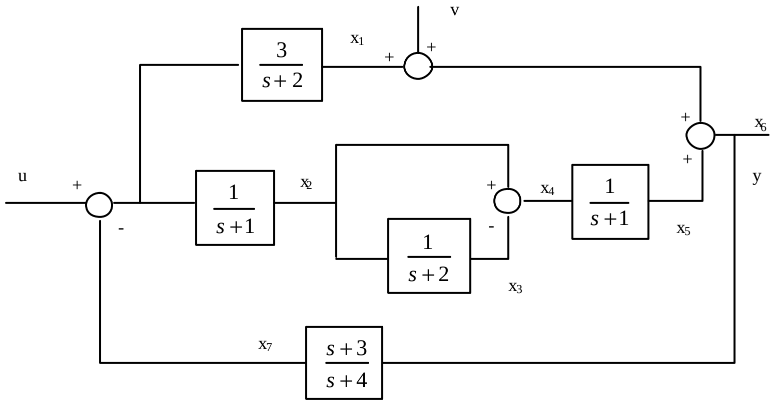
EXAMEN DE SISTEMAS ELECTRÓNICOS DE CONTROL

(2ª Parte) Junio 2002

SOLUCIÓN

Problema 1



Para el sistema representado por el diagrama de bloques indicado, se pide:

a) Razonar brevemente si pueden ser variables de estado por separado las variables: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7.

(0,5 puntos)

- x_1 si puede ser variable de estado ya que corresponde a la salida de un integrador.
- x_2 si puede ser variable de estado ya que corresponde a la salida de un integrador.
- x_3 si puede ser variable de estado ya que corresponde a la salida de un integrador.
- x_4 si puede ser variable de estado ya que es una combinación lineal de variables de estado.
- x_5 si puede ser variable de estado ya que corresponde a la salida de un integrador.
- x_6 no puede ser variable de estado ya que puede variar bruscamente ante un cambio brusco en **v**
- x_7 no puede ser variable de estado ya que puede variar bruscamente ante un cambio brusco en **v** (mismo orden del numerador y del denominador de la función de transferencia directa)

b) Razonar brevemente si pueden ser variables de estado en conjunto las variables siguientes: (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5).

(1punto)

x_4, no puede formar un vector de estado junto a x_2, x_3 ya que es una combinación lineal de ambas y el vector de estado solo debe contener la mínima información que describa completamente el sistema

c) Obtener el modelo de estado utilizando, como variables de estado, el mayor número posible de las variables indicadas (x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7).

(2puntos)

El sistema está formado por 5 bloques de orden uno por lo que el número total de variables de estado del sistema será 5. Escogeremos una variable asociada a cada bloque. Tomaremos las siguientes variables:

- x_1 y x_2 correspondientes a los dos primeros bloques.
- x_4 correspondiente al tercer bloque.
- x_5 correspondiente al cuarto bloque
- Dado que x_7 no puede ser variable de estado debemos escoger una nueva variable de estado correspondiente al quinto bloque (realimentación). Utilizaremos para ello el método sistemático a partir de la función de transferencia:

Del bloque **X_7(s)/X_6(s)** tenemos:

$$s\,x_7 + 4\,x_7 = s\,x_6 + 3\,x_6 \Rightarrow s\,\underbrace{(x_7 - x_6)}_{x_8} = 3\,x_6 - 4\,x_7$$

siendo: $x_6 = x_1 + x_5 + v$

Obtenemos:

$$\dot{x}_8 = 3\,x_6 - 4\,x_7 \quad ; \quad x_8 = x_7 - x_6 \Rightarrow x_7 = x_8 + x_6 = x_8 + x_1 + x_5 + v$$

$$\dot{x}_8 = 3\,x_6 - 4x_6 - 4x_8 = -x_6 - 4x_8 = -x_1 - x_5 - 4x_8 - v$$

$$\boxed{\dot{x}_8 = -x_1 - x_5 - 4x_8 - v}$$

Del bloque **X_1(s)/(U(s)-X_7(s))** tenemos:

$$s\,x_1 + 2\,x_1 = 3u - 3\,x_7 = 3u - 3x_8 - 3x_1 - 3x_5 - 3v$$

Obtenemos:

$$\boxed{\dot{x}_1 = -5\,x_1 - 3\,x_5 - 3\,x_8 + 3u - 3v}$$

Del bloque **X_2(s)/(U(s)-X_7(s))** tenemos:

$$s\,x_2 + x_2 = u - x_7 = u - x_8 - x_1 - x_5 - v$$

Obtenemos:

$$\boxed{\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - x_5 - x_8 + u - v}$$

Para obtener la ecuación de estado correspondiente a X_4 vamos a obtener el bloque equivalente del sumador:

Tenemos que $\dfrac{x_4(s)}{x_2(s)} = 1 - \dfrac{1}{s+2} = \dfrac{s+1}{s+2}$

Del bloque **$X_4(s)/X_2$** tenemos:

$$s\,x_4 + 2x_4 = s\,x_2 + x_2$$
$$\dot{x}_4 = -x_1 - x_2 - x_5 - x_8 + u - v + x_2 - 2x_4 = -x_1 - 2x_4 - x_5 - x_8 + u - v$$

Obtenemos:

$$\boxed{\dot{x}_4 = -x_1 - 2x_4 - x_5 - x_8 + u - v}$$

Del bloque **$X_5(s)/X_4(s)$** tenemos:

$$s\,x_5 + x_5 = x_4$$

$$\boxed{\dot{x}_5 = x_4 - x_5}$$

La salida vendría dada por:

$$\boxed{y = x_6 = x_1 + x_5 + v}$$

De forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$$
$$y(t) = C\,x(t) + Du(t)$$

d) Razonar si son controlables con la entrada ($\boldsymbol{u}$) las siguientes variables de estado:

d.1) (x_1, x_2)

Plantemos la matriz de controlabilidad utilizando solo la entrada $\boldsymbol{u}$:

$$Q = \begin{bmatrix} b_1 & Ab_1 & A^2b_1 & A^3b_1 & A^4b_1 \end{bmatrix}$$

$$Q_u = \begin{bmatrix} 3 & -15 & 81 & -465 & 2763 \\ 1 & -4 & 21 & -122 & 733 \\ 1 & -5 & 27 & -155 & 921 \\ 0 & 1 & -6 & 33 & -188 \\ 0 & -3 & 26 & -179 & 1148 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_8 \end{matrix}, \quad rango(Q_u) = 3$$

Por lo tanto el sistema no es controlable siendo el subespacio controlable de dimensión 3.

Ya que no nos piden ubicar todas las variables de estado debemos comprobar si cada una de las parejas de variables constituye por si solas parte del subespacio controlable.

Teniendo en cuenta que tal como se construye la matriz $\boldsymbol{Q}$ cada fila corresponde a cada una de las variables/ecuación de estado, extraeremos aquellas filas correspondientes a las dos variables de estado consideradas y comprobamos el rango del nuevo subsistema (dimensión 2). Formamos de esta forma un subsistema reducido con su matriz de controlabilidad:

$$Q_{u,x1,x2} = \begin{bmatrix} 3 & -15 & 81 & -465 & 2763 \\ 1 & -4 & 21 & -122 & 733 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}, \quad rango(Q_{u,x1,x2}) = 2$$

Por lo tanto las variables (x_1, x_2) son controlables por separado utilizando la entrada ***u***. Evidentemente el resto de variables de estado estarán ligadas al ser el sistema completo no controlable.

d.2) (x_1, x_4)

Igual que el caso anterior, formamos el subsistema reducido con su matriz de controlabilidad:

$$Q_{u,x1,x4} = \begin{bmatrix} 3 & -15 & 81 & -465 & 2763 \\ 1 & -5 & 27 & -155 & 921 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_4 \end{matrix}, \quad rango(Q_{u,x1,x4}) = 1$$

Por lo tanto las variables (x_1, x_4) no son controlables de forma independiente ya que el sistema reducido no es controlable.

(2puntos)

e) Razonar si son controlables con las dos entradas entrada (***u*, *v***) las siguientes variables de estado: (x_1, x_4)

Planteamos la matriz de controlabilidad completa utilizando las dos entradas (***u.v***):

$$Q=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B & A^3B & A^4B\end{bmatrix}$$

$$Q=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}3 & -3 & -15 & 18 & 81 & -108 & -465 & 654 & 2763 & -3984\\ 1 & -1 & -4 & 5 & 21 & -29 & -122 & 175 & 733 & -1067\\ 1 & -1 & -5 & 6 & 27 & -36 & -155 & 248 & 921 & -1328\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -6 & 7 & 33 & -43 & -188 & 261\\ 0 & -1 & -3 & 7 & 26 & -45 & -179 & 281 & 1148 & -1735\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}x_1\\ x_2\\ x_4,\\ x_5\\ x_8\end{array}\quad rango(Q)=3$$

Como podemos observar la dimensión del subespacio controlable sigue siendo la misma por lo que podemos concluir que la segunda entrada ***v*** no aporta controlabilidad al sistema.

Anteriormente vimos que la pareja (x_1, x_4) no era controlable con la entrada u por lo que tampoco será controlable utilizando las dos entradas ***(u,v)***.

(1 punto)

f) Obtener las ecuaciones de estado del susbsistema controlable y observable.

(3 puntos)

Dado que la segunda entrada no influye en la controlabilidad del sistema tomaremos la base del subespacio controlable a partir de las columnas linealmente independientes de $\boldsymbol{Q_u}$.

Base del subespacio Controlable (BSC): $\begin{bmatrix}3\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}15\\-4\\-5\\1\\-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}81\\21\\27\\-6\\26\end{bmatrix}$

Matriz de observabilidad:

$$P=\begin{bmatrix}C\\ CA\\ CA^2\\ CA^3\\ CA^4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -5 & 0 & 1 & -4 & -3\\ 27 & 0 & -6 & 21 & 26\\ -155 & 0 & 33 & -122 & -179\\ 921 & 0 & -188 & 733 & 1148\end{bmatrix}\Rightarrow rango(P)=3$$

Por tanto tenemos solamente tres filas linealmente independientes (p.e. las tres primeras). La dimensión del subespacio No Observable es 2

Base del subespacio No Observable (BSNO):

$$P\ x=0\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -5 & 0 & 1 & -4 & -3\\ 27 & 0 & -6 & 21 & 26\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\end{bmatrix}=0\Rightarrow\begin{matrix}v_1+v_4=0\\ -5v_1+v_3-4v_4-3v_5=0\\ 27v_1-6v_3+21v_4+26v_5=0\end{matrix}\Rightarrow v_1=-v_4$$

$$\begin{matrix}+5v_4+v_3-4v_4-3v_5=0\\ -27v_4-6v_3+21v_4+26v_5=0\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}v_1=-v_4\\ v_3+v_4-3v_5=0\\ -6v_3-6v_4+26v_5=0\end{matrix}$$

Tenemos 5 incógnitas y tres ecuaciones por lo que tenemos 2 grados de libertad que corresponden a los dos vectores de la base. De las ecuaciones anteriores tenemos que v_2 no aparece en ninguna y por tanto no está restringida. Por tanto, v_2 será una variable libre. Como segunda variable libre tomaremos v_1. Vamos a probar valores sencillos que generen vectores no nulos. Por ejemplo:

$$Para\ :v_1=0, v_2=1\Rightarrow\begin{matrix}v_1=-v_4=0\\ v_3=3v_5\\ -18v_5+26v_5=0\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}v_1=v_3=v_4=v_5=0\\ v_2=1\end{matrix}$$

$$Para\ :v_1=1, v_2=0\Rightarrow\begin{matrix}v_4=-1\\ v_3-3v_5=1\\ -6v_3+26v_5=-6\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}v_3=3v_5+1\\ -6-18v_5+26v_5=-6\\ v_5=0\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}v_1=1\\ v_2=0\\ v_3=1\\ v_4=-1\\ v_5=0\end{matrix}$$

$$BSNO\equiv\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

Matriz de transformación:

$$T=\begin{bmatrix}T_1 & T_2 & T_3 & T_4\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{T_2}$: intersección BSC y BSNO => **No existe**, los vectores de ambas bases son linealmente independientes

$$\begin{vmatrix}3 & -15 & 81 & 0 & 1\\ 1 & -4 & 21 & 1 & 0\\ 1 & -5 & 27 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -6 & 0 & -1\\ 0 & -3 & 26 & 0 & 0\end{vmatrix}\neq 0\ \Rightarrow linealmente\quad independientes$$

Campus de Elche. Avda. del Ferrocarril s/n – 03202 ELCHE

$\mathbf{T_1}$: Junto con $\mathbf{T_2}$ debe ser BSC => $\begin{bmatrix}3\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}15\\-4\\-5\\1\\-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}81\\21\\27\\-6\\26\end{bmatrix}$

$\mathbf{T_4}$: Junto con $\mathbf{T_2}$ debe ser BSNO => $\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}$

$\mathbf{T_3}$: Completa la base del espacio de estado (No existe)

Por tanto solo existen dos subsistemas:

S1. Controlable y observable

S4. No controlable y no observable

$$T=\begin{bmatrix}3 & -15 & 81 & 0 & 1\\ 1 & -4 & 21 & 1 & 0\\ 1 & -5 & 27 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -6 & 0 & -1\\ 0 & -3 & 26 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad T^{-1}=\begin{bmatrix}-2.5625 & 0 & 8.6875 & 6.125 & 0.375\\ -1.625 & 0 & 4.875 & 3.25 & 0.75\\ -0.1875 & 0 & 0.5625 & 0.375 & 0.125\\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0\\ -0.5 & 0 & 1.5 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}=T^{-1}AT=\left[\begin{array}{ccc|cc}0 & 0 & -20 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -27 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -10 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\end{array}\right]\quad \tilde{B}=T^{-1}B=\left[\begin{array}{cc}1 & -1.375\\ 0 & -0.75\\ 0 & -0.125\\ \hline 0 & 0\\ 0 & 0\end{array}\right]\quad \tilde{C}=\left[\begin{array}{ccc|cc}3 & -14 & 75 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{c|c|cc}\tilde{A}_{11} & 0 & \tilde{A}_{13} & 0\\ \hline \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{24}\\ \hline 0 & 0 & \tilde{A}_{33} & 0\\ 0 & 0 & \tilde{A}_{43} & \tilde{A}_{44}\end{array}\right]\quad \tilde{B}=\left[\begin{array}{c}\tilde{B}_1\\ \hline \tilde{B}_2\\ \hline 0\\ 0\end{array}\right]\quad \tilde{C}=\left[\begin{array}{c|c|cc}\tilde{C}_1 & 0 & \tilde{C}_3 & 0\end{array}\right]$$

Ecuaciones del subsistema controlable y observable:

$$\begin{bmatrix}\dot{\tilde{x}}_1\\ \dot{\tilde{x}}_2\\ \dot{\tilde{x}}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -20\\ 1 & 0 & -27\\ 0 & 1 & -10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\\ \tilde{x}_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1.375\\ 0 & -0.75\\ 0 & -0.125\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}$$

$$y=\begin{bmatrix}3 & -14 & 75\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\\ \tilde{x}_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}$$

g) Representar gráficamente los diferentes subsistemas.

(0,5 puntos)