EXAMEN DE SISTEMAS ELECTRÓNICOS DE CONTROL

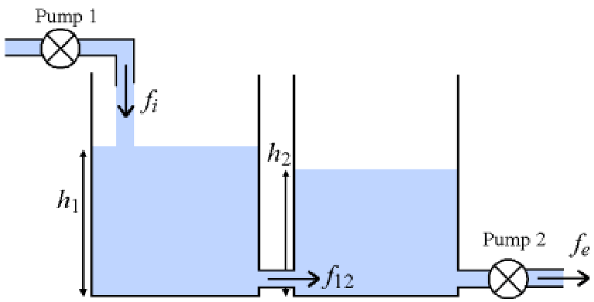
(2ª Parte) Junio 2003

SOLUCIÓN

Problema 1 (10 puntos)

La siguiente figura muestra el modelo esquemático de un sistema formado por dos depósitos acoplados de sección fija (A). El agua entra en el tanque 1 con un caudal f_i por medio de la bomba 1 (h_1 nivel de agua del tanque 1). El agua fluye del tanque 1 al tanque 2 con un caudal f_{12} (h_2 nivel de agua del tanque 2). Finalmente el agua es extraída del tanque 2 mediante la bomba 2 con un caudal f_e.

Las bombas 1 y 2 permiten controlar los caudales f_i, f_e que son regulables mediante eletroválvulas proporcionales (el caudal de salida de cada bomba es proporcional al voltaje aplicado en cada una de las entradas u_i, u_e). Solo se dispone de un sensor de nivel que permite medir h_2 (*salida*).



Las ecuaciones del modelo vienen dadas por:

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{A}\left(f_i - f_{12}\right)$$
$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{A}\left(f_{12} - f_e\right)$$
$$f_{12} = \sqrt{2g\left(h_1 - h_2\right)}$$
$$f_i = K\,u_i \qquad f_e = K\,u_e$$

$$g = 9{,}8\,m/s^2, \quad A = 4.42715\,m^2, \quad K = 4.42715\,m^3/s\cdot V$$

Se pide:

1. **Obtener el modelo de estado <u>nolineal</u> del sistema propuesto.**

(2,5 puntos)

Elegiremos como variables de estado las alturas de los dos depósitos (energía potencial acumulada). Los vectores de entrada y salida son los indicados en el enunciado.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_i \\ u_e \end{bmatrix}, \quad y = h_2$$

Obtenemos las ecuaciones de estado y salida despejando las derivas de las variables de estado a partir de las ecuaciones.

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t), u(t), t\right)$$
$$y(t) = g\left(x(t), u(t), t\right)$$

$$\dot{x}_1(t) = \frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{A}\left(f_i - f_{12}\right) = \frac{K}{A}u_i - \frac{1}{A}\sqrt{2g\left(h_1 - h_2\right)} = \frac{K}{A}u_i - \frac{\sqrt{2g}}{A}\sqrt{\left(x_1 - x_2\right)}$$
$$\dot{x}_2(t) = \frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{A}\left(f_{12} - f_e\right) = \frac{1}{A}\sqrt{2g\left(h_1 - h_2\right)} - \frac{K}{A}u_e = \frac{\sqrt{2g}}{A}\sqrt{\left(x_1 - x_2\right)} - \frac{K}{A}u_e$$
$$y(t) = x_2(t)$$

Sustituyendo los valores de las constantes:

$$\dot{x}_1(t) = -\sqrt{\left(x_1(t) - x_2(t)\right)} + u_i(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = +\sqrt{\left(x_1(t) - x_2(t)\right)} - u_e(t) \qquad\qquad nota: x_1 > x_2$$
$$y(t) = x_2(t)$$

El modelo es valido cuando la altura del depósito 1 es superior a la del depósito 2.

2. **Calcular el estado de equilibrio y obtener el modelo de estado linealizado entorno al punto de equilibrio dado por:**

(2,5 puntos)

$$f_{i0} = f_{e0} = K\,\frac{m^3}{s}$$
$$h_{10} = 5\ m$$

En el punto de equilibrio las derivadas son nulas. De la ecuación anterior obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -\sqrt{\left(x_{10} - x_{20}\right)} + u_{i0} \\ 0 &= +\sqrt{\left(x_{10} - x_{20}\right)} - u_{e0} \\ f_{i0} &= K\cdot u_{i0},\ f_{e0} = K\cdot u_{e0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x_{10} = 5\,m, \quad u_{i0} = 1 \\ \left(x_{10} - x_{20}\right) = u_{i0}^{\ 2} \end{matrix} \Rightarrow \left(x_{10} - x_{20}\right) = u_{i0}^{\ 2} \Rightarrow x_{20} = x_{10} - u_{i0}^{\ 2} = 4\,m$$

Linealizando respecto al punto de equilibrio:

$$\Delta\dot{x}(t) = \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_0 \Delta x_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_0 \Delta x_2 + \left.\frac{\partial f}{\partial u_i}\right|_0 \Delta u_i + \left.\frac{\partial f}{\partial u_e}\right|_0 \Delta u_e$$
$$\Delta y(t) = \Delta x_2$$

$$\Delta\dot{x}_1(t) = -\left.\frac{0.5}{\sqrt{(x_1 - x_2)}}\right|_0 \cdot \Delta x_1(t) + \left.\frac{0.5}{\sqrt{(x_1 - x_2)}}\right|_0 \cdot \Delta x_2(t) + \Delta u_i(t)$$
$$\Delta\dot{x}_2(t) = +\left.\frac{0.5}{\sqrt{(x_1 - x_2)}}\right|_0 \cdot \Delta x_1(t) - \left.\frac{0.5}{\sqrt{(x_1 - x_2)}}\right|_0 \cdot \Delta x_2(t) - \Delta u_e(t)$$
$$\Delta y(t) = \Delta x_2(t)$$

De forma matricial y sustituyendo los parámetros obtenemos:

$$\begin{bmatrix}\Delta\dot{x}_1(t)\\ \Delta\dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.5 & 0.5\\ 0.5 & -0.5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\Delta x_1(t)\\ \Delta x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\Delta u_i(t)\\ \Delta u_e(t)\end{bmatrix}$$
$$\Delta y(t) = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\cdot \Delta x(t)$$

3. A partir del modelo de estado linealizado anterior, calcular la evolución libre del sistema partiendo de estado:

(2,5 puntos)

$$\begin{bmatrix}\Delta h_1(0)\\ \Delta h_2(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.1\\ 0.1\end{bmatrix}$$

Para calcular la evolución libre pasamos el modelo del sistema a la forma canónica de Jordan. (a partir de aquí se considera que las variables son incrementales para simplificar la notación).

Valores propios: $|sI - A| = s^2 + 1s \;= s\cdot(s+1)$

Vectores propios: $Av_i = \lambda_i v_i$

$$[A - 0I]\cdot v_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix}-0.5 & 0.5\\ 0.5 & -0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{12}\end{bmatrix} = 0 \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$[A + 1I]\cdot v_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\ 0.5 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{21}\\ v_{22}\end{bmatrix} = 0 \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}v_{21}\\ v_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\ 0.5 & -0.5\end{bmatrix}$$

$$x = T\,\tilde{x}$$
$$\tilde{A} = T^{-1}AT \quad \tilde{B} = T^{-1}B \quad \tilde{C} = CT \quad \tilde{D} = D$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix}0.5 & -0.5\\ 0.5 & 0.5\end{bmatrix}$$
$$\tilde{C} = \begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}$$

Evolución del estado ante entrada nula:

$$\tilde{x}(t) = \tilde{\Phi}(t,t_0)\,\tilde{x}_0 \qquad \tilde{x}_0 = T^{-1}x_0 = \begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\ 0\text{-}5 & -0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.1\\ 0.1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.1\\ 0\end{bmatrix}$$
$$\tilde{\Phi}(t,t_0) = e^{\tilde{A}(t-t_0)}$$

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix}e^{0t} & 0\\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\boxed{x(t) = T\,\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.1\\ 0.1\end{bmatrix}}$$

Como se puede observar el vector de estado se mantiene constante ya que el flujo de entrada y salida en la perturbación ha sido el mismo.

4. Partiendo del estado inicial anterior, calcular la evolución de la salida cuando aplicamos un escalón unitario en la entrada u_i:

(2,5puntos)

Habrá que añadir a la evolución libre la debida a la entrada (principio de superposición):

$$\tilde{x}(t) = \tilde{\Phi}(t,t_0)\tilde{x}_0 + \int_{t_o}^{t} \tilde{\Phi}(t,\tau)\tilde{B}u(\tau)d\tau$$

$$\int_{t_o}^{t} \tilde{\Phi}(t,t)\tilde{B}u(t)dt = \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-(t-t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt =$$

$$= \int_0^t \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \cdot e^{(t-t)} \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} 0.5t \\ 0.5e^{(t-t)} \end{bmatrix}_0^t = \begin{bmatrix} 0.5 \cdot t \\ 0.5 \cdot (1-e^{-t}) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \cdot t \\ 0.5 \cdot (1-e^{-t}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 + 0.5 \cdot t \\ 0.5 \cdot (1-e^{-t}) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{x(t) = T\,\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 + 0.5 \cdot t \\ 0.5 \cdot (1-e^{-t}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 + 0.5 \cdot t - 0.5 \cdot e^{-t} \\ -0.4 + 0.5 \cdot t + 0.5 \cdot e^{-t} \end{bmatrix}}$$