Autómatas y Sistemas de Control

(Convocatoria de Septiembre)
13 de Septiembre de 2006

Nombre y apellidos:___________________________________ **D.N.I.:** ___________

Especialidad:____

<u>PARTE 2:</u> (Segundo cuatrimestre)

<u>PROBLEMA 1</u> (3 puntos)

Fíjese en el sistema de la figura 1 y responda a las siguientes cuestiones:

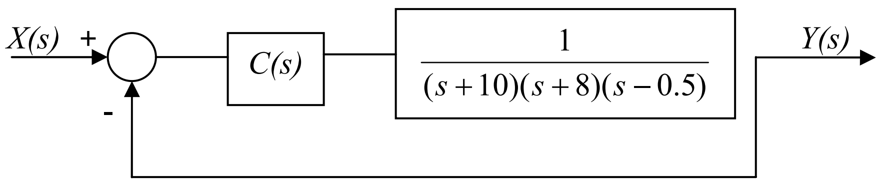


Fig. 1

a) Considere *C(s)=K* con $K \geq 0$. Dibuje de forma detallada el lugar de las raíces del sistema. Indique:
   - Polos y ceros del sistema en cadena abierta.
   - Número de ramas del lugar de las raíces.
   - Ángulos de las asíntotas.
   - Posición del centroide.

(0.5 ptos)

b) ¿Es estable el sistema en cadena abierta? Razone la respuesta.

(0.5 ptos)

c) Analice la estabilidad del sistema en cadena cerrada: Si $K > 0$, halle los valores de *C(s)=K* para los cuales el sistema tiene un comportamiento estable.

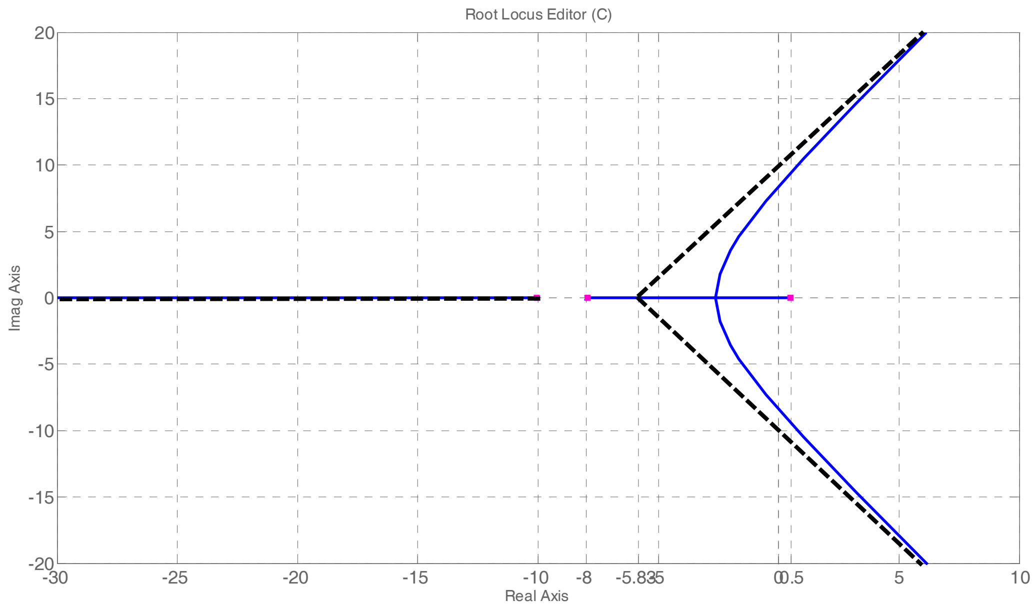
(1 ptos)

d) Diseñe el controlador C(s) más sencillo que haga cumplir las siguientes especificaciones de la salida ***y(t)*** ante entrada escalón ***x(t)***.
- Sobreoscilación M_p = 10%
- Tiempo de establecimiento t_s = 1.3 s
- Error de posición en régimen permanente e_p < 5%

Indique la posición de los polos dominantes según las especificaciones.

(1 ptos)

a) El lugar de las raíces se muestra en la figura siguiente:



Se observa:

3 polos en cadena abierta, en s=-10, -8, 0.5. 3 ramas en el lugar de las raíces

El centroide se situa en σ_0= -5.833

Las asíntotas se cortan en el centroide, sobre el eje real, con ángulos de $\pi/3$, π, $5\pi/3$

b) El sistema en cadena abierta no es estable, por tener uno de los polos parte real positiva.

c) Para analizar la estabilidad en cadena cerrada, considerando C(s)=K, utilizaremos el criterio de Routh. Comenzaremos calculando la función de transferencia M(s) en cadena cerrada:

$$M(s) = \frac{K}{s^3 + 17.5s^2 + 71s - 40 + K}$$

A continuación, podemos construir la tabla de Routh:

s^3	1	71
s^2	17.5	$-40+K$
s	$(-K+1282)/17.5$	0
s^0	$-40+K$	0

De la última fila tenemos que: $-40+K > 0$ ➔ $K > 40$

De la tercera fila: $(-K+1282)/17.5 > 0$ ➔ $K < 1282$

En consecuencia, para que el sistema realimentado con ganancia *K* sea estable, debe ocurrir que:

40 < *K* < 1282

Si nos fijamos en el lugar de las raíces, para K=40 uno de los polos en cadena cerrada se sitúa en s=0, siendo el sistema críticamente inestable. Para K = 1282, tenemos dos polos en cadena cerrada que son imaginarios puros y se sitúan en s = ±8.3j.

d) A continuación diseñamos un regulador para situar los polos en cadena cerrada en la posición deseada. Obtenemos la posición de los polos dominantes:

De las especificaciones: $t_s = \pi/\sigma = 1.3$ *y* $M_p = exp(-\pi/tan(\theta))*100 = 10\%$

Los polos deseados son $p_d = -2.41 \pm 3.3j$

Si nos fijamos en el l.d.r, el lugar de las raíces no pasa por los polos deseados. Probaremos con un regulador PD. Alternativamente, podemos elegir un regulador P y calcular el valor de la ganancia K utilizando el criterio del módulo, obteniendo K=236.6. Sin embargo, si comprobamos la posición de los polos dominantes con esta ganancia, p_d = -2.12±3.22j, en consecuencia, el regulador P no es suficiente y deberemos diseñar un regulador PD. El regulador PD que se plantea es

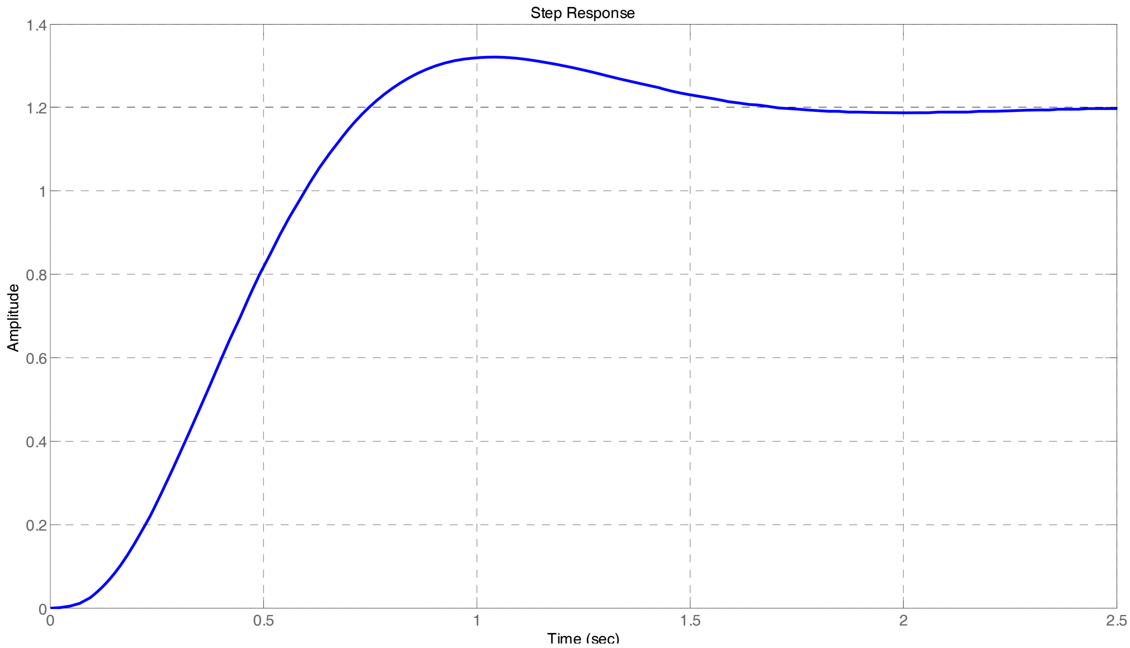
$$C(s) = k_r \frac{s+z}{s+p}$$

Elegimos z=8. Nótese que no podemos colocar un cero z=0.5, ya que estaremos introduciendo un polo inestable en bucle cerrado, haciendo el sistema inestable. Con esto, se obtiene el regulador:

$$PI(s) = 208 \frac{s+8}{s+9.2}$$

Con este regulador, el sistema en bucle cerrado tiene 4 polos: s=-14,-8, -2.41±3.3j

Podemos comprobar con Matlab la respuesta ante entrada escalón del sistema con el controlador C(s):



Se puede observar que el error en régimen permanente es alto. Además, la salida supera la referencia (1). Esto es debido a que el sistema tiene un polo en s=0.5.

$e_p = \frac{1}{1+k_p}$ y $k_p = \lim_{s\to 0} sC(s)G(s)\frac{1}{s} = 4.2$, k_p se debe tomar como valor absoluto para sustituir en e_p, resultando e_p=0.19=19% de error.

PROBLEMA 2 (4 puntos)

En la figura 1 se muestra un sistema formado por dos depósitos de agua. En el depósito 1 se vierte un caudal q_e. El depósito 1 está comunicado con el depósito 2, transfiriéndose un caudal q. Finalmente, del depósito 2 se escapa un caudal q_s. La altura de agua del depósito 1 y del 2 se han llamado $h_1(t)$ y $h_2(t)$.

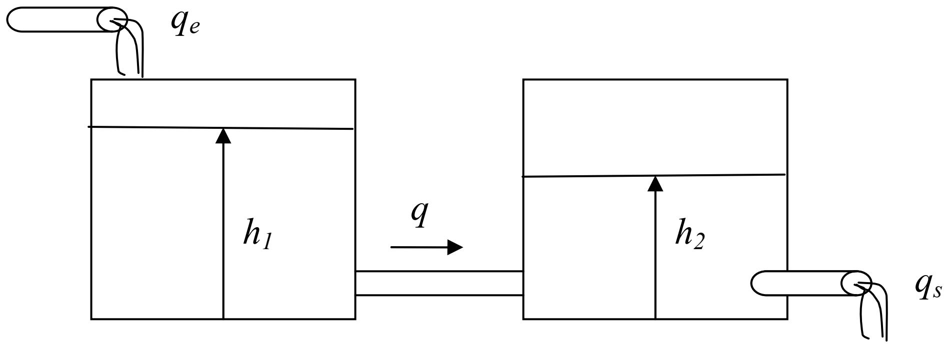


Fig. 1

Las ecuaciones que rigen el comportamiento del sistema se indican a continuación:

$$q_e(t) - q(t) = A_1 \frac{dh_1(t)}{dt}$$
$$q(t) - q_s(t) = A_2 \frac{dh_2(t)}{dt}$$
$$q(t) = K_1\sqrt{h_1(t) - h_2(t)} \qquad \textbf{(1)}$$
$$q_s(t) = K_2\sqrt{h_2(t)}$$
$$A_1 = A_2 = 2 \ m^2$$
$$K_1 = K_2 = 1 m^{5/2} s^{-1}$$

a) Halle el punto de equilibrio del sistema cuando $q_e = 2$ m^3/s.
(1 pto)

b) Linealice las ecuaciones alrededor del punto de equilibrio y expréselas en el dominio de Laplace.
(1 pto)

c) Suponiendo que $q_e = 3$ m^3/s.
   a. Calcule la respuesta transitoria de la salida q_s utilizando el modelo linealizado en b).
   b. Calcule la salida en régimen permanente utilizando el modelo lineal, suponiendo $q_e = 3$ m^3/s.
   c. Calcule la salida en régimen permanente utilizando el modelo no lineal (ecuaciones 1).
   d. Compare los resultados y expliqué a qué son debidos.
(2 pto)

a) Llegados al equilibrio, consideramos que todas las derivadas son nulas. Si consideramos que la entrada vale $q_e(0)$= 2 m^3/s. Entonces:

$$q(0) = q_e(0) = 2 \ m^3/s$$
$$q_s(0) = q(0) = 2 \ m^3/s$$
$$h_2(0) = (q_s(0)/K_2)^2 = 4m$$
$$h_1(0) = (q(0)/K_1)^2 + h_2(0) = 8m$$

b) Las dos primeras ecuaciones ya son lineales. A continuación linealizamos las dos segundas utilizando un desarrollo de Taylor de primer orden.

$$q(t) \approx q(0) + \left.\frac{\partial q(t)}{\partial h_1(t)}\right|_0 \left(h_1(t) - h_1(0)\right) + \left.\frac{\partial q(t)}{\partial h_2(t)}\right|_0 \left(h_2(t) - h_2(0)\right)$$

$$q_s(t) \approx q_s(0) + \left.\frac{\partial q_s(t)}{\partial h_2(t)}\right|_0 \left(h_2(t) - h_2(0)\right)$$

Calculando las derivadas obtenemos:

$$q(t) \approx q(0) + \left.\frac{K_1}{2\sqrt{h_1 - h_2}}\right|_0 \left(h_1(t) - h_1(0)\right) - \frac{K_1}{2\sqrt{h_1 - h_2}}\Big|_0 \left(h_2(t) - h_2(0)\right)$$

$$\Rightarrow \Delta q(t) = 0.25\Delta h_1(t) - 0.25\Delta h_2(t)$$

$$q_s(t) \approx q_s(0) + \left.\frac{K_2}{2\sqrt{h_2}}\right|_0 \left(h_2(t) - h_2(0)\right)$$

$$\Rightarrow \Delta q_s(t) = 0.25\Delta h_2(t)$$

A continuación pasamos al dominio de Laplace, omitimos el símbolo Δ por simplicidad en la notación.

$$Q_e(s) - Q(s) = A_1 s \cdot H_1(s)$$
$$Q(s) - Q_s(s) = A_2 s \cdot H_2(s)$$
$$Q(s) = 0.25H_1(s) - 0.25H_2(s)$$
$$Q_s(s) = 0.25H_2(s)$$

c) A continuación, calculamos la función de transferencia:

PROBLEMA 3 (3 puntos)

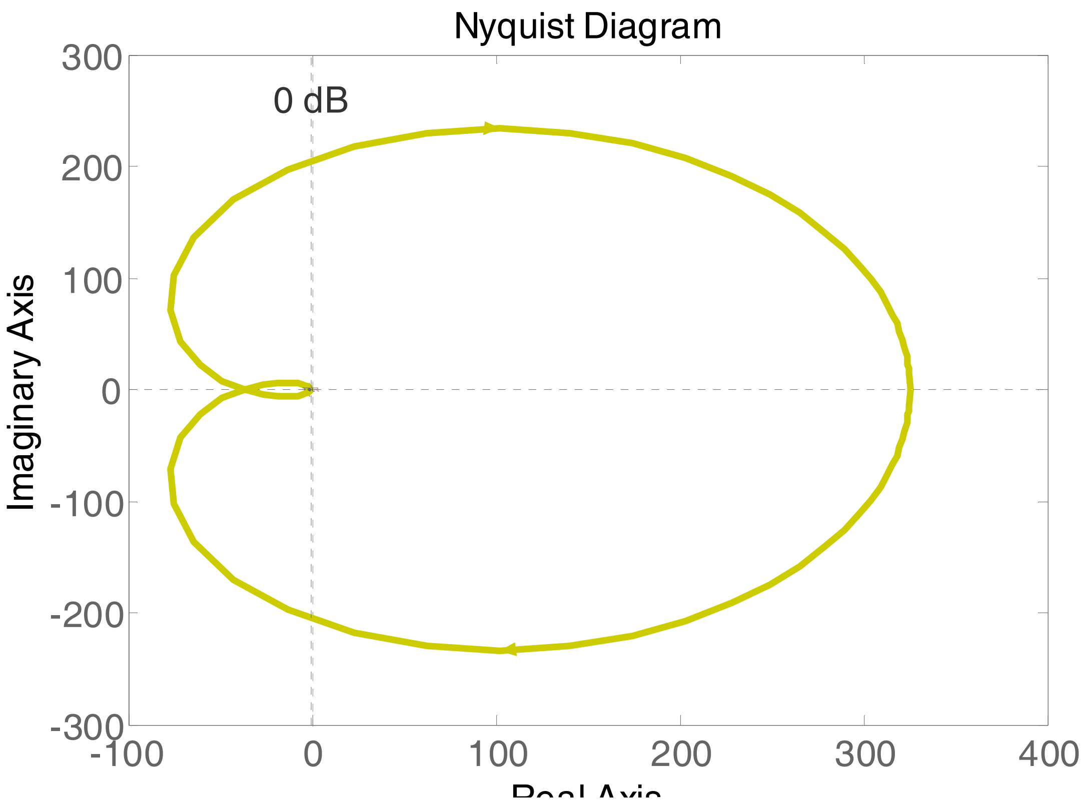
En la figura se muestra el diagrama de bode de *G(s)*. Supóngase que el sistema es de fase mínima y está realimentado con ganancia unitaria. Realice las siguientes cuestiones:

a) Calcule, utilizando el gráfico, el margen de fase γ, el margen de ganancia, la frecuencia de cruce de fase ω_f y la frecuencia de cruce de ganancia ω_g.
b) Dibuje el diagrama de Nyquist del sistema. Indique, al menos, los puntos significativos que ha calculado en el apartado a).
c) Para el sistema realimentado, indique el valor de la ganancia K, para la cual el sistema deja de ser estable.
d) Diseñe un regulador de atraso de fase de manera que γ = 35º y el error en régimen permanente sea menor del 5%.

a) Mirando el gráfico:

ω_g= 20 rad/s
ω_f =32 rad/s
γ=20º aprox
K_g=7.5dB

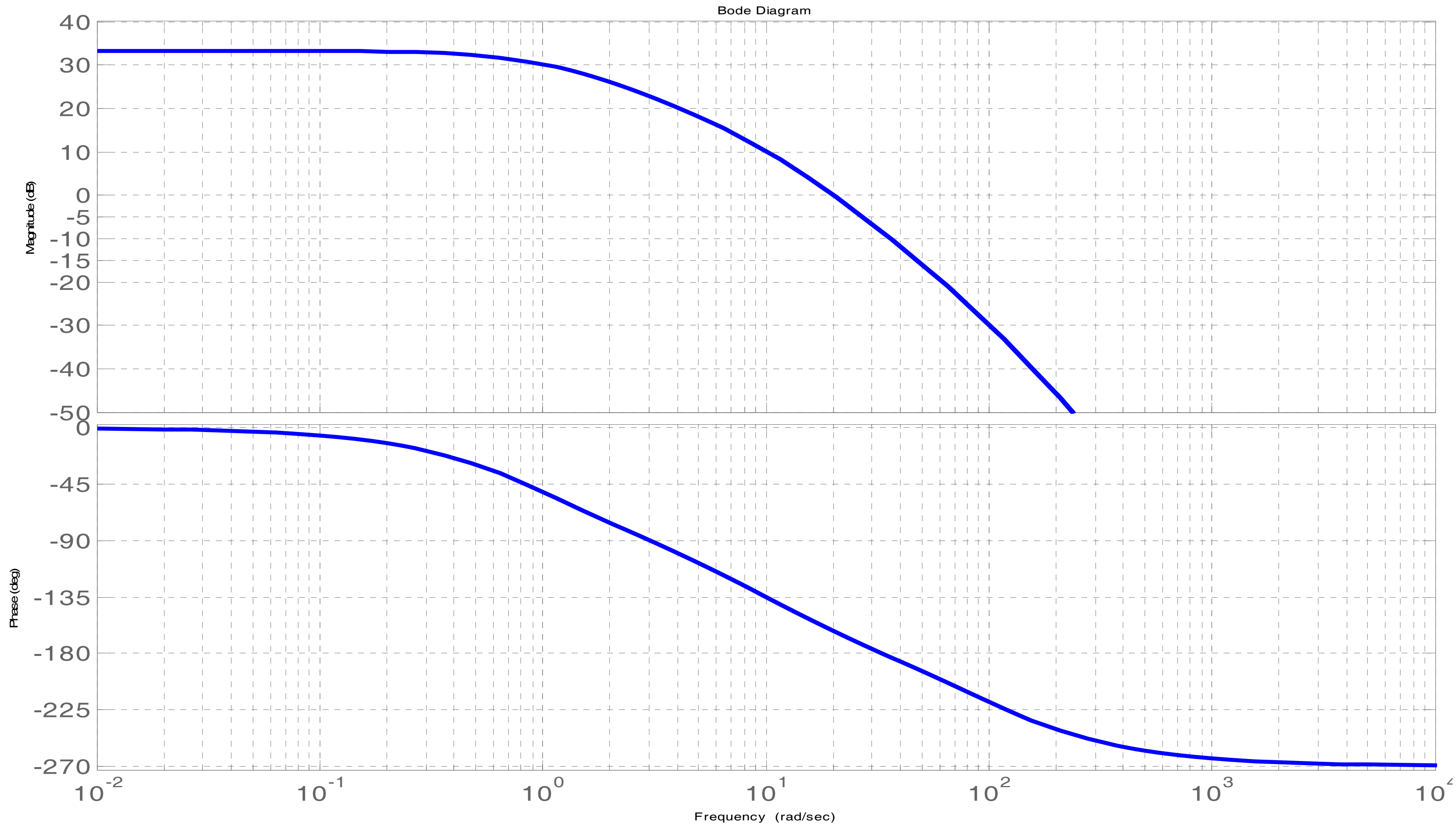
b) El diagrama de Nyquist, de forma aproximada, es como el de la figura:



c) Dado que el margen de ganancia es 7.5dB, tenemos que la ganancia límite para la que el sistema es estable es:

20logK = 7.5 → K=2.37

d) Diseño según los ejercicios vistos en clase



Bode Diagram
Magnitude (dB)
40
30
20
10
0
-5
-10
-15
-20
-30
-40
-50
Phase (deg)
0
-45
-90
-135
-180
-225
-270
10^-2
10^-1
10^0
10^1
10^2
10^3
10^4
Frequency (rad/sec)