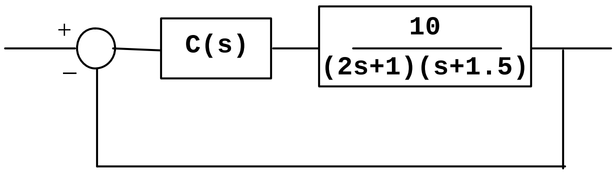
EXAMEN SISTEMAS DE CONTROL 7-9-2002

PROBLEMA 1

Para el sistema de la figura, diseñar el regulador **C(s)** más sencillo posible que haga cumplir a la planta las siguientes especificaciones ante entrada escalón:

- Sobreoscilación = 4.32%
- Tiempo de establecimiento =1.57s
- Error de posición = 48%



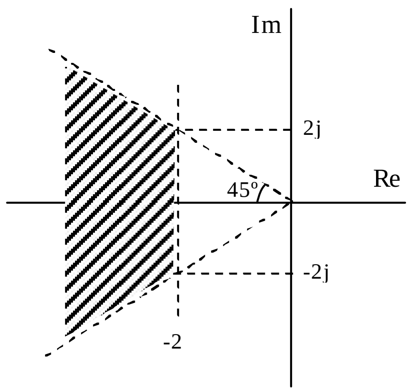
VALORACIÓN: 3 puntos

SOLUCIÓN

En primer lugar, se expresan las especificaciones pedidas para el régimen transitorio como la zona del plano complejo donde podrían encontrarse los polos del sistema:

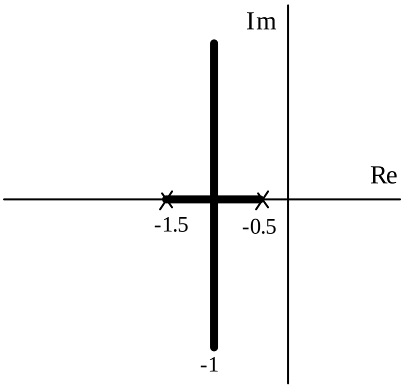
$$t_s = \frac{p}{s} \leq 1.57 \quad \Rightarrow \quad s \geq 2$$

$$M_p = e^{-\frac{p}{\tan q}} \leq 0.0432 \quad \Rightarrow \quad q \leq 45º$$



A continuación se prueba con el más sencillo de los reguladores, el proporcional. Este regulador será válido si el LDR del sistema pasa por la zona válida. El trazado de este LDR es muy simple:

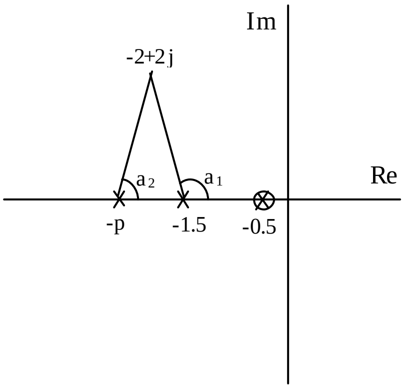
$$G(s) = \frac{5}{(s+1.5)(s+0.5)}$$



Queda claro que el LDR no pasa por la zona válida, por tanto el regulador tipo P no es válido, será necesario probar con un regulador tipo PD:

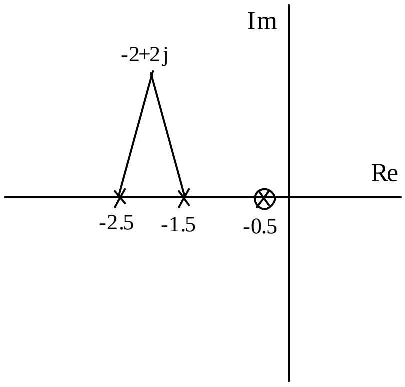
$$C(s) = K \cdot \frac{s+z}{s+p}$$

El cero del regulador (-z) se elegirá de modo que cancele al polo más significativo del sistema a controlar (salvo polos en el origen) en cadena abierta, por tanto z = 0.5
El polo del regulador se elegirá de acuerdo con el criterio del argumento de modo que el LDR del sistema más el controlador pase por el punto deseado (-2 ± 2j):



$$-a_1 - a_2 = 180 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 76^{\circ} \quad \Rightarrow \quad p = 2.5$$

El valor de la constante K se elegirá de modo que se cumpla el criterio del módulo:



$$K' = \frac{\prod |s-p_i|}{\prod |s-z_i|} = \sqrt{0.5^2+2^2}\cdot\sqrt{0.5^2+2^2} = 4.25$$

$$K' = 5K \quad \Rightarrow \quad K = 0.85$$

El regulador tipo PD sería:

$$C(s) = 0.85\cdot\frac{s+0.5}{s+2.5}$$

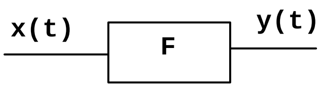
Por último, es necesario comprobar si este regulador es válido para los requisitos pedidos en régimen permanente (e_p = 48%)

$$K_p = \lim_{s\to 0}\left[C(s)\cdot G(s)\right] = \lim_{s\to 0}\left[0.85\cdot\frac{s+0.5}{s+2.5}\cdot\frac{5}{(s+1.5)(s+0.5)}\right] = 1.13$$

$$e_p = \frac{1}{1+K_p} = 0.47 = 47\% < 48\% \quad \Rightarrow \quad \text{el regulador es válido}$$

PROBLEMA 2

Un sistema **F** responde a la siguiente ecuación diferencial:



$$\boxed{x(t)+2\cdot\frac{dx(t)}{dt} = 2\cdot\frac{d^3y(t)}{dt^3}+\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\cdot\frac{dy(t)}{dt}+3\cdot y^2(t)}$$

Se pide:

- Obtener la función de transferencia del sistema F(s)
- Determinar si el sistema es estable

Dato: el sistema se estudiará alrededor del punto de funcionamiento definido por x(0)=300.

VALORACIÓN: 2 puntos

SOLUCIÓN

Cálculo del punto de funcionamiento (derivadas igual a cero):

$$\left.\begin{array}{l} x(0)+0=0+0+0+3y^2(0) \\ x(0)=300 \end{array}\right\} y(0)=10$$

Linealización y expresión en variables incrementales:

$$\Delta x(t)+2\Delta \dot{x}(t)=2\Delta \dddot{y}(t)+\Delta \ddot{y}(t)+5\Delta \dot{y}(t)+\left[6y(0)\right]\Delta y(t)$$

$$\Delta x(t)+2\Delta \dot{x}(t)=2\Delta \dddot{y}(t)+\Delta \ddot{y}(t)+5\Delta \dot{y}(t)+60\Delta y(t)$$

Paso al dominio de Laplace y función de transferencia:

$$X(s)+2sX(s)=2s^3Y(s)+s^2Y(s)+5sY(s)+60Y(s)$$

$$F(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{2s+1}{2s^3+s^2+5s+60}$$

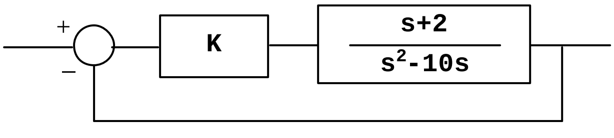
Estabilidad: el sistema puede ser estable porque todos los coeficientes del polinomio del denominador tienen el mismo signo. Por tanto, se calcula la tabla de Routh:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 2 & 5 \\ s^2 & 1 & 60 \\ s^1 & -115 & 0 \\ s^0 & 60 & \end{array}$$

Se producen dos cambios de signo en la primera columna de la tabla de Routh, por lo que el sistema es inestable (tiene dos polos inestables).

PROBLEMA 3

Estudiar <u>en el dominio de la frecuencia</u> la estabilidad del sistema de la figura inferior, en función de los valores de K. Se considerarán únicamente valores positivos de K.



Dato: fórmula de la tangente de la suma de dos ángulos:

$$tg(a+b)=\frac{tg(a)+tg(b)}{1-tg(a)\cdot tg(b)}$$

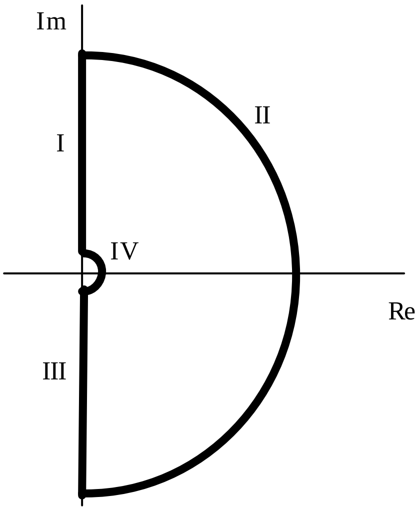
VALORACIÓN: 2.5 puntos

SOLUCIÓN

La función de transferencia en bucle abierto es:

$$G(s)\cdot H(s) = \frac{K(s+2)}{s(s-10)}$$

El camino origen de Nyquist deberá rodear al punto origen por existir un polo en cero. Contendrá los 4 tramos que se muestran:



Calculamos el camino imagen tramo por tramo:

- Tramo I: s = j?   ? = (0,8)

$$\left|G(s)H(s)\right| = \frac{K\sqrt{w^2+4}}{w\sqrt{w^2+100}} = \begin{cases} \infty & w \to 0 \\ 0 & w \to \infty \end{cases}$$

$$\arg\left[G(s)H(s)\right] = \arctan\left(\frac{w}{2}\right) - 90 - \left[180 - \arctan\left(\frac{w}{10}\right)\right] = \begin{cases} -270 & w \to 0 \\ -90 & w \to \infty \end{cases}$$

- Tramo II: la imagen será un punto en el origen.

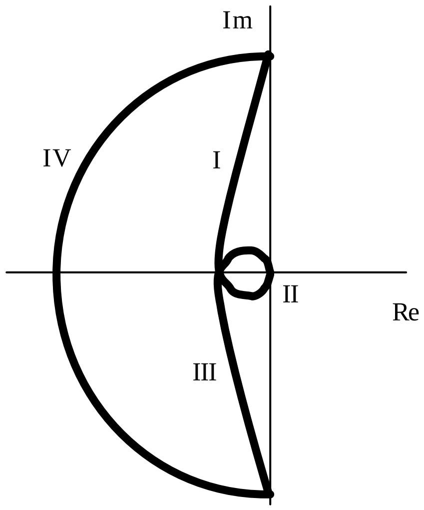
- Tramo III: la imagen será simétrica a la del tramo I.

- Tramo IV: s = e·e^{jf} f = (-90,+90)

$$\left|G(s)H(s)\right| = \frac{K\cdot 2}{e\cdot 10} = 0$$

$$\arg\left[G(s)H(s)\right] = 180 - j \; = (+270,+90)$$

La representación completa del camino imagen queda como sigue:



Para poder estudiar la estabilidad es necesario conocer el punto de corte del tramo I con el eje real, o el punto en el que la fase se hace -180º en el tramo I:

$$-270+\arctan\left(\frac{w}{2}\right)+\arctan\left(\frac{w}{10}\right)=-180$$

$$\arctan\left(\frac{w}{2}\right)+\arctan\left(\frac{w}{10}\right)=90$$

$$\tan\left[\arctan\left(\frac{w}{2}\right)+\arctan\left(\frac{w}{10}\right)\right]=\tan\left[90^{o}\right]$$

$$\frac{\frac{w}{2}+\frac{w}{10}}{1-\frac{w}{2}\cdot\frac{w}{10}}=\infty \quad \Rightarrow \quad w=\sqrt{20}\ rad/s$$

$$\left|G(s)H(s)\right|_{w=4.47}=\frac{K\sqrt{20+4}}{\sqrt{20}\sqrt{20+100}}=0.1K$$

Por tanto, el número de vueltas N que da el camino imagen alrededor del punto -1 es:

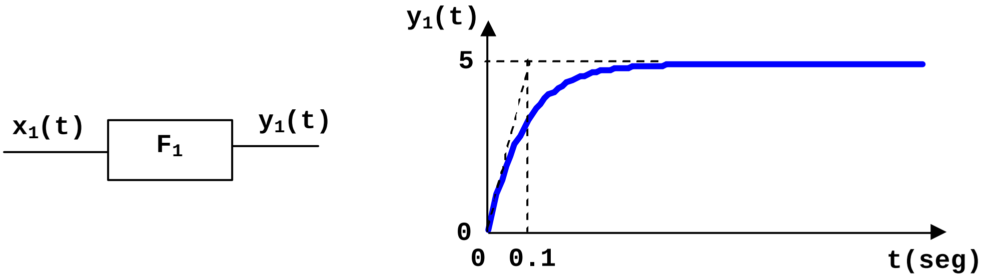
K>10 ? N = -1
K<10 ? N = +1

El número de polos inestables en cadena abierta P es P = 1 (polo en s = -10). Por tanto, aplicando la fórmula Z = N + P se obtiene:

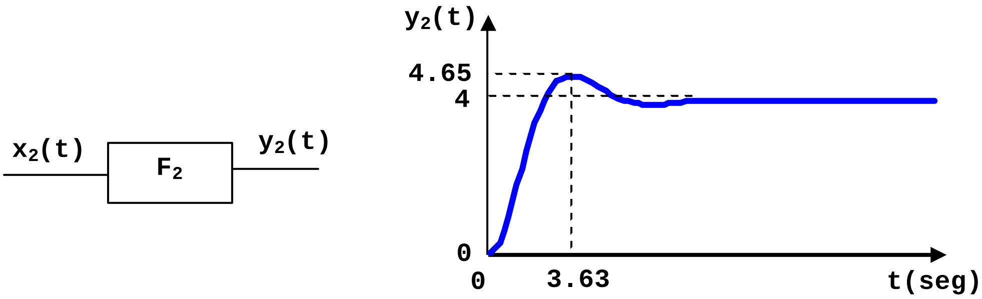
K>10 ? Z = 0 (ningún polo inestable en cadena cerrada) ESTABLE
K<10 ? Z = 2 (dos polos inestables en cadena cerrada) INESTABLE

PROBLEMA 4

Un sistema desconocido **F_1** responde ante entrada **$x_1(t)$** escalón unitario con la señal de salida **$y_1(t)$** que se muestra en la figura:

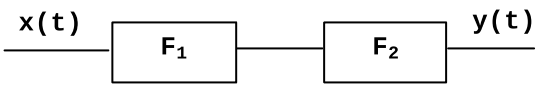


Otro sistema desconocido **F_2** responde ante entrada **$x_2(t)$** escalón unitario con la señal de salida **$y_2(t)$** que se muestra en la figura:



Se pide:

- Obtener las funciones de transferencia **$F_1(s)$** y **$F_2(s)$**.
- Para el sistema compuesto por los bloques **$F_1(s)$** y **$F_2(s)$** en serie:



Obtener el sistema equivalente de segundo orden, si es posible.

VALORACIÓN: 2.5 puntos

SOLUCIÓN

De acuerdo con su respuesta a escalón, el sistema $F_1(s)$ es un sistema de primer orden con ganancia 5 y constante de tiempo 0.1 segundos:

$$F_1(s) = \frac{K}{1+Ts} = \frac{5}{1+0.1s}$$

Del mismo modo, el sistema $F_2(s)$ es un sistema de segundo orden, del que se conocen los siguientes datos:

- Ganancia: K = 4
- Sobreoscilación: $M_p = 0.65/4 = 0.1625 = 16.25\%$
- Tiempo de pico: $t_p = 3.63$s

A partir de estos datos es posible obtener la función de transferencia del sistema $F_2(s)$:

$$F_2(s) = \frac{Kw_n^2}{s^2 + 2xw_n s + w_n^2}$$

$$M_p = e^{-\frac{p}{tgq}} = 0.1625 \quad \Rightarrow \quad q = 60º$$

$$x = \cos(q) = 0.5$$

$$t_p = \frac{p}{w_d} = 3.63 \quad \Rightarrow \quad w_d = 0.865$$

$$w_n = \frac{w_d}{sen(q)} = 1$$

$$F_2(s) = \frac{4}{s^2 + s + 1}$$

El sistema F(s) resultante de unir $F_1(s)$ y $F_2(s)$ en serie quedará:

$$F(s) = F_1(s) \cdot F_2(s) = \frac{20}{(1+0.1s)(s^2+s+1)} = \frac{200}{(s+10)(s+0.5-0.87j)(s+0.5+0.87j)}$$

Se debe comprobar si el polo en s = -10 es despreciable con respecto a los polos complejos conjugados:

$$\frac{10}{0.5} = 20 > 6 \quad \Rightarrow \quad \text{el polo se puede despreciar}$$

Por tanto, sólo resta ajustar la ganancia:

$$F(s) \approx F'(s) = \frac{K}{s^2 + s + 1}$$

$$\lim_{s \to 0} F(s) = \lim_{s \to 0} F'(s) \quad \Rightarrow \quad K = 20$$

$$F'(s) = \frac{20}{s^2 + s + 1}$$