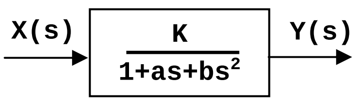
2º ITT SISTEMAS ELECTRÓNICOS
2º ITT SISTEMAS DE TELECOMUNICACIÓN
3º INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIÓN

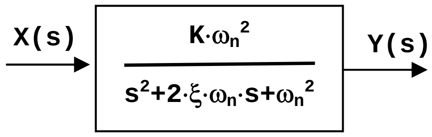
# AUTÓMATAS Y SISTEMAS DE CONTROL

## PRÁCTICA 7: SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

### 1. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

La función de transferencia de un sistema de segundo orden, expresada en un formato estándar, presenta uno de los dos aspectos siguientes:




La segunda representación resultara más práctica a la hora de analizar el comportamiento de estos sistemas. En particular, nos interesará conocer dos factores:

- Ganancia en régimen permanente
- Comportamiento transitorio

#### 1.1. Ganancia en régimen permanente

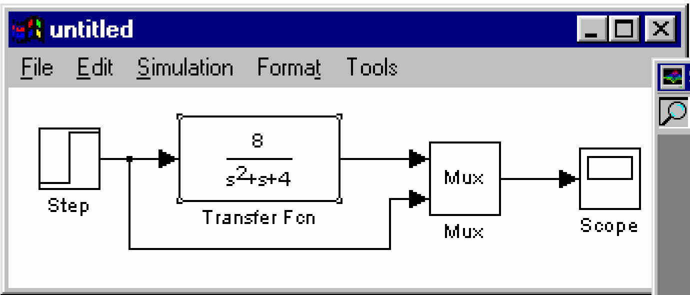
La ganancia representa la relación entre el valor de la salida y el valor de la entrada una vez que el sistema se ha estabilizado (se considera una entrada tipo escalón). Puede demostrarse que el valor de la ganancia es **K** si la función de transferencia se expresa en cualquiera de los formatos que se proponen.

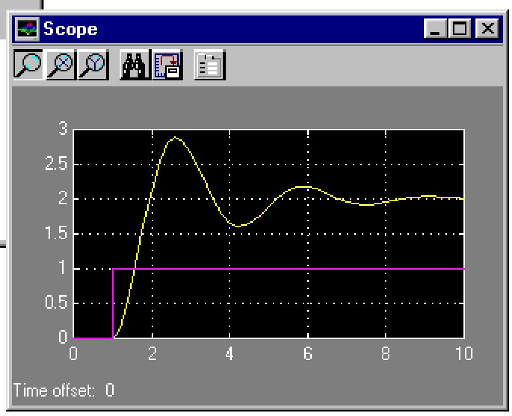
A continuación se creará un esquema en Simulink que permita comprobar este dato. Utilizaremos el siguiente sistema de segundo orden:

- $K = 2$
- $\xi = 0.25$
- $\omega_n = 2$

$$G(s) = \frac{K \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{8}{s^2 + s + 4}$$

Las figuras siguientes muestran el aspecto que debe tener el esquema y el resultado de aplicar un escalón unitario como entrada al mismo:



Se puede comprobar como el valor al que tiende el sistema en régimen permanente es 2. Esto era de esperar ya que se aplica un escalón unitario y la ganancia del sistema es **K**=2.

Los experimentos a realizar a continuación son los siguientes:

- Cambio del valor **K**: probaremos con distintos valores de **K** modificando el numerador de la función de transferencia y observaremos las variaciones de la respuesta.
- Cambio del valor de la señal de entrada: modificaremos el valor del escalón pinchando dos veces sobre él y cambiando el parámetro *'final value'*. Debemos comprobar como la salida tiene siempre un valor en régimen permanente **K** veces mayor que la entrada.

## 1.2. Comportamiento en régimen transitorio

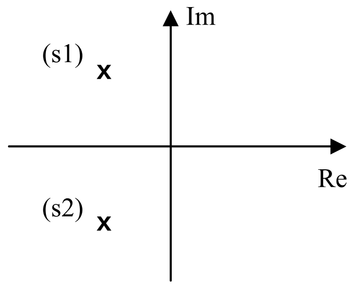
El comportamiento del sistema en régimen transitorio vendrá condicionado por la situación de sus polos (raíces del denominador). De acuerdo con el formato estándar que venimos utilizando, las raíces del denominador son:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$
$$s = -\xi\omega_n \pm \sqrt{\xi^2 - 1}$$

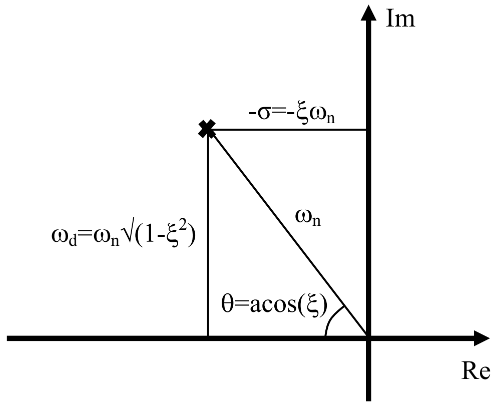
Se pueden presentar tres tipos de comportamiento distintos en función del valor de $\xi$:

- $\xi>1 \Rightarrow$ s1 y s2 reales $\Rightarrow$ sistema **sobreamortiguado** (no hay sobreoscilaciones)
- $\xi=1 \Rightarrow$ s1=s2 $\Rightarrow$ sistema **críticamente amortiguado** (valor límite)
- $\xi<1 \Rightarrow$ s1 y s2 complejos conjugados $\Rightarrow$ sistema **subamortiguado** (hay sobreoscilaciones en régimen transitorio)

Nos centraremos en el estudio de los sistemas subamortiguados, por lo que s1 y s2 serán dos polos complejos conjugados, tal y como se representan en el diagrama siguiente:




La situación exacta de los polos determinará las características del comportamiento temporal del sistema. Utilizaremos los siguientes valores para localizar los polos:



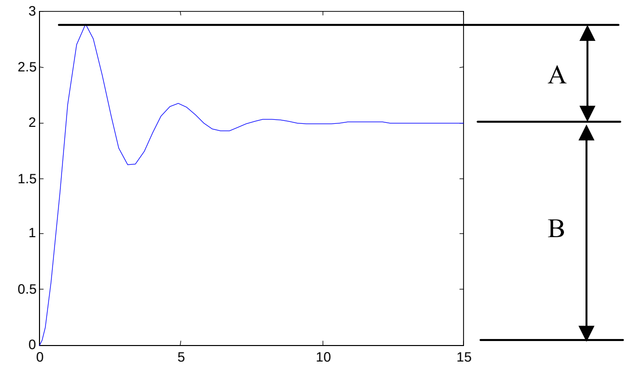

Representación cartesiana
Parte real polo: $\sigma = -\xi\omega_n$
Parte imaginaria polo: $\omega_d = \omega_n\sqrt{(1-\xi^2)}$

Representación polar
Módulo polo: $\omega n$
Ángulo de fase polo: $\theta = \mathrm{acos}(\xi)$

## 2. VALORES CARACTERÍSTICOS DE LA RESPUESTA ANTE ESCALÓN

### 2.1 Porcentaje de sobreoscilación ($M_p$)

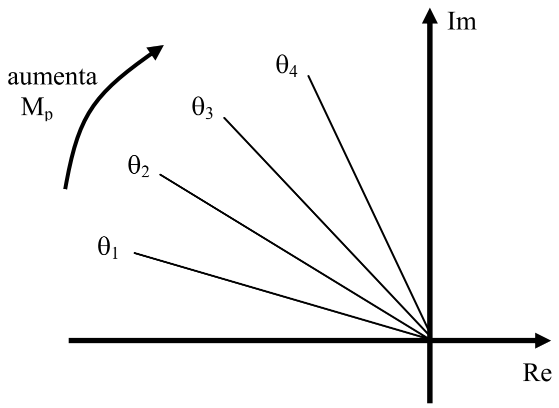
Una de las características importantes del comportamiento transitorio de un sistema de segundo orden es el porcentaje de sobreoscilación medido con respecto del valor en régimen permanente:




$$M_p = \frac{A}{B}\%$$

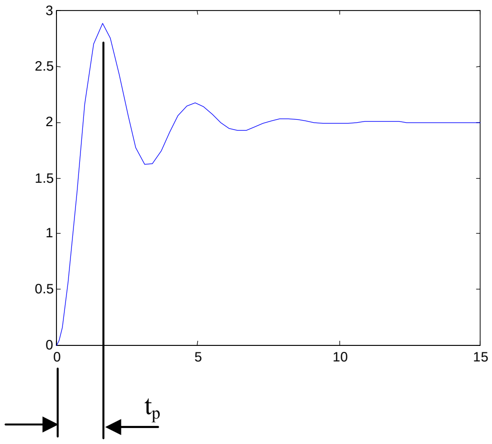
Para un sistema de segundo orden como el que hemos descrito se cumple: $M_p = e^{-\frac{\pi}{\mathrm{tg}(\theta)}}$

Lo que quiere decir que los polos que posean un mismo valor de θ (mismo ángulo de fase) resultarán en picos de sobreoscilación iguales. Por tanto las líneas que se muestran en el gráfico inferior corresponden a lugares de sobreoscilación constante. El aumento de la sobreoscilación irá en el sentido de la flecha:



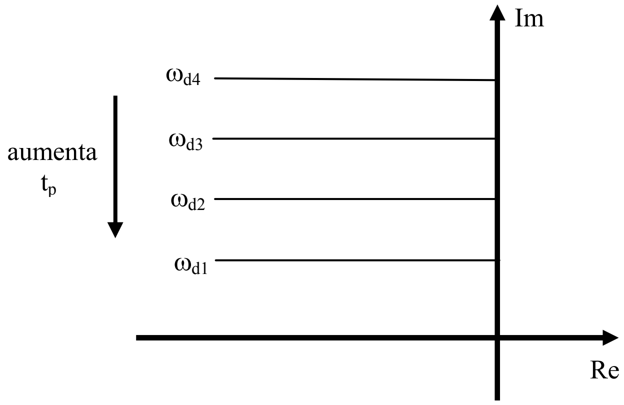

### 2.2. Tiempo de pico de sobreoscilación ($t_p$)

El tiempo del pico de sobreoscilación es una de las posibles medidas de la velocidad de respuesta de un sistema ante una solicitación determinada:



En sistemas de segundo orden, la expresión para el tiempo de pico es la siguiente: $t_p = \dfrac{\pi}{\omega_d}$

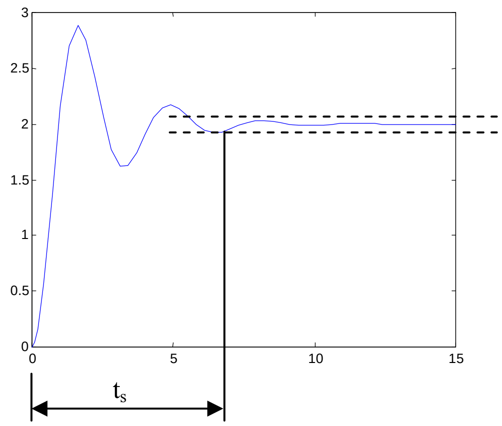
Por tanto, todos los polos cuyo valor de $\omega_d$ sea igual (mismo valor para la parte imaginaria) corresponderán a sistemas con igual tiempo de pico. La gráfica que se muestra a continuación refleja los lugares geométricos correspondientes a tiempos de pico idénticos.




***NOTA: para la medida de tiempos es más práctico hacer que el escalón de entrada comience en t=0***

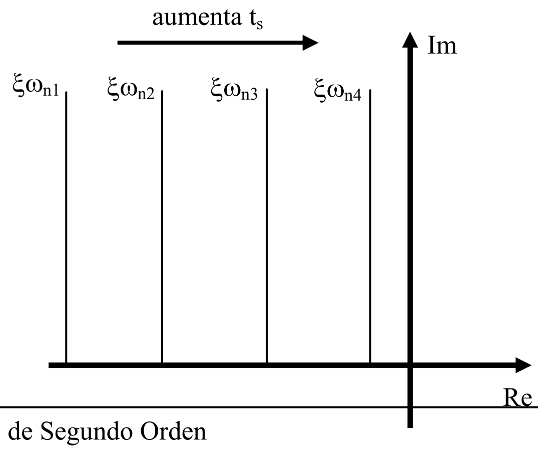
## 2.3 Tiempo de establecimiento ($t_s$)

El tiempo de establecimiento mide el tiempo que tarda el sistema en estabilizarse sobre la posición de equilibrio. Se considera que la respuesta está estabilizada cuando se encuentra en una banda del ±5% del valor de régimen permanente:




En sistemas de segundo orden suele utilizarse esta expresión aproximada: $t_s = \dfrac{\pi}{\xi\omega_n}$

Por tanto, todos los polos cuyo valor de $\xi\omega_n$ sea igual (mismo valor para la parte real) corresponderán a sistemas con igual tiempo de establecimiento. La gráfica que se muestra a continuación refleja los lugares geométricos correspondientes a tiempos de establecimiento idénticos.



# INFORME DE LA PRÁCTICA 7

**NOMBRE:_________________APELLIDOS:______________**
**DNI:______________________TITULACIÓN:_____________**

**FIRMA:___________________**

**EJERCICIO 1**

**COMPROBACIÓN EXPERIMENTAL DE LOS VALORES DE SOBREOSCILACIÓN**

Para los tres sistemas siguientes:

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 12} \qquad G_2(s) = \frac{7}{2s^2 + s + 7} \qquad G_3(s) = \frac{-10}{s^2 + 1.5s + 3}$$

Se pide:

- Simular su comportamiento ante entrada escalón

1.1 Medir sobre las gráficas el valor de la sobreoscilación. Compruebe teóricamente los resultados obtenidos.

$M_{p1}$ =__________

$M_{p2}$ =__________

$M_{p3}$ =__________

1.2 Representar en un solo gráfico la posición de los polos de los tres sistemas (comandos *pzmap* y *sgrid*)

**<u>EJERCICIO 2</u>**

**COMPROBACIÓN EXPERIMENTAL DE LOS VALORES DE TIEMPO DE PICO**

Para los tres sistemas siguientes:

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5} \qquad G_2(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 2} \qquad G_3(s) = \frac{3}{s^2 + s + 4.25}$$

Se pide:

- Simular su comportamiento ante entrada escalón

2.1 Mida sobre las gráficas el valor del tiempo de pico de sobreoscilación. Compruebe teóricamente los resultados obtenidos.

$t_{p1}$ =__________

$t_{p2}$ =__________

$t_{p3}$ =__________

2.2 Representar en un solo gráfico la posición de los polos de los tres sistemas (comandos *pzmap* y *sgrid*)

**EJERCICIO 3**

**COMPROBACIÓN EXPERIMENTAL DEL TIEMPO DE ESTABLECIMIENTO**

Para los tres sistemas siguientes:

$$G_1(s) = \frac{30}{s^2 + 2s + 20} \qquad G_2(s) = \frac{6}{s^2 + 2s + 12} \qquad G_3(s) = \frac{50}{s^2 + 4s + 100}$$

Se pide:

- Simular su comportamiento ante entrada escalón

3.1 Mida sobre las gráficas el valor del tiempo de establecimiento. Compruebe teóricamente los resultados obtenidos.

$t_{s1}$ =__________

$t_{s2}$ =__________

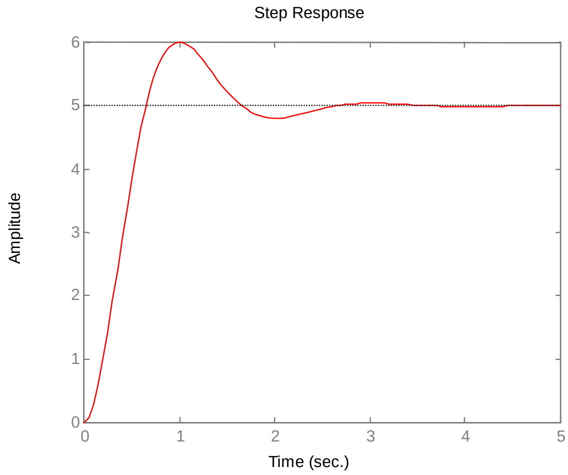
$t_{s3}$ =__________

3.2 Representar en un solo gráfico la posición de los polos de los tres sistemas (comandos *pzmap* y *sgrid*)

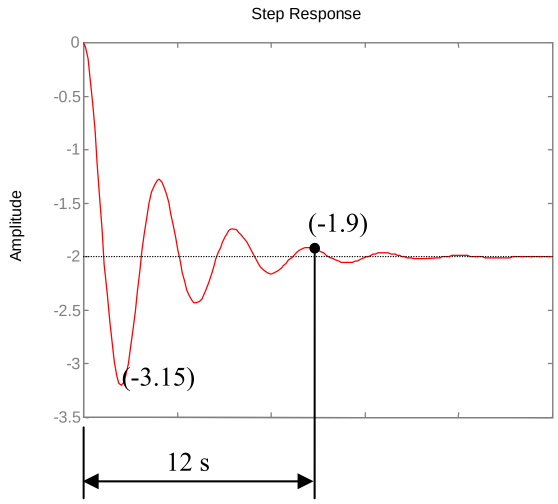
**EJERCICIO 4**

**IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN**

**1)** El gráfico de la derecha muestra la respuesta a escalón unitario de un sistema de segundo orden desconocido.




**2)** En este caso se muestra la respuesta a escalón de valor 0.5 para un sistema de segundo orden desconocido.




4.1 Determine la función de transferencia el sistema a partir de los valores que se muestran en el gráfico. Simular un sistema con esa función de transferencia para comprobar que los cálculos realizados son correctos.

G(s)=

4.2 Determine la función de transferencia del sistema a partir de los valores que se muestran en el gráfico. Simular un sistema con esa función de transferencia para comprobar que los cálculos realizados son correctos (el escalón debe tener valor final 0.5).

G(s)=