UNIVERSITAS Miguel Hernández

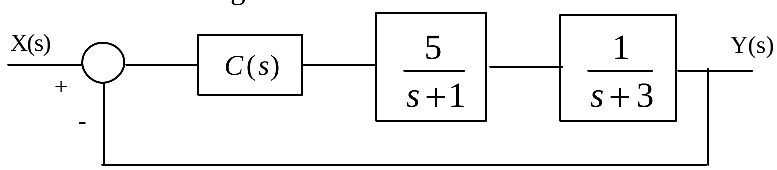
3º Ingeniería Telecomunicación
2º ITT Sistemas Electrónicos
2º ITT Sistemas de Telecomunicación

Autómatas y Sistemas de Control

EXAMEN SISTEMAS DE CONTROL 9-9-2003

PROBLEMA 1

Considérese el sistema de la figura:



Se pide diseñar el regulador **C(s)** más sencillo posible que haga cumplir a la planta las siguientes especificaciones ante entrada escalón:

- Sobreoscilación = 25%
- Tiempo de pico = 1 segundo
- Error de posición en régimen permanente = 4%

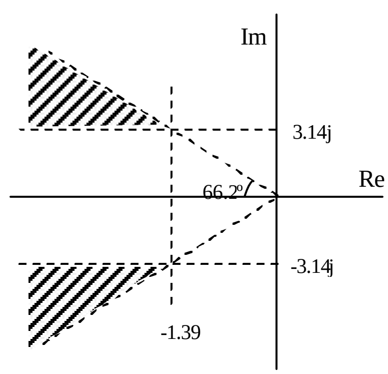
VALORACIÓN: 3 puntos

SOLUCIÓN

En primer lugar, se expresan las especificaciones pedidas para el régimen transitorio como la zona del plano complejo donde podrían encontrarse los polos del sistema:

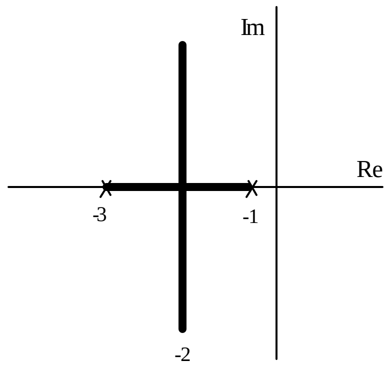
$$t_p = \frac{p}{w_d} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad w_d \geq 3.14$$

$$M_p = e^{-\frac{p}{\tan q}} \leq 0.25 \quad \Rightarrow \quad q \leq 66.2^{o}$$



A continuación se prueba con el más sencillo de los reguladores, el proporcional [C(s)=K]. Este regulador será válido si el LDR del sistema pasa por la zona válida. El trazado de este LDR es muy simple:

$$G(s) = \frac{5}{(s+1)(s+3)}$$



Podemos ver cómo el LDR pasa por la zona válida, por lo tanto el regulador tipo P será suficiente para cumplir las especificaciones en régimen permanente.

Para que el comportamiento en régimen permanente sea lo mejor posible, se elegirá la constante K del regulador lo más grande posible sin que el LDR se salga de la zona válida: por tanto se buscará el valor de K para el cual el LDR pasa por el punto de coordenadas -2+4.53j. Se empleará el criterio del módulo:

$$5K = \frac{\prod |s - p_i|}{\prod |s - z_i|} = \sqrt{4.53^2 + 1^2} \cdot \sqrt{4.53^2 + 1^2} = 21.52 \quad \Rightarrow \quad K = 4.3$$

Sólo falta comprobar si este regulador cumple las especificaciones en régimen permanente (error de posición menor del 4%):

$$K_p = \lim_{s \to 0} [C(s) \cdot G(s)] = \lim_{s \to 0} \left[4.3 \cdot \frac{5}{(s+1)(s+3)} \right] = 7.17$$

$$e_p = \frac{1}{1 + K_p} = 0.122 = 12.2\% > 4\% \quad \Rightarrow \quad \text{el regulador no es válido}$$

Para corregir el error en régimen permanente se introduce un efecto integral en el regulador:

$$C(s) = K \cdot \frac{s+z}{z+p}$$

- La constante K es la obtenida para el regulador proporcional: K = 4.3
- La situación del cero z se elige a 1/6 del valor real de los polos deseados:

$$z = \frac{2}{6} = 0.33$$

- Por último, la situación del polo p se elige de modo que se cumpla la condición de error en régimen permanente solicitada:

$$e_p = \frac{1}{1+K_p} \leq 0.04 \quad \Rightarrow \quad K_p \geq 24$$

$$K_p = \lim_{s\to 0}[C(s)\cdot G(s)] = \lim_{s\to 0}\left[4.3\cdot\frac{s+0.33}{s+p}\cdot\frac{5}{(s+1)(s+3)}\right] = \frac{2.36}{p} \geq 24 \quad \Rightarrow \quad p \leq 0.098$$

Se elige p = 0.098 para afectar lo menos posible al comportamiento en régimen permanente y el regulador queda:

$$C(s) = 4.3\cdot\frac{s+0.33}{z+0.098}$$

PROBLEMA 2

Sea el sistema definido por la siguiente ecuación diferencial, donde **x(t)** representa la entrada e **y(t)** representa la salida:

$$x^2(t) + \frac{dx(t)}{dt} + 2\cdot x(t)\cdot y(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\cdot\frac{dy(t)}{dt}$$

Suponiendo que el punto de funcionamiento del sistema queda definido por **x(0) = 2**, se pide:

- Obtener la función de transferencia del sistema **G(s) = Y(s)/X(s).**
- Determinar si el sistema G(s) es estable.

VALORACIÓN: 2 puntos

SOLUCIÓN

En primer lugar se calcula el punto de funcionamiento del sistema igualando las derivadas a cero:

$$\left.\begin{array}{l} x^2(0) + 0 + 2\cdot x(0)\cdot y(0) = 0 + 3\cdot 0 \\ x(0) = 2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad y(0) = -1$$

A continuación se linealiza la ecuación diferencial y se expresa en variables incrementales:

$$\frac{d}{dx(t)}\left[x^2(t)\right]_0 \Delta x(t) + \Delta \dot{x}(t) + \frac{d}{dx(t)}\left[2\cdot x(t)\cdot y(t)\right]_0 \Delta x(t) +$$

$$+\frac{d}{dy(t)}\left[2\cdot x(t)\cdot y(t)\right]_0 \Delta y(t) = \Delta \ddot{y}(t) + 3\cdot \Delta \dot{y}(t)$$

El resultado es:

$$\Delta \dot{x}(t) + 2\Delta x(t) = \Delta \ddot{y}(t) + 3\cdot \Delta \dot{y}(t) - 4\Delta y(t)$$

A continuación se transforma la ecuación al dominio de Laplace, resultando:

$$s\cdot X(s) + 2\cdot X(s) = s^2\cdot Y(s) + 3s\cdot Y(s) - 4\cdot Y(s)$$

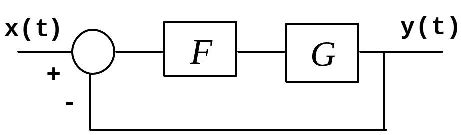
La función de transferencia se obtiene despejando:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+2}{s^2+3s-4}$$

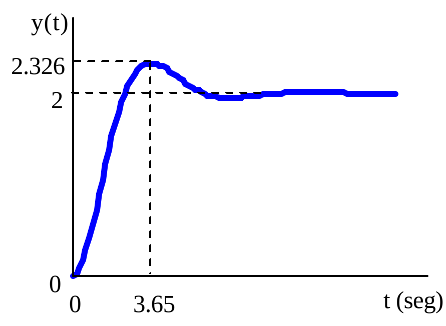
Dado que no todos los términos del denominador tienen el mismo signo, el sistema G(s) es inestable.

PROBLEMA 3

En el sistema de la figura, se conoce la función de transferencia del bloque **G** y la señal de respuesta **y(t)** cuando la entrada **x(t)** es un escalón unitario:



$$G(s) = \frac{1}{s}$$



Se pide:

- Obtener la función de transferencia **F(s)** del bloque **F**.
- Determinar si **F(s)** es estable.

VALORACIÓN: 2.5 puntos

SOLUCIÓN

En primer lugar se simplifica el sistema, llegando a una función de transferencia que denominaremos M(s):

$$X(s) \longrightarrow \boxed{M(s)} \longrightarrow Y(s) \qquad \boxed{M(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{F(s)\cdot G(s)}{1+F(s)\cdot G(s)}}$$

De esa expresión se puede despejar F(s), llegando a:

$$F(s) = \frac{M(s)}{G(s) - M(s)\cdot G(s)}$$

De acuerdo con las gráficas ofrecidas, el sistema M(s) será un sistema de segundo orden:

$$M(s) = \frac{Kw_n^2}{s^2 + 2xw_n s + w_n^2}$$

A continuación se calcula cada uno de los coeficientes:

$$K = 2$$

$$M_p = \frac{2.326-2}{2} = e^{-\frac{p}{tgq}} \quad \Rightarrow \quad q = 60^{o}$$

$$t_p = 3.65 = \frac{p}{w_d} \quad \Rightarrow \quad w_d = 0.86$$

$$x = \cos q = 0.5$$

$$w_n = \frac{w_d}{senq} = 1$$

El resultado final es:

$$M(s) = \frac{2}{s^2 + s + 1}$$

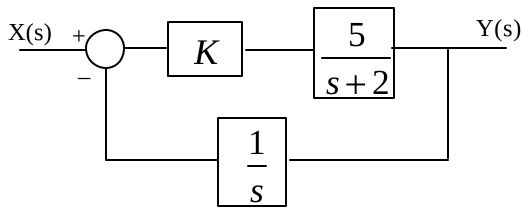
A partir de M(s) se puede despejar F(s), resultando:

$$F(s) = \frac{2s}{s^2 + s - 1}$$

F(s) es inestable dado que no todos los términos del denominador tienen el mismo signo.

PROBLEMA 4

Considérese el sistema de la figura:



Se pide:

- Calcular el margen de ganancia $\mathbf{K_g}$ para un valor de **K = 1.**
- Calcular el margen de fase **?** para un valor de **K = 1.**
- Indicar para qué valores del parámetro **K** se cumple **? = 75º.**

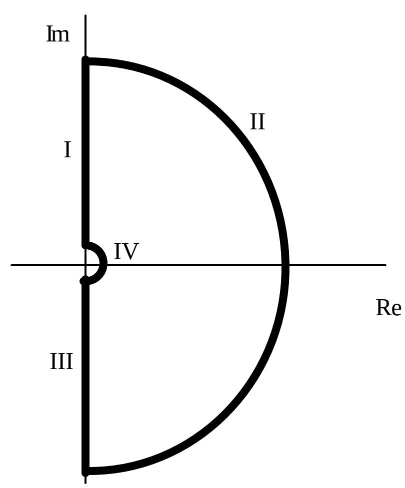
VALORACIÓN: 2.5 puntos

SOLUCIÓN

La función de transferencia en cadena abierta a utilizar es:

$$G(s)\cdot H(s) = \frac{5K}{s(s+2)}$$

Se traza en primer lugar el camino **origen** de Nyquist, que rodea al origen por existir un polo en s=0:



Calculamos el camino imagen tramo por tramo:

- Tramo I: s = j? ? = (0,8)

$$\left|G(s)H(s)\right| = \frac{5K}{w\sqrt{w^2+4}} = \begin{cases} \infty & w \to 0 \\ 0 & w \to \infty \end{cases}$$

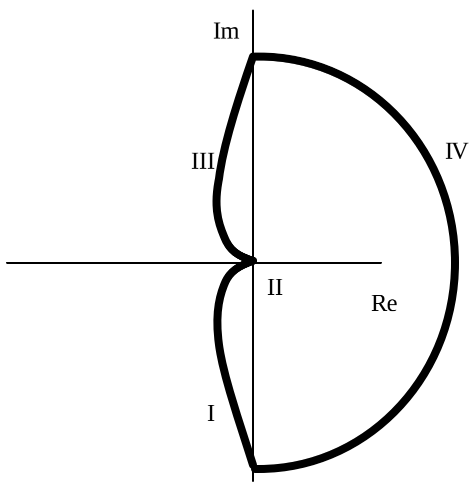
$$\arg\left[G(s)H(s)\right] = -90 - \arctan\left(\frac{w}{2}\right) = \begin{cases} -90 & w \to 0 \\ -180 & w \to \infty \end{cases}$$

- Tramo II: la imagen será un punto en el origen
- Tramo III: la imagen será simétrica a la del tramo I.
- Tramo IV: s = e·e^{jf} f = (-90,+90)

$$\left|G(s)H(s)\right| = \frac{5K}{e \cdot 2} = 0$$

$$\arg\left[G(s)H(s)\right] = -j = (+90,-90)$$

La representación completa del camino imagen queda como sigue:



Para un valor de K = 1, el margen de ganancia $\mathbf{K_g}$ será infinito, dado que por mucho que aumente la ganancia el camino imagen nunca rodeará al punto -1.

Para calcular el margen de fase **?** cuando K = 1, será necesario calcular, dentro del tramo I, cual es la fase correspondiente a un módulo unidad:

$$\left|G(s)H(s)\right| = \frac{5K}{w\sqrt{w^2+4}} = 1 \quad \Rightarrow \quad w = 1.84 \ rad\ /\ s$$

$$\left[\arg\left(G(s)\cdot H(s)\right)\right]_{w=1.84} = -90 - arctg\left(\frac{w}{2}\right) = -132.6^{\circ}$$

$$g = 180 - 132.6 = 47.4^{\circ}$$

Para buscar los valores de K que ofrecen un margen de fase **?** igual o superior a 75º, se buscará, dentro del tramo I, el valor de K que hace que el módulo sea igual o inferior a la unidad para una fase de 75 – 180 = -105º:

$$\arg\left[G(s)H(s)\right] = -90 - \arctan\left(\frac{w}{2}\right) = -105 \quad \Rightarrow \quad w = 0.54\ rad/s$$

$$\left[\left|G(s)H(s)\right|\right]_{w=0.54} = \frac{5K}{w\sqrt{w^2+4}} = 4.47K$$

$$4.47K \leq 1 \quad \Rightarrow \quad K \leq 0.224$$