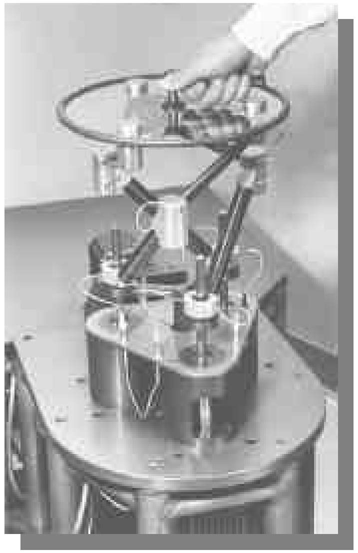
TEMA 3: HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS PARA LA LOCALIZACIÓN INDUSTRIAL

Ingeniería de Sistemas y Automática
Control de Robots y Sistemas Sensoriales

Robótica Industrial

ISA.- Ingeniería de Sistemas y Automática



UNIVERSITAS Miguel Hernández

Herramientas matemáticas para la localización espacial

- Representación de la posición
- Representación de la orientación
- Matrices de transformación homogénea
- Cuaternios
- Relación y comparación entre métodos

Localización espacial

Manipulación de piezas

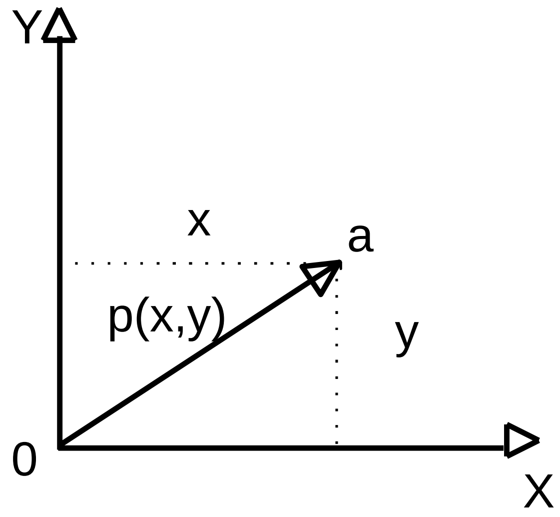
→

Movimiento espacial del extremo del robot

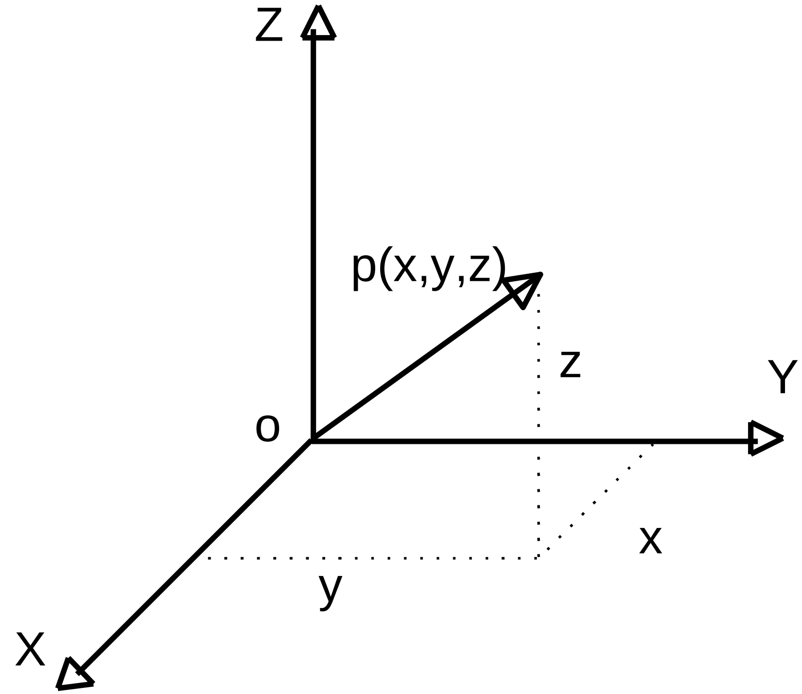
↓

Necesidad de herramientas matemáticas para especificar posición y orientación

Representación de la posición en coordenadas cartesianas

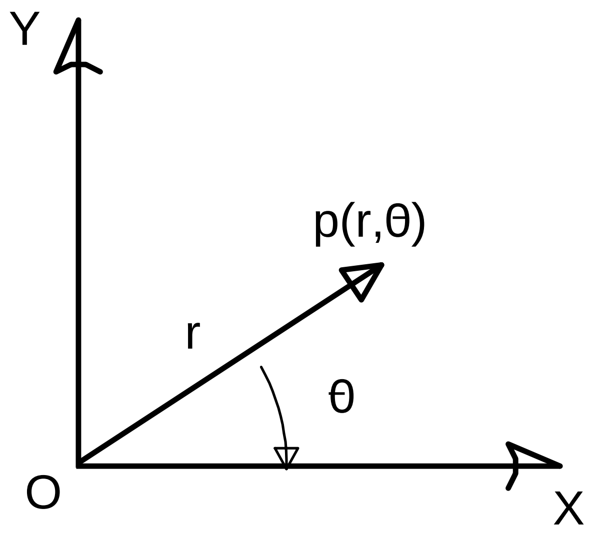


a) 2 dimensiones

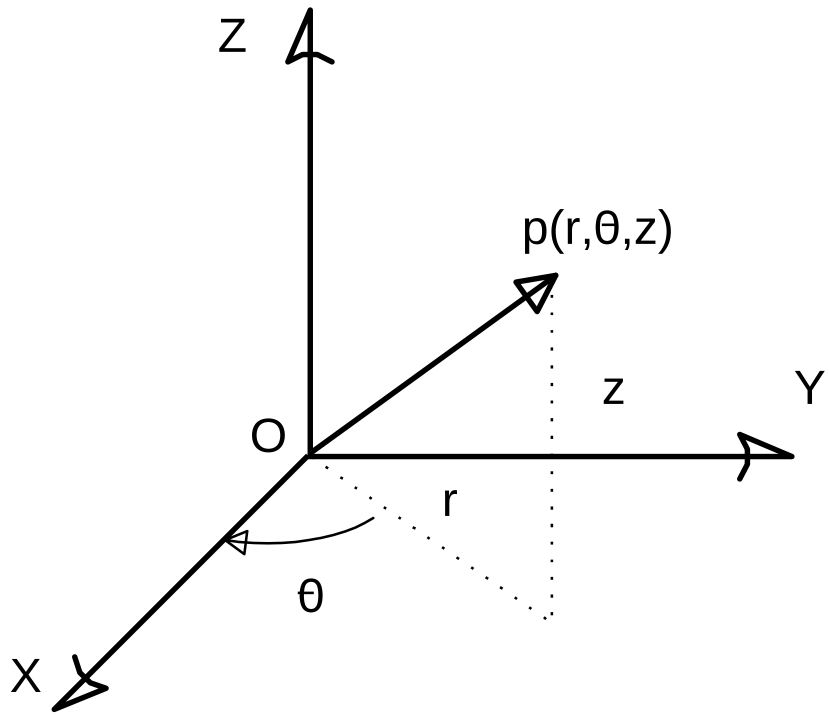


b) 3 dimensiones

Representación de la posición en coordenadas polares/cilíndricas

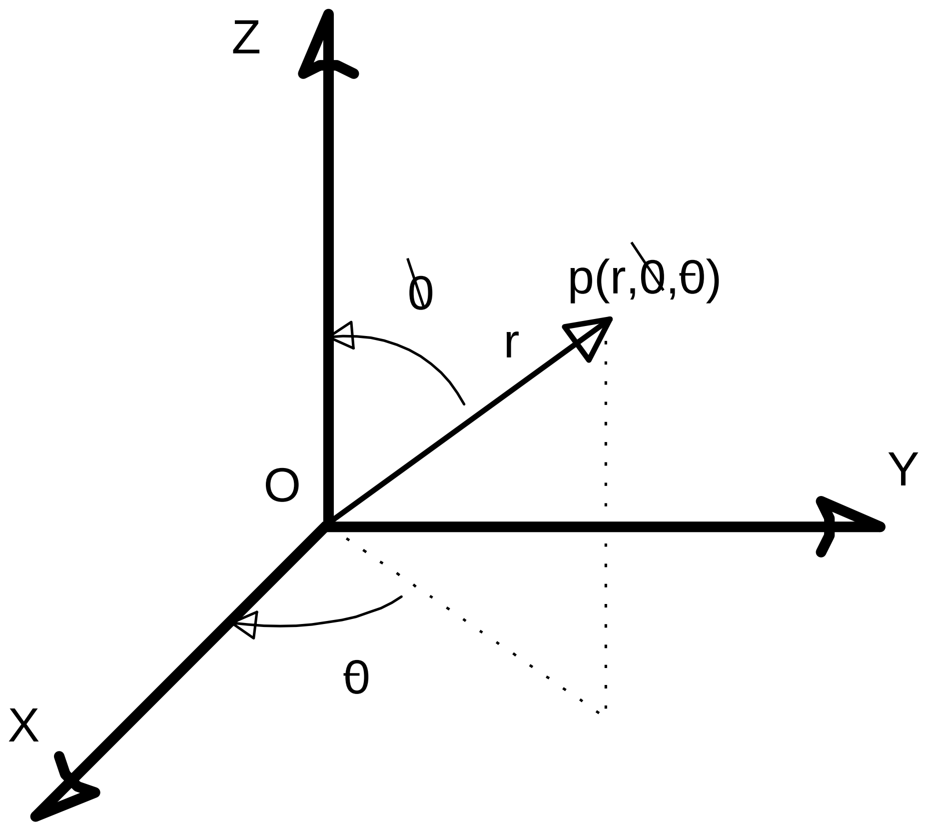


a) Polares

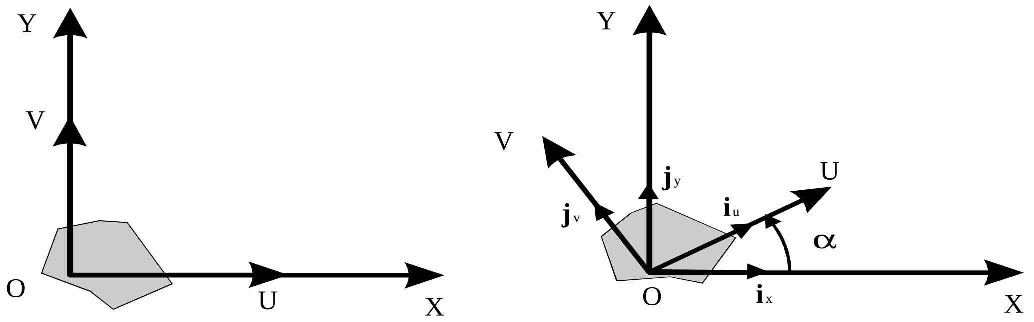


b) Cilíndricas

Representación de la posición en coordenadas esféricas



Representación de la orientación. Matrices de Rotación 2D



a) b)

$$\mathbf{p}_{xy} = \left[\mathrm{p}_x, \mathrm{p}_y\right]^T = \mathrm{p}_x \cdot \mathbf{i}_x + \mathrm{p}_y \cdot \mathbf{j}_y$$

$$\mathbf{p}_{uv} = \left[\mathrm{p}_u, \mathrm{p}_v\right]^T = \mathrm{p}_u \cdot \mathbf{i}_u + \mathrm{p}_v \cdot \mathbf{j}_v$$

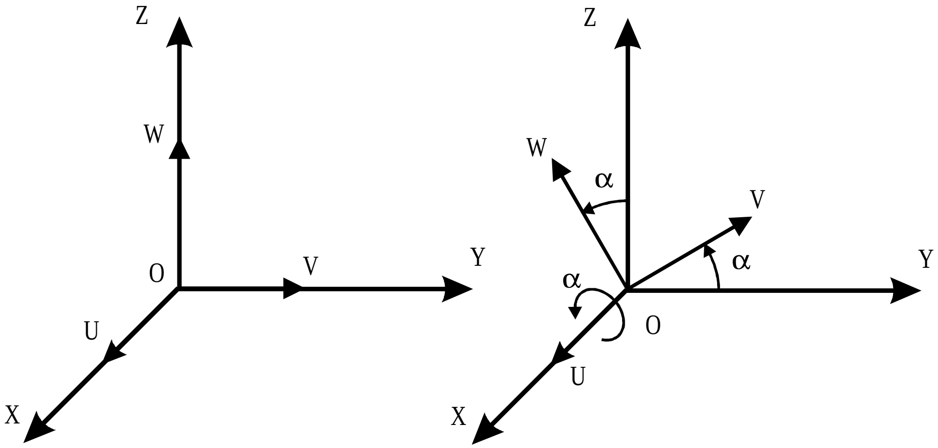
$$\begin{bmatrix} \mathrm{p}_x \\ \mathrm{p}_y \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \mathrm{p}_u \\ \mathrm{p}_v \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x \mathbf{i}_u & \mathbf{i}_x \mathbf{j}_v \\ \mathbf{j}_y \mathbf{i}_u & \mathbf{j}_y \mathbf{j}_v \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

- Una matriz de rotación es ortonormal: $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$

Representación de la orientación. Matrices de Rotación 3D (I)



a) b)

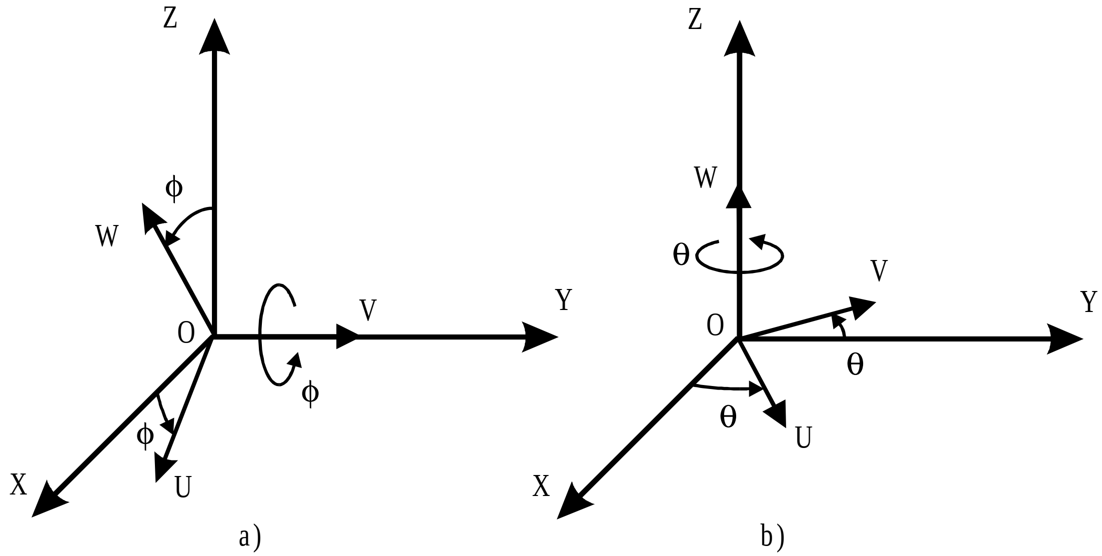
$$\mathbf{p}_{uvw} = [\, \mathrm{p}_u , \mathrm{p}_v , \mathrm{p}_w \,]^T = \mathrm{p}_u \cdot \mathbf{i}_u + \mathrm{p}_v \cdot \mathbf{j}_v + \mathrm{p}_w \cdot \mathbf{k}_w$$

$$\mathbf{p}_{xyw} = [\, \mathrm{p}_x , \mathrm{p}_y , \mathrm{p}_z \,]^T = \mathrm{p}_x \cdot \mathbf{i}_x + \mathrm{p}_y \cdot \mathbf{j}_y + \mathrm{p}_z \cdot \mathbf{k}_z$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{p}_x \\ \mathrm{p}_y \\ \mathrm{p}_z \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \mathrm{p}_u \\ \mathrm{p}_v \\ \mathrm{p}_w \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x \mathbf{i}_u & \mathbf{i}_x \mathbf{j}_v & \mathbf{i}_x \mathbf{k}_w \\ \mathbf{j}_y \mathbf{i}_u & \mathbf{j}_y \mathbf{j}_v & \mathbf{j}_y \mathbf{k}_w \\ \mathbf{k}_z \mathbf{i}_u & \mathbf{k}_z \mathbf{j}_v & \mathbf{k}_z \mathbf{k}_w \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R}(\mathbf{x}, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -sen\alpha \\ 0 & sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Representación de la orientación. Matrices de Rotación 3D (II)



$$\mathbf{R}(\mathbf{y},\phi)=\begin{bmatrix}\cos\phi & 0 & \operatorname{sen}\phi\\ 0 & 1 & 0\\ -\operatorname{sen}\phi & 0 & \cos\phi\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{z},\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Representación de la orientación. Composición de rotaciones

Orden de la composición:

❶ Rotación sobre OX
❷ Rotación sobre YO
❸ Rotación sobre OZ

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}(\mathbf{z},\theta)\mathbf{R}(\mathbf{y},\phi)\mathbf{R}(\mathbf{x},\alpha) = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\phi & 0 & S\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\phi & 0 & C\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix} =$$

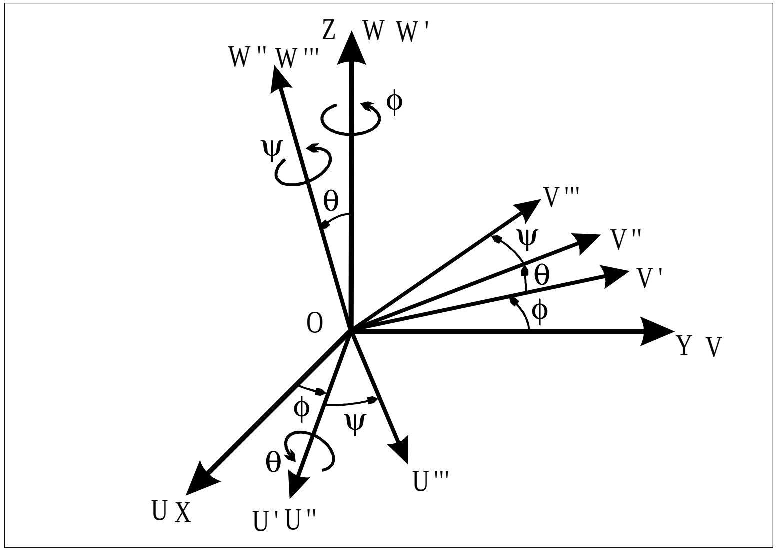
$$= \begin{bmatrix} C\theta C\phi & -S\theta C\alpha + C\theta S\phi S\alpha & S\theta S\alpha + C\theta S\phi C\alpha \\ S\theta C\phi & C\theta C\alpha + S\theta S\phi S\alpha & -C\theta S\alpha + S\theta S\phi C\alpha \\ -S\phi & C\phi S\alpha & C\phi C\alpha \end{bmatrix}$$

Representación de la orientación. Angulos de Euler

❶ Girar el sistema OUVW un ángulo ϕ con respecto al eje OZ, convirtiéndose así en el OU'V'W'.

❷ Girar el sistema OU'V'W' un ángulo θ con respecto al eje OU', convirtiéndose así en el OU''V''W''.

❸ Girar el sistema OU''V''W'' un ángulo ψ respecto al eje OW'' convirtiéndose finalmente en el OU'''V'''W'''

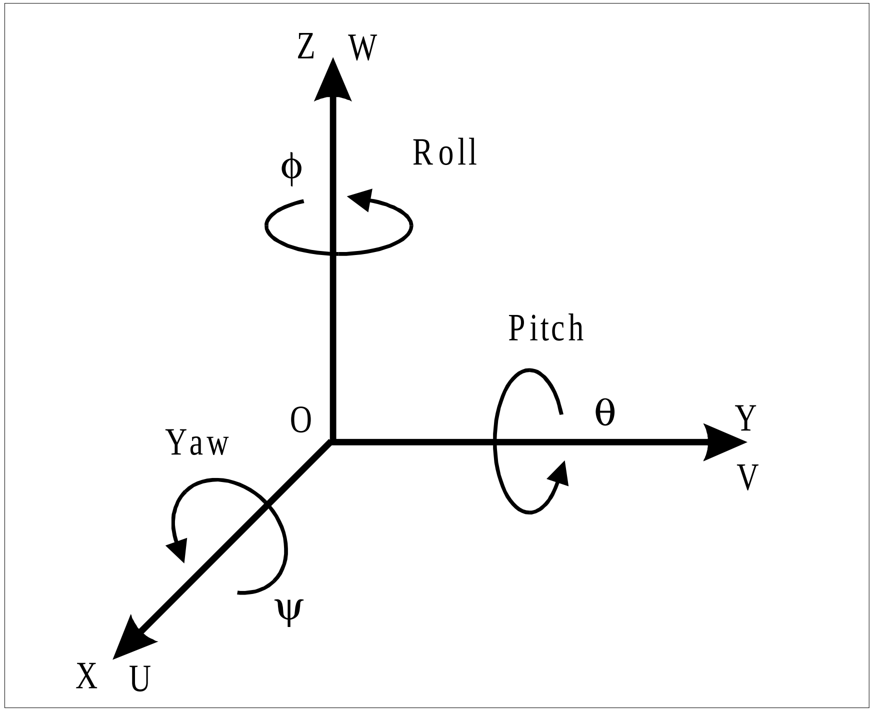


Representación de la orientación. Roll, Pitch y Yaw

❶ Girar el sistema OUVW un ángulo ψ con respecto al eje OX. (Yaw)

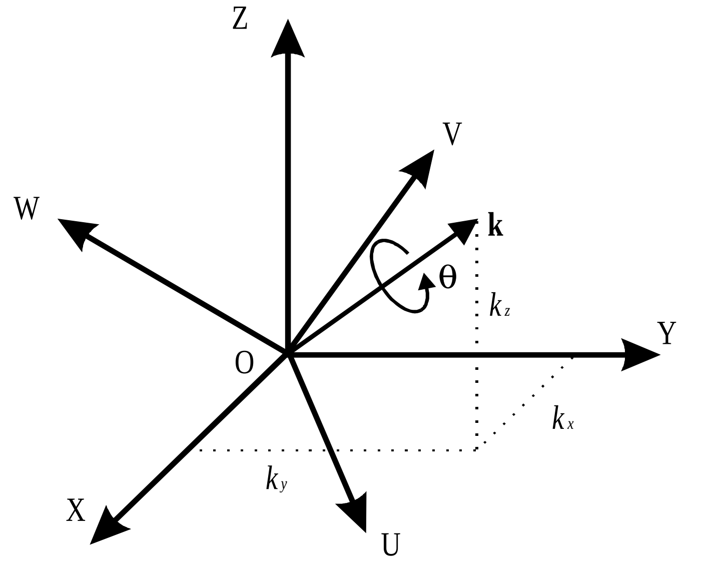
❷ Girar el sistema OUVW un ángulo θ con respecto al eje OY. (Pitch)

❸ Girar el sistema OUVW un ángulo ϕ con respecto al eje OZ. (Roll)



Representación de la orientación. Par de rotación

- Mediante la definición de un vector **k** (kx,ky.kz) y un ángulo de giro θ, tal que el sistema OUVW corresponde al sistema OXYZ girado un ángulo θ sobre el eje **k**



b)

$$\mathbf{Rot}(\mathbf{k},\theta)\,\mathbf{p} = \mathbf{p}\cos\theta - (\mathbf{k}\times\mathbf{p})\,sen\theta + \mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p})(1-\cos\theta)$$

Representación de la orientación. Cuaternios

- Alta eficiencia computacional
- Utilizados por algunos fabricantes de robots (ABB)

$$Q = [\,q_0, q_1, q_2, q_3\,] = [\,s, \mathbf{v}\,]$$

Giro de un ángulo 2 sobre el vector **k**:

$$Q = \mathbf{Rot}(\mathbf{k}, \theta) = \left(\cos\frac{\theta}{2}, \mathbf{k}\, sen\frac{\theta}{2} \right)$$

Coordenadas homogéneas

- Coordenadas de un espacio (n+1)-dimensional para representar sólidos en el espacio n-dimensional
- **p**(x,y,z) ⟶ **p**(wx,wy,wz,w) con w=factor de escala
- Vector en coordenadas homogéneas:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw \\ bw \\ cw \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Ejemplo: 2**i**+3**j**+4**k** ⟶ $[4,6,8,2]^T$ ó $[-6,-9,-12,-3]^T$
- Vector nulo:$[0,0,0,n]^T$

Matrices de transformación homogénea

- Matriz 4x4 que representa la transformación de un vector en coordenadas homogéneas de un sistema de coordenadas a otro

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3x3} & \mathbf{p}_{3x1} \\ \mathbf{f}_{1x3} & \mathbf{w}_{1x1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Rotacion & Traslacion \\ Perspectiva & Escalado \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{R}_{3x3}$: matriz de rotación
- $\mathbf{p}_{3x1}$: vector de traslación
- $\mathbf{f}_{1x3}$: transformación de perspectiva
- $\mathbf{w}_{1x1}$: escalado global (1)

Aplicación de las matrices de transformación homogénea

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3x3} & \mathbf{p}_{3x1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Rotacion & Traslacion \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

❶ Representar la posición y orientación de un sistema girado y trasladado O'UVW con respecto a un sistema fijo de referencia OXYZ., que es lo mismo que representar una rotación y traslación realizada sobre un sistema de referencia.

❷ Transformar un vector expresado en coordenadas con respecto a un sistema O'UVW, a su expresión en coordenadas del sistema de referencia OXYZ.

❸ Rotar y trasladar un vector con respecto a un sistema de referencia fijo OXYZ

Traslación con matrices homogéneas

- Matriz básica de traslación:

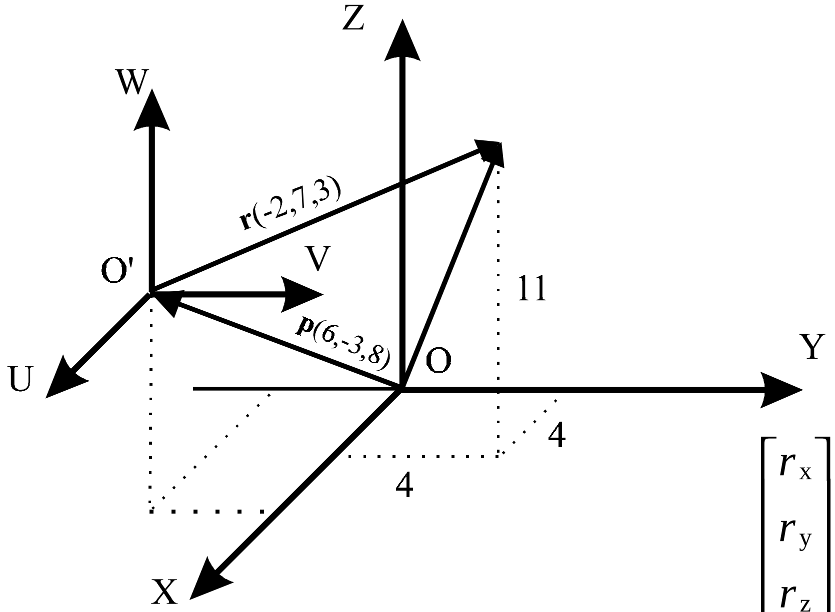
$$\mathbf{T}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Cambio de sistema de coordenadas:

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_u + p_x \\ r_v + p_y \\ r_w + p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de traslación (I)

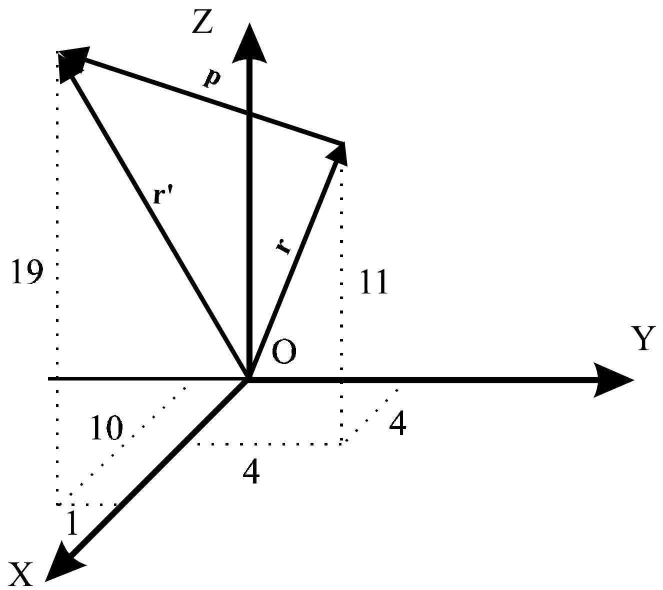
Según la figura el sistema O'UVW está trasladado un vector **p**(6,-3,8) con respeto del sistema OXYZ. Calcular las coordenadas (r_x , r_y ,r_z) del vector **r** cuyas coordenadas con respecto al sistema O'UVW son $\mathbf{r}_{uvw}$(-2,7,3)



$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de traslación (II)

- Calcular el vector $\mathbf{r}'_{xyz}$ resultante de trasladar al vector $\mathbf{r}_{xyz}(4,4,11)$ según la transformación $\mathbf{T}(\mathbf{p})$ con $\mathbf{p}(6,-3,8)$



$$\begin{bmatrix} r'_x \\ r'_y \\ r'_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 19 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotación con matrices homogéneas

- Matrices de rotación básicas:

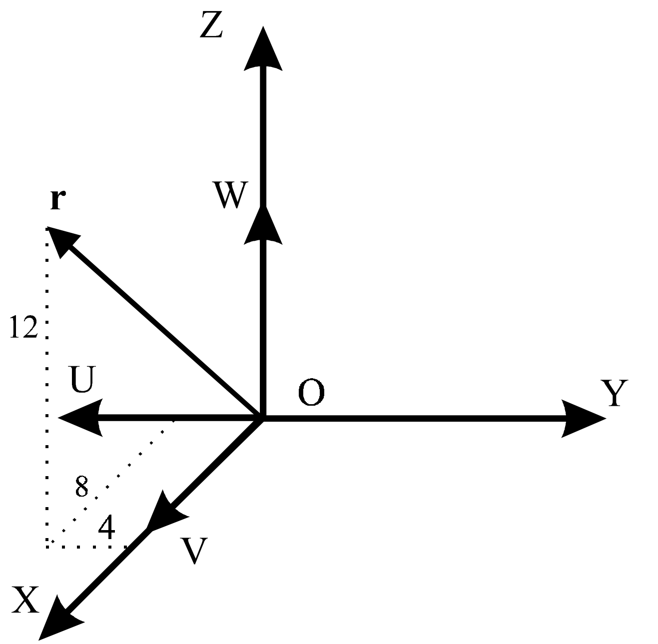
$$\mathbf{T}(\mathbf{x},\alpha)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -sen\alpha & 0 \\ 0 & sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}(\mathbf{y},\phi)=\begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \operatorname{sen}\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}(\mathbf{z},\theta)=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Cambio de sistema de coordenadas:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{r}_x \\ \mathrm{r}_y \\ \mathrm{r}_z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathrm{r}_u \\ \mathrm{r}_v \\ \mathrm{r}_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de rotación

- Según la figura el sistema OUVW se encuentra girado -90º alrededor del eje OZ con respecto al sistema OXYZ. Calcular las coordenadas del vector $\mathbf{r}_{xyz}$ si $\mathbf{r}_{uvw} = [4,8,12]^T$

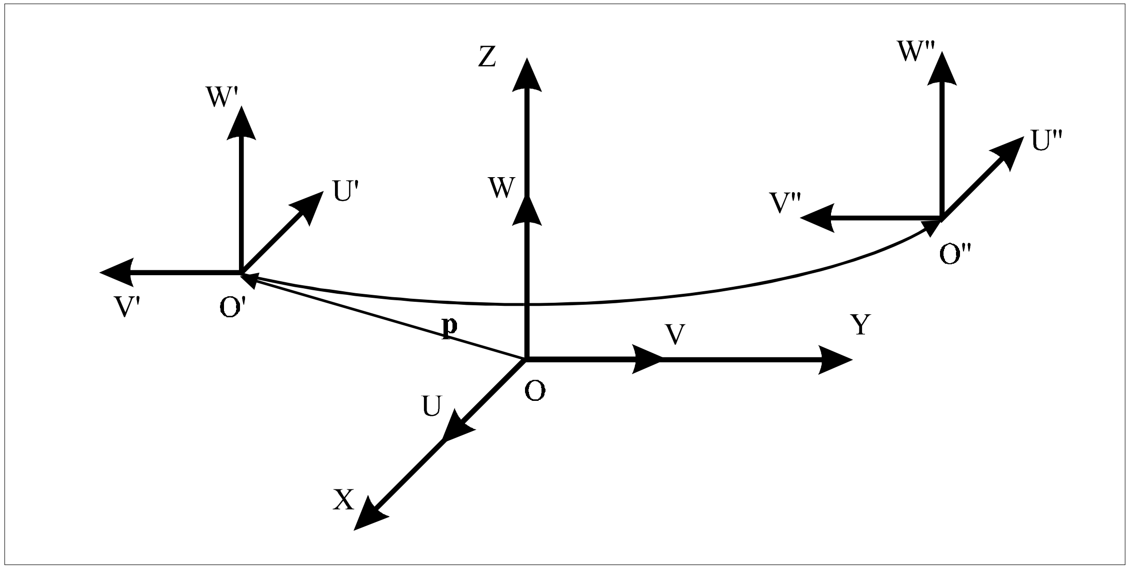


$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Combinación de rotaciones y traslaciones (I)

- Es posible combinar rotaciones y traslaciones básicas multiplicando las matrices correspondientes
- El producto **no** es conmutativo:

  rotar y trasladar $\neq$ trasladar y rotar



Combinación de rotaciones y traslaciones (II)

- Rotación seguida de traslación:

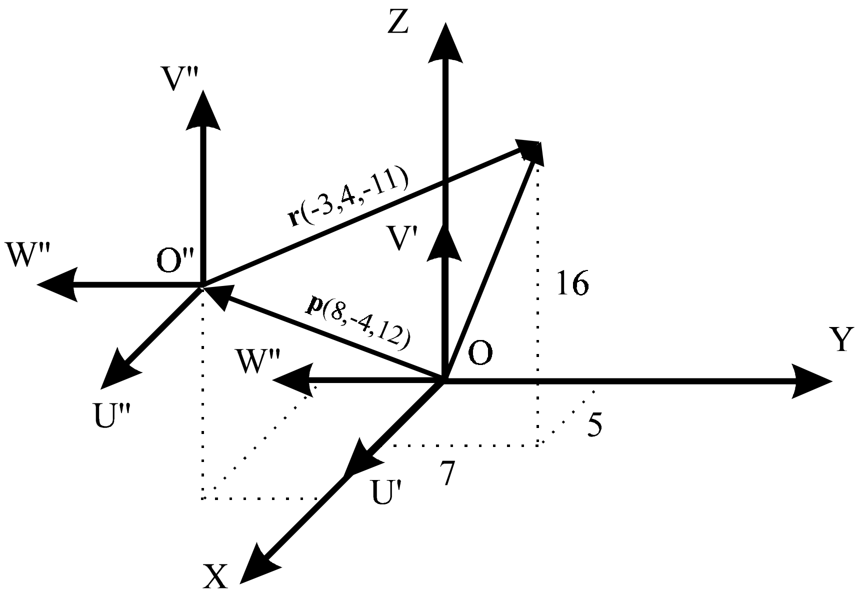
$$\mathbf{T}((\mathbf{x},\alpha),\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & \cos\alpha & -sen\alpha & p_y \\ 0 & sen\alpha & \cos\alpha & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Traslación seguida de rotación:

$$\mathbf{T}(\mathbf{p},(\mathbf{x},\alpha)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & \cos\alpha & -sen\alpha & p_y \cos\alpha - p_z\, sen\alpha \\ 0 & sen\alpha & \cos\alpha & p_y\, sen\alpha + p_z \cos\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de combinación traslación-rotación (I)

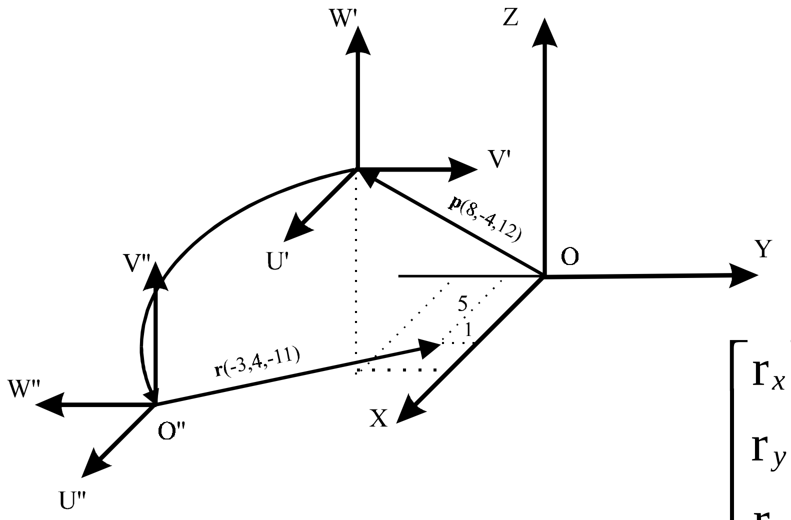
Un sistema OUVW ha sido girado 90º alrededor del eje OX y posteriormente trasladado un vector **p**(8,-4,12) con respecto al sistema OXYZ. Calcular las coordenadas (rx ,ry ,rz) del vector **r** con coordenadas $\mathbf{r}_{uvw}$ (-3,4,-11)



$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -11 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 16 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de combinación traslación-rotación (II)

Un sistema OUVW ha sido trasladado un vector **p**(8,-4,12) con respecto al sistema OXYZ y girado 90º alrededor del eje OX. Calcular las coordenadas (*r*x , *r*y , *r*z) del vector **r** de coordenadas r_{uvw} (-3,4,-11)



$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -11 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Significado geométrico de las matrices homogéneas

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{o} & \mathbf{a} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

n,o,a ➡ terna ortonormal que representa la orientación

p ➡ vector que representa la posición

$||\mathbf{n}||=||\mathbf{o}||=||\mathbf{a}||=1$

$\mathbf{n} \times \mathbf{o} = \mathbf{a}$

$[\mathbf{n}\ \ \mathbf{o}\ \ \mathbf{a}]^{-1}=[\mathbf{n}\ \ \mathbf{o}\ \ \mathbf{a}]^T$

Inversa de una matriz de transformación homogénea

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -\mathbf{n}^T\mathbf{p} \\ o_x & o_y & o_z & -\mathbf{o}^T\mathbf{p} \\ a_x & a_y & a_z & -\mathbf{a}^T\mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{xyz} = \mathbf{T}\,\mathbf{r}_{uvw} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}^{-1}\mathbf{r}_{xyz} = \mathbf{r}_{uvw}$$

Composición de matrices homogéneas

- Una transformación compleja puede descomponerse en la aplicación consecutiva de transformaciones simples (giros básicos y traslaciones)
- Una matriz que representa un giro de un ángulo α sobre el eje OX, seguido de un giro de ángulo ϕ sobre el eje OY y de un giro de un ángulo θ sobre el eje OZ, puede obtenerse por la composición de las matrices básicas de rotación

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{z},\theta)\mathbf{T}(\mathbf{y},\phi)\mathbf{T}(\mathbf{x},\alpha) = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\phi & 0 & S\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\phi & 0 & C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha & 0 \\ 0 & S\alpha & C\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C\phi C\theta & -S\theta C\alpha + C\theta S\phi S\alpha & S\theta S\alpha + C\theta S\phi C\alpha & 0 \\ S\theta C\phi & C\theta C\alpha + S\theta S\phi S\alpha & -C\theta S\alpha + S\theta S\phi C\alpha & 0 \\ -S\phi & C\phi S\alpha & C\alpha C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Criterios de composición de matrices homogéneas

❶ Si el sistema fijo OXYZ y el sistema transformado O'UVW son coincidentes, la matriz homogénea de transformación será la matriz 4 x 4 unidad, **I**4

❷ Si el sistema O'UVW se obtiene mediante rotaciones y traslaciones definidas con respecto al sistema fijo OXYZ, la matriz homogénea que representa cada transformación se deberá premultiplicar sobre las matrices de las transformaciones previas.

❸ Si el sistema O'UVW se obtiene mediante rotaciones y traslaciones definidas con respecto al sistema móvil, la matriz homogénea que representa cada transformación se deberá postmultiplicar sobre las matrices de las transformaciones previas.

Ejemplo de composición de matrices homogéneas (I)

PREMULTIPLICACIÓN

- Obtener la matriz de transformación que representa al sistema O'UVW obtenido a partir del sistema OXYZ mediante un giro de ángulo -90º alrededor del eje OX, de una traslación de vector $p_{xyz}(5,5,10)$ y un giro de 90º sobre el eje OZ

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{z},90^o)\mathbf{T}(\mathbf{p})\mathbf{T}(\mathbf{x},\text{-}90^o) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

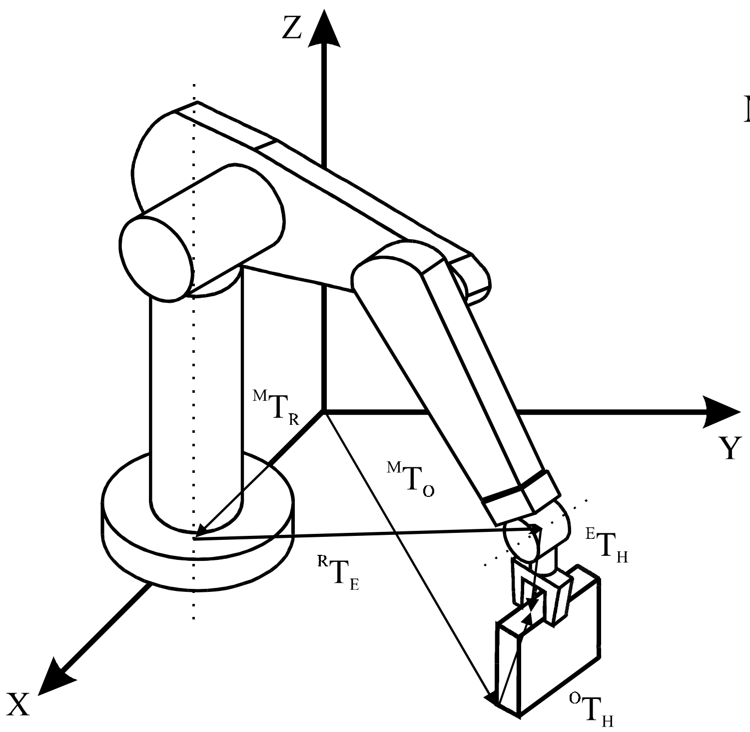
Ejemplo de composición de matrices homogéneas (II)

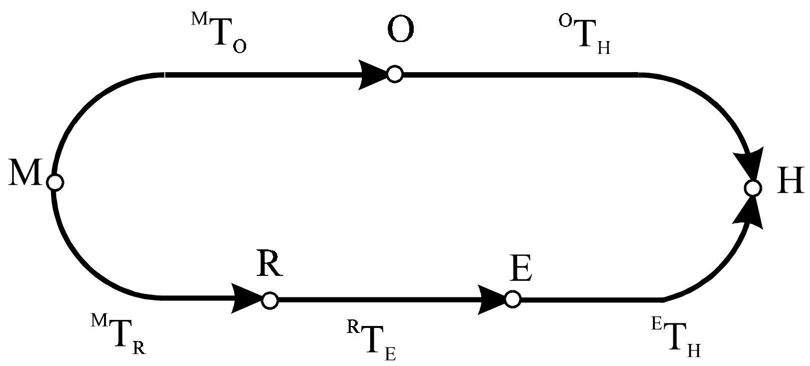
POSMULTIPLICACIÖN

- Obtener la matriz de transformación que representa las siguientes transformaciones sobre un sistena OXYZ fijo de referencia: traslación de un vector $\mathbf{p}_{xyz}(-3,10,10)$; giro de -90º sobre el eje O'U del sistema trasladado y giro de 90º sobre el eje O'V del sistema girado

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{p})\,\mathbf{T}(\mathbf{u},\text{-}90^{\circ})\,\mathbf{T}(\mathbf{v},90^{\circ}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gráficos de transformación





$$\left({}^{M}\mathbf{T}_{O}\right)^{-1}\ {}^{M}\mathbf{T}_{R}\ {}^{R}\mathbf{T}_{E}\ {}^{E}\mathbf{T}_{H} = {}^{O}\mathbf{T}_{H}$$

$${}^{R}\mathbf{T}_{O} = {}^{R}\mathbf{T}_{E}\ {}^{E}\mathbf{T}_{H}\left({}^{O}\mathbf{T}_{H}\right)^{-1}$$

$${}^{R}\mathbf{T}_{O} = \left({}^{M}\mathbf{T}_{R}\right)^{-1}\ {}^{M}\mathbf{T}_{O}$$

Comparación entre métodos de localización espacial

Método	Ventajas	Inconvenientes
Matrices de transformación homogénea	• Posición y orientación de forma conjunta • Comodidad	• Alto nivel de redundancia (12 compon. para 6 gdl) • Coste computacional
Angulos de Euler	• Notación compacta	• Sólo orientación • Dificultad de manejo para composición
Par de rotación	• Notación compacta	• Sólo orientación • Dificultad de manejo para composición
Cuaternios	• Composición simple y eficiente de rotaciones y traslaciones	• Sólo orientación relativa