicamente hay que comprobar que el rango de la matriz de controlabilidad ***Q*** coincida con el orden del sistema:

$$Q = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.184 \\ -0.184 & 0.368 \end{bmatrix} \rightarrow rango = 2$$

$$cond(Q) \approx 5.8$$

Por tanto el sistema es controlable con la matriz Q bien condicionada.

<u>Análisis de *Observabilidad* :</u>

Puesto que sólo es conocida la salida y la entrada al sistema, no es posible realimentar las variables de estado directamente, por lo que será necesario diseñar un observador del estado para estimar su valor. Para poder estimar las variables de estado el sistema debe ser observable. Para saber si un sistema lineal e invariante en el tiempo es observable, hay que comprobar que el rango de la matriz de observabilidad ***P*** coincida con el orden del sistema:

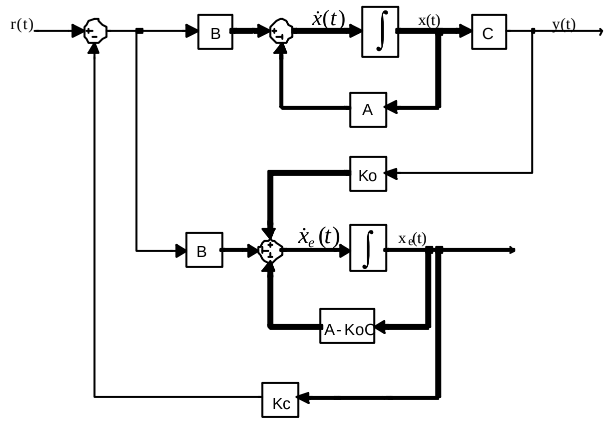
$$P = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow rango = 2, \quad cond(P) = 1$$

Por tanto el sistema es observable.

<u>Esquema de control</u>

El esquema de control propuesto incluye:

- la realimentación del estado para el ajuste del régimen transitorio
- Un observador para estimar el valor del vector de estado



<u>Diseño del observador</u>

Para diseñar el observador se va a calcular la matriz de transformación a la forma canónica observable:

$$x(k) = T_o \tilde{x}(k)$$

Esta matriz se calcula a partir de la matriz de observabilidad:

Campus de Elche. Avda. del Ferrocarril s/n – 03202 ELCHE

$$P=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\rightarrow P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e_1 & e_2\end{bmatrix}$$

$$T_o=\begin{bmatrix}e_2 & Ae_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\rightarrow T_o^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

Se realiza la transformación a forma canónica observable:

$$\tilde{A}_o=T_o^{-1}AT_o \quad \tilde{B}_o=T_o^{-1}B \quad \tilde{C}_o=CT_o$$

Obteniéndose las siguientes matrices:

$$\tilde{A}_o=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix} \qquad \tilde{B}_o=\begin{bmatrix}-0.184\\ 0\end{bmatrix} \qquad \tilde{C}_o=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$$

Como se observa la última columna de la matriz A_o está formada por los coeficientes del polinomio característico cambiados de signo, tal como corresponde a la forma canónica observable.

A continuación se va a calcular K_o situando los polos del observador de forma que no afecten a la dinámica del sistema. Por tanto se situarán los dos polos alejados de los polos dominantes del sistema (10 veces la parte real del polo dominante con menor cte de tiempo, que en el caso del sistema original es -2). De modo que el polinomio característico deseado en el observador será:

$$f(s)=(s+20)^2=s^2+40s+400$$

$\tilde{K}_o$ (forma canónica observable) se calcula ajustando los polos de la matriz de estado del observador:

$$\tilde{A}_o-\tilde{K}_o\tilde{C}_o=\begin{bmatrix}0 & 0-\tilde{k}_{o1}\\ 1 & -2-\tilde{k}_{o2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -400\\ 1 & -40\end{bmatrix}$$

De aquí se deduce:

$$\tilde{K}_o=\begin{bmatrix}\tilde{k}_{o1}\\ \tilde{k}_{o2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}400\\ 38\end{bmatrix}$$

Por lo tanto la matriz K_o (pasando a la representación de estado original) es:

$$\boxed{K_o=T_o\tilde{K}_o=\begin{bmatrix}38\\ 324\end{bmatrix}}$$

Diseño de la matriz de realimentación del estado

Para diseñar la matriz de realimentación del estado se va a calcular la matriz de transformación a forma canónica controlable:

$$x(k)=T_c\tilde{x}_c(k)$$

Esta matriz se calcula a partir de la matriz de controlabilidad:

$$Q^{-1}=\begin{bmatrix}-10.8695 & -5.43478\\ -5.43478 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e_1^T\\ e_2^T\end{bmatrix}$$

$$T_c^{-1}=\begin{bmatrix}e_2^T\\ e_2^T A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5.43478 & 0\\ 0 & -5.43478\end{bmatrix}\rightarrow T_c=\begin{bmatrix}-0.184 & 0\\ 0 & -0.184\end{bmatrix}$$

Se realiza la transformación a forma canónica controlable:

$$\tilde{x}_c(k+1)=T_c^{-1}AT_c\tilde{x}_c(k)+T_c^{-1}Bu(k)=\tilde{A}_c\tilde{x}_c(k)+\tilde{B}_cu(k)$$
$$y(k)=CT_c\tilde{x}_c(k)=\tilde{C}_c\tilde{x}_c(k)$$

Obteniéndose las siguientes matrices:

$$\tilde{G}_c=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix} \qquad \tilde{H}_c=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \qquad \tilde{C}_c=\begin{bmatrix}-0.184 & 0\end{bmatrix}$$

Como puede observarse la transformación es correcta.

Se va a diseñar la matriz K_c de forma que se coloquen los polos del sistema según las especificaciones dadas. Recordemos que se desea que los polos se localicen en:

$$s_{1,2}=-1\pm j2$$

Por tanto el polinomio buscado es:

$$P_{A-BKc}(s)=(s+1+j2)(s+1-j2)=s^2+2s+5$$

$\tilde{K}_c$ se calcula de la siguiente manera:

$$\tilde{A}_c-\tilde{B}_c\tilde{K}_c=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\tilde{k}_{c1} & -2-\tilde{k}_{c2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -5 & -2\end{bmatrix}$$

De aquí se deduce:

$$\tilde{K}_c=\begin{bmatrix}\tilde{k}_{c1} & \tilde{k}_{c2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 0\end{bmatrix}$$

Por lo tanto la matriz K_c es:

$$K_c=\tilde{K}_cT_c^{-1}=\begin{bmatrix}-27.1739 & 0\end{bmatrix}$$