MODELADO E IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS
5º INGENIERÍA INDUSTRIAL

PRÁCTICA 4

IDENTIFICACIÓN POR MÍNIMOS CUADRADOS

Curso 2002-2003

1. Objetivos

En el desarrollo teórico del tema de identificación se ha estudiado el método de identificación paramétrica basado en el algoritmo de Mínimos Cuadrados. Este algoritmo es de gran importancia debido a que a partir de él se deducen otros de mayor complejidad que se adaptan a problemas concretos. Es por esto por lo que, por medio de esta práctica, se va a desarrollar los aspectos vistos en teoría dentro de un marco práctico que ayude a comprender el funcionamiento del mismo. Así, en esta práctica se pretenden alcanzar los siguientes objetivos:

- Comprensión práctica de la identificación de sistemas
- Asociación teórico – práctica de los conceptos de *"modelado"* e *"identificación"*
- Conocimiento y aplicación de la técnica de Mínimos Cuadrados para la obtención de modelos discretos
- Utilización de la aplicación Matlab/Simulink para realizar los procesos de identificación y de validación mediante simulación.

2. Identificación de Sistemas. Método de Mínimos Cuadrados

Para el diseño de un regulador es importante, si no imprescindible, disponer de la función de transferencia de sistema a controlar. Por tanto, en el caso de no disponer del citado modelo, éste se deberá estimar a través de la identificación. Así pues, se podría decir que la identificación de sistemas e un planteamiento experimental para la construcción de modelos. Dicho planteamiento se puede estructurar en los siguientes apartados:

a) *Planificación experimental*: consiste en la excitación del sistema a identificar mediante una determinada señal de entrada y registrar para cada instante la entrada y la salida producida por la misma.

b) *Selección de la estructura del modelo*: Atendiendo a la salida del sistema observada en el apartado anterior, se deduce el aspecto de la función de transferencia del sistema a identificar (primer orden, segundo, etc., retardos…)

c) *Estimación de parámetros*: Supuesta la estructura del modelo del sistema, se obtiene, a través de diversas técnicas de identificación el valor de los parámetros incógnitas.

d) *Validación*: Una vez obtenido el modelo es necesario comprobar si éste responde, ante la misma señal de entrada (u otras), de un modo aceptablemente similar como el sistema original. Si la validación resulta insatisfactoria repetiríamos los pasos desde el apartado b), seleccionando una nueva estructura.

2.1 El principio de los Mínimos Cuadrados

El principio de los Mínimos Cuadrados indica que los parámetros de un modelo se deben elegir de tal forma que

> *La suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores de la salida observados (reales) y los estimados, multiplicada por factores que midan el grado de precisión sea un mínimo.*

Así pues, considerando un modelo genérico

$$G(z^{-1}) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots a_n z^{-n}} \cdot z^{-d}$$

la identificación del mismo consistirá en la estimación de los parámetros desconocidos $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m$. Para ello procederemos como se expone a continuación.

Dados los $k+1$ valores de la entrada y los k de la salida, la siguiente salida estimada, $\hat{y}(k+1)$ será

$$\hat{y}(k+1) = x_{k+1}{}^T \mathbf{q}$$

donde

$$\mathbf{q} = [a_1, a_2, \cdots, a_n, b_0, b_1, \cdots, b_m]$$

$$x_{k+1} = [-y(k), -y(k-1), \cdots, -y(k-n+1), u(k+1-d), u(k-d), \cdots, u(k-m+1-d)]$$

La discrepancia entre la salida real en el instante $k+1$, $y(k+1)$ y la estimada $\hat{y}(k+1)$ viene dada por la siguiente expresión de error

$$e(k+1) = y(k+1) - \hat{y}(k+1)$$

Repitiendo este planteamiento para N medidas sucesivas, las salidas correspondientes a esos N instantes se pueden expresar mediante la ecuación matricial siguiente

$$\begin{bmatrix} y(k+1) \\ y(k+2) \\ \vdots \\ y(k+N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(k) & -y(k-1) & \cdots & -y(k-n+1) & u(k+1-d) & u(k-d) & \cdots & u(k-m+1-d) \\ -y(k+1) & -y(k) & \cdots & -y(k-n+2) & u(k+2-d) & u(k+1-d) & \cdots & u(k-m+2-d) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -y(k+N-1) & -y(k+N-2) & \cdots & -y(k-n+N) & u(k+N-d) & u(k+N-1-d) & \cdots & u(k-p+N-d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_0 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Dicha ecuación ($Y=Xq$) presenta infinitas soluciones. De todas ellas, elegiremos, utilizando el método de Mínimos Cuadrados, aquella que minimice el error. En otras palabras, el estimador de mínimos cuadrados será aquel que proporcione los valores de los parámetros que minimizan la suma de los cuadrados de los errores, J_k.

$$J_k = \frac{1}{2} \sum_{i=k+1}^{k+N} e^2(i)$$

Minimizando dicho índice, los parámetros que minimizan el error se obtienen resolviendo el siguiente producto matricial

$$\hat{q} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

La matriz (X^TX) es cuadrada, y en determinadas condiciones, que se denominan de *excitación permanente*, es invertible. Como consecuencia de esta característica, para esta técnica de identificación no sirven las entradas usuales como escalón, impulso, etc., ya que no provocarán una excitación permanente y hacen que dicha matriz no sea invertible, lo cual hace impracticable la identificación.

3. Identificación de un sistema de primer orden

En esta primera parte se identificará un sistema de primer orden utilizando la técnica de los mínimos cuadrados. La función de transferencia a encontrar tendrá pues la siguiente forma:

$$G(z) = \frac{b}{1 + az^{-1}} \cdot z^{-d}$$

donde a y b son los parámetros a estimar y d es el retardo que presenta el sistema a identificar. Además el sistema en cuestión se está operando mediante computador a un periodo de muestreo de 1 segundo.

Con estas consideraciones previas iniciaremos la identificación del sistema al cual se le proporciona las entradas expuestas a continuación.

a) La primera entrada proporcionada consiste en la secuencia $u_k=\{1,0,1,0,1,0,0,\ldots\}$

b) b) la segunda entrada utilizada para excitar al sistema a identificar corresponde a la secuencia $u_k=\{1,0,1,0,1,1,1,\ldots\}$

Con dichas entradas se excitó al sistema dos veces (una con cada entrada) y las salidas obtenidas para cada experiencia se muestran en la figura 1 y 2.

Además, en la tabla 1 se presenta los datos numéricos más relevantes de la salida obtenida al realizar ambos experimentos.

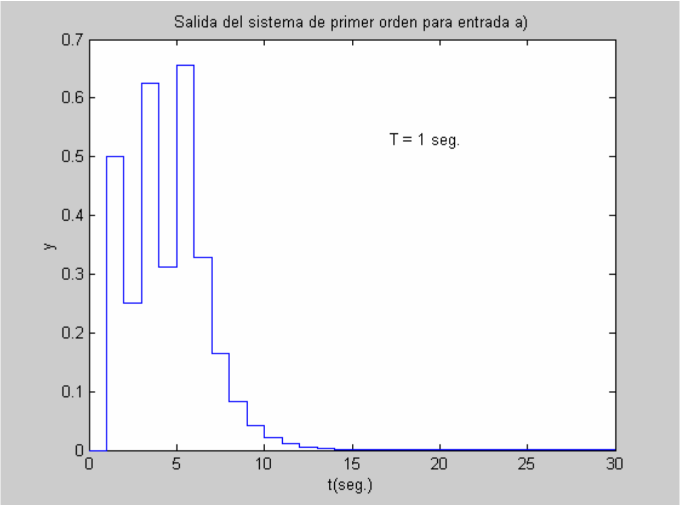

Figura 1. Salida del sistema con la entrada a)

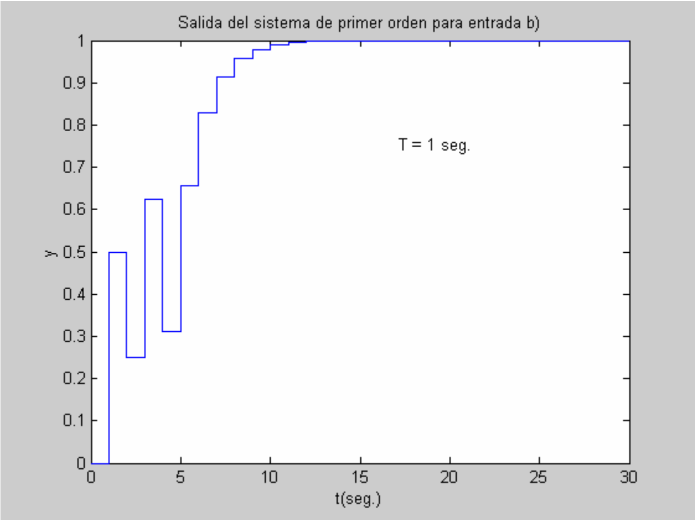

Figura 2. Salida del sistema con la entrada b)

Tabla 1. Valores de la salida para las entradas a) y b)

Entrada a)		Entrada b)	
Instante (k)	Salida (y)	Instante (k)	Salida (y)
0	0.0000	0	0.0000
1	0.5000	1	0.5000
2	0.2500	2	0.2500
3	0.6250	3	0.6250
4	0.3125	4	0.3125
5	0.6562	5	0.6562
6	0.3281	6	0.8281
7	0.1641	7	0.9141
8	0.0820	8	0.9570
9	0.0410	9	0.9785
10	0.0205	10	0.9893
….	…	….	…
30	0.0000	30	1.0000

Una vez conocidas las medidas se procederá a la identificación de los parámetros *a* y *b*. Para ello, y según el desarrollo realizado en el apartado anterior, realizaremos el siguiente planteamiento:

$$Y = \begin{bmatrix} y(k+1) \\ y(k+2) \\ \vdots \\ y(k+N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(k) & u(k+1-d) \\ -y(k+1) & u(k+2-d) \\ \vdots & \vdots \\ -y(k+N-1) & u(k+N-d) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

donde *k* se corresponde con el instante en el que se produce la primera salida significativa del sistema, *d* es el retardo, *N* el número de medidas sucesivas empleadas para la estimación y *a* y *b* son los parámetros a estimar.

La estimación de los parámetros se obtendrá como resultado de evaluar la expresión

$$\hat{q} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

Consideraremos para la identificación, un número de muestras $N = 6$.

Este desarrollo se aplicará dos veces, una para cada una de las entradas y sus correspondientes salidas. Una vez identificado el sistema comprobaremos la validez del mismo mediante simulación. En dicha simulación se deberá obtener el mismo resultado que se presenta en las figuras 1 y 2 introduciendo como entrada al sistema las entradas a) y b). Para introducir dichas entradas al proceso utilizaremos en Simulink un bloque *From Workspace* cuyos parámetros serán (para cada entrada):

Ea = [0 1; 1 0; 2 1; 3 0; 4 1; 5 0; 6 0; 7 0; 8 0; 9 0]

Eb = [0 1; 1 0; 2 1; 3 0; 4 1; 5 1; 6 1; 7 1; 8 1; 9 1]

4. Identificación de un sistema de segundo orden

En este caso se tiene un sistema al cual se le ha proporcionado la entrada que en el apartado anterior hemos denominado b). Los valores numéricos de la salida obtenida se muestra en la tabla 2.

En la figura 3 se muestra gráficamente la salida de dicho sistema para la entrada elegida.

Tabla 2. Salida del sistema de segundo orden para la entrada b)

Instante (k)	Salida (y)
0	0.0000
1	1.0000
2	1.1000
3	1.3200
4	0.9180
5	1.1020
6	1.8491
7	2.2348
8	2.2122
9	2.0675
10	1.9884
….	…
30	2.0270

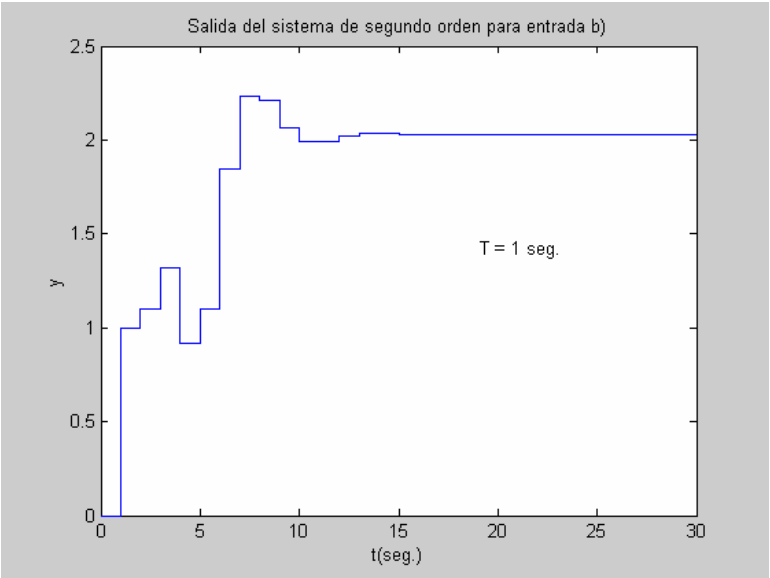

Figura 3. Salida del sistema de segundo orden con entrada b)

En principio, cuando se realiza la identificación de un sistema, no se conoce la estructura de la función de transferencia del mismo. Se puede, a priori, establecer algún tipo de hipótesis, y si esto no es posible, se comienza asumiendo que el sistema corresponde a una función de transferencia de primer orden. Así, el método a seguir consiste en suponer una determinada estructura para la función de transferencia, estimar los parámetros y comprobar la validez del modelo obtenido. Si la respuesta obtenida es lo suficientemente similar a la del proceso, la tarea de identificación ha terminado; en caso contrario debemos modificar la hipótesis de partida (suponer otra estructura para la función de transferencia) y volver a estimar los parámetros de la misma.

Así pues, suponiendo que desconocemos la estructura de la función de transferencia de este sistema, asumiremos en principio que se trata de un sistema de primer orden y si el resultado no es satisfactorio supondremos una estructura de segundo orden. Por tanto, aparte de la identificación para una función de transferencia de primer orden, las identificaciones para la función de transferencia de segundo orden corresponderán a las siguientes suposiciones sobre la estructura de la misma:

F.D.T. 1	**F.D.T. 2**	**F.D.T. 3**
$G(z) = \dfrac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \cdot z^{-d}$	$G(z) = \dfrac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \cdot z^{-d}$	$G(z) = \dfrac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \cdot z^{-d}$

El proceso de identificación terminará cuando el modelo obtenido para una de las funciones de transferencia anteriores tenga un comportamiento equivalente a la salida real de proceso.

En el caso más complejo (F.D.T. 3), el planteamiento matricial para la identificación será:

$$\begin{bmatrix} y(k+1) \\ y(k+2) \\ \vdots \\ y(k+N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(k) & -y(k-1) & u(k+1-d) & u(k-d) & u(k-1-d) \\ -y(k+1) & -y(k) & u(k+2-d) & u(k+1-d) & u(k-d) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y(k+N-1) & -y(k-N-2) & u(k+N-d) & u(k+N-1-d) & u(k+N-1-d) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

La estimación de los parámetros se obtendrá resolviendo la ecuación matricial:

$$\hat{q} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

Se debe pues, calcular la función de transferencia correcta del modelo utilizando para ello la simulación como método de validación.

5. Identificación de un sistema con ruido

Una vez identificado el sistema anterior, comprobaremos en este apartado, qué comportamiento presenta el método de Mínimos Cuadrados cuando el sistema a identificar se encuentra perturbado por un ruido. Para ello, al sistema del apartado anterior se ha superpuesto un ruido, por lo que para la entrada b) utilizada anteriormente, se ha obtenido la salida que se detalla en la tabla 3.

La tarea a realizar, consiste en este caso en identificar el sistema con dicha combinación entrada – salida y utilizando la función de transferencia correcta deducida del apartado anterior.

Tabla 3. Salida del sistema de segundo orden con ruido para entrada b)

Instante (k)	Salida (y)
0	0.0000
1	0.9802
2	1.1098
3	1.3794
4	0.8979
5	1.0859
6	1.8955
7	2.3221
8	2.2904
9	2.0957
10	1.9207
….	…
30	2.0245

6. Informe a presentar

Se debe entregar un informe que contenga los aspectos relatados a continuación:

- **Identificación de un sistema de primer orden**: Matrices X e Y y funciones de transferencia para ambas entradas así como las gráficas que se crean convenientes.

- **Identificación de un sistema de segundo orden**:

    - **Identificación como sistema de primer orden**: matrices X, Y y función de transferencia así como la gráfica de la salida del modelo. ¿Es válido el modelo obtenido? ¿Se podría haber obviado esta identificación? ¿Porqué?
    - **Identificación como sistema de segundo orden**: matrices X, Y y funciones de transferencia obtenidas así como las gráficas de las salidas de los modelos.

- **Identificación de un sistema con ruido**: matrices X, Y, función de transferencia y gráfica de la salida del modelo. ¿A qué conclusión se llega tras la simulación?

Aparte se puede incluir cualquier aspecto de la práctica que se quiera hacer notar.