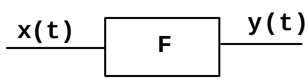
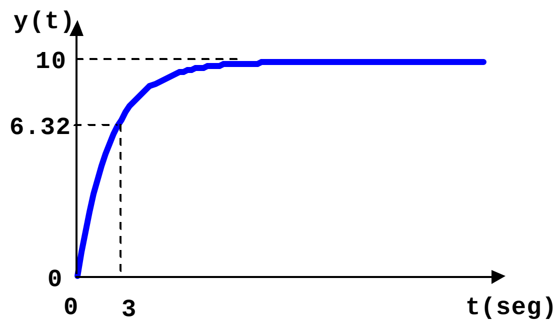
EXAMEN SISTEMAS DE CONTROL 30-6-2003

PROBLEMA 1

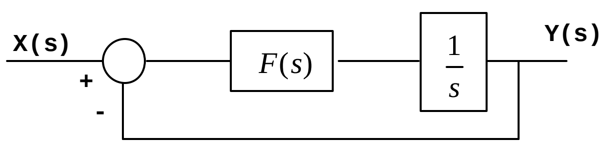
El sistema desconocido **F** de la figura inferior responde ante entrada **x(t)** escalón de amplitud 5 con la señal de salida **y(t)** que se muestra en el gráfico:





Se pide:

- Obtener la función de transferencia del sistema **F(s)**.
- Razonar si el siguiente sistema sería estable:



VALORACIÓN: 2 puntos

SOLUCIÓN

De acuerdo con la repuesta ante escalón, el sistema F(s) es de primer orden:

$$F(s) = \frac{K}{1+Ts}$$

La ganancia K será el valor final de la respuesta dividido por la amplitud del escalón de entrada:

$$K = \frac{10}{5} = 2$$

La constante de tiempo T se indica como el tiempo que tarda la señal en alcanzar el 63.2% del valor final. Por tanto, T = 3 seg.

La función de transferencia resultante es:

$$F(s) = \frac{2}{1+3s}$$

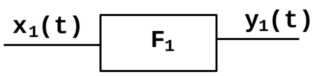
Para ver si el sistema propuesto es estable se reduce el diagrama de bloques:

$$M(s)=\frac{F(s)\cdot\frac{1}{s}}{1+F(s)\cdot\frac{1}{s}}=\frac{2}{3s^2+s+2}$$

Los polos o raíces del denominador son s = -0.17 ± 0.8j. Dado que ambos polos tienen parte real negativa, el sistema es estable.

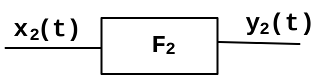
PROBLEMA 2

De los sistemas $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$ se conocen las ecuaciones diferenciales que relacionan sus señales de entrada y sus señales de salida:



$$10\cdot\frac{d^2y_1(t)}{dt^2}+21\cdot\frac{dy_1(t)}{dt}+8\cdot\sqrt{y_1(t)}=200\cdot\frac{dx_1(t)}{dt}+2\cdot x_1(t)+10$$

$$pto.\ funcionamiento:\quad x_1(0)=3$$

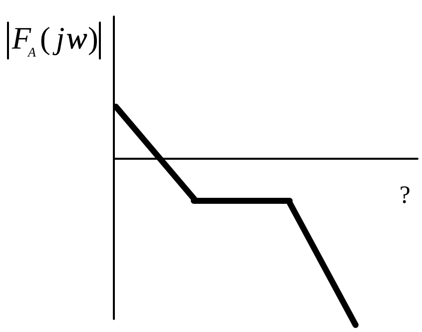


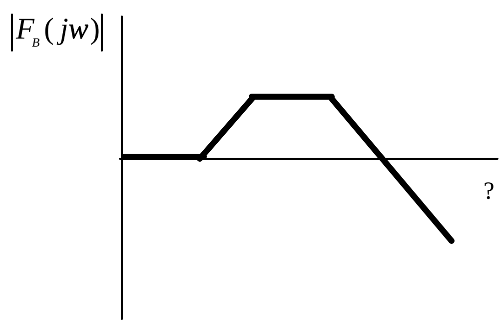
$$\frac{d^3y_2(t)}{dt^3}+20\cdot\frac{d^2y_2(t)}{dt^2}+100\cdot\frac{dy_2(t)}{dt}=x_2(t)+10\cdot\frac{dx_2(t)}{dt}\cdot y_2(t)$$

$$pto.\ funcionamiento:\quad y_2(0)=2$$

Se pide:

- Obtener las funciones de transferencia $\mathbf{F_1(s)}$ y $\mathbf{F_2(s)}$.
- Indicar razonadamente cuál de los diagramas de Bode mostrados a continuación corresponde al sistema $\mathbf{F_1}$ y cuál al sistema $\mathbf{F_2}$:





VALORACIÓN: 2.5 puntos

SOLUCIÓN

Comenzamos con F_1:

Punto de funcionamiento: igualando a cero las derivadas temporales se obtiene:

$$x_1(0) = 3 \quad \Rightarrow \quad y_1(0) = 4$$

A continuación se linealiza y expresa en variables incrementales la ecuación diferencial:

$$10\Delta \ddot{y}_1(t) + 21\Delta \dot{y}_1(t) + \frac{d}{dy_1(t)}\left[8\sqrt{y_1(t)}\right]_0 \Delta y_1(t) = 200\Delta \dot{x}_1(t) + 2\Delta x_1(t)$$

$$10\Delta \ddot{y}_1(t) + 21\Delta \dot{y}_1(t) + 2\Delta y_1(t) = 200\Delta \dot{x}_1(t) + 2\Delta x_1(t)$$

El siguiente paso es transformar la ecuación al dominio de Laplace, resultando:

$$Y_1(s)\cdot\left[10s^2 + 21s + 2\right] = X_1(s)\cdot\left[200s + 2\right]$$

La función de transferencia se obtiene despejando:

$$F_1(s) = \frac{Y_1(s)}{X_1(s)} = \frac{200s + 2}{10s^2 + 21s + 2}$$

Se repite el mismo proceso con F_2:

Punto de funcionamiento: igualando a cero las derivadas temporales se obtiene:

$$y_2(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad x_2(0) = 0$$

A continuación se linealiza y expresa en variables incrementales la ecuación diferencial:

$$\Delta \dddot{y}_2(t) + 20\Delta \ddot{y}_2(t) + 100\Delta \dot{y}_2(t) =$$

$$= \Delta x_2(t) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}(t)}\left[10\,\dot{x}_2(t)y_2(t)\right]_0 \Delta \dot{x}_2(t) + \frac{\partial}{\partial y_2(t)}\left[10\,\dot{x}_2(t)y_2(t)\right]_0 \Delta y_2(t)$$

$$\Delta \dddot{y}_2(t) + 20\Delta \ddot{y}_2(t) + 100\Delta \dot{y}_2(t) = \Delta x_2(t) + 20\Delta \dot{x}_2(t)$$

El siguiente paso es transformar la ecuación al dominio de Laplace, resultando:

$$Y_2(s)\cdot\left[s^3 + 20s^2 + 100s\right] = X_2(s)\cdot\left[20s + 1\right]$$

La función de transferencia se obtiene despejando:

$$F_2(s) = \frac{Y_2(s)}{X_2(s)} = \frac{20s + 1}{s^3 + 20s^2 + 100s}$$

Para determinar qué diagrama de Bode corresponde a cada función de transferencia, se factorizan ambas:

$$F_1(s) = \frac{200s + 2}{10s^2 + 21s + 2} = \frac{1 + 100s}{(1 + 0.5s)(1 + 10s)}$$

$$F_2(s) = \frac{20s + 1}{s^3 + 20s^2 + 100s} = \frac{1 + 20s}{100 \cdot s \cdot (1 + 0.1s)^2}$$

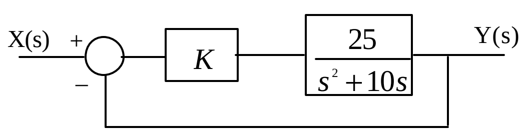
El diagrama F_A corresponde a $F_2(s)$ porque presenta un polo en el origen seguido de un cero (frecuencia de corte 1/20 rad/s) y un polo doble (frecuencia de corte 1/0.1 rad/s).

El diagrama F_B corresponde a $F_1(s)$ porque presenta un cero (frecuencia de corte 1/100 rad/s) seguido de dos polos (frecuencias de corte 1/10 rad/s y 1/0.5 rad/s).

PROBLEMA 3

En el sistema de la figura, y suponiendo que K sólo toma valores positivos, calcular:

- Valores de K que hacen al sistema estable.
- Valores de K que hacen que el margen de fase del sistema sea mayor de 25º.



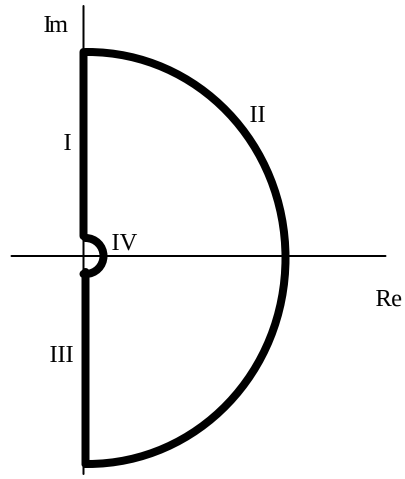
VALORACIÓN: 2.5 puntos

SOLUCIÓN

Se trabaja en el dominio de la frecuencia para poder calcular márgenes de estabilidad. La función de transferencia en cadena abierta a utilizar es:

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{25K}{s(s + 10)}$$

Se traza en primer lugar el camino **origen** de Nyquist, que rodea al origen por existir un polo en s=0:



Calculamos el camino imagen tramo por tramo:

- Tramo I: s = j?   ? = (0,8)

$$\left|G(s)H(s)\right| = \frac{25K}{w\sqrt{w^2+100}} = \begin{cases}\infty & w \to 0 \\ 0 & w \to \infty\end{cases}$$

$$\arg\left[G(s)H(s)\right] = -90 - \arctan\left(\frac{w}{10}\right) = \begin{cases}-90 & w \to 0 \\ -180 & w \to \infty\end{cases}$$

- Tramo II: la imagen será un punto en el origen.

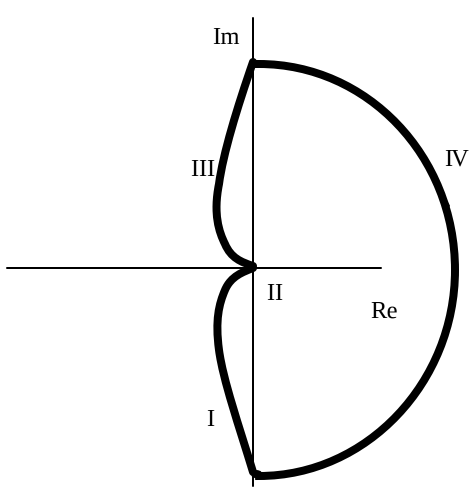
- Tramo III: la imagen será simétrica a la del tramo I.

- Tramo IV: s = e·e^{jf} f = (-90,+90)

$$\left|G(s)H(s)\right| = \frac{25K}{e \cdot 10} = 0$$

$$\arg\left[G(s)H(s)\right] = -j = (+90,-90)$$

La representación completa del camino imagen queda como sigue:



El camino imagen no rodea al punto -1 para ningún valor de K; como veremos esto significa que el sistema es estable para cualquier valor de K.

Z = N – P, donde:

- Z = número de polos inestables en cadena cerrada (a calcular)
- N = número de rodeos al punto -1 (= 0)
- P = número de polos dentro del camino origen en cadena abierta (= 0)

Por tanto, Z = 0 y el sistema es estable para todo valor de K.

Para calcular el valor de K que hace que el margen de fase sea ?=25º, se busca dentro del primer tramo el punto cuya fase sea -155º (180º - 25º = 155º):

$$\arg\left[G(s)H(s)\right] = -90 - \arctan\left(\frac{w}{10}\right) = -155 \quad \Rightarrow \quad w = 21.45\ rad/s$$

Para que el margen de fase sea mayor de 25º, el módulo a esta frecuencia deberá ser inferior a la unidad:

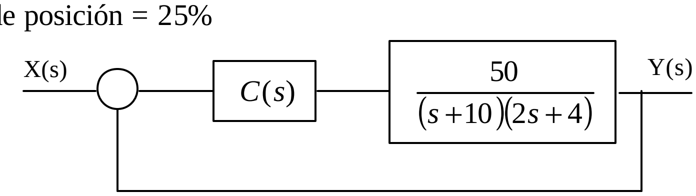
$$\left|G(s)H(s)\right| = \left[\frac{25K}{w\sqrt{w^2+100}}\right]_{w=21.45} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad K \leq 20.31$$

Por lo tanto el margen de fase será igual o superior a 25º para valores de K iguales o inferiores a 20.31.

<u>PROBLEMA 4</u>

Para el sistema de la figura, diseñar el regulador **C(s)** más sencillo posible que haga cumplir a la planta las siguientes especificaciones ante entrada escalón:

- Sobreoscilación = 2.37%
- Tiempo de establecimiento = 0.785s
- Error de posición = 25%



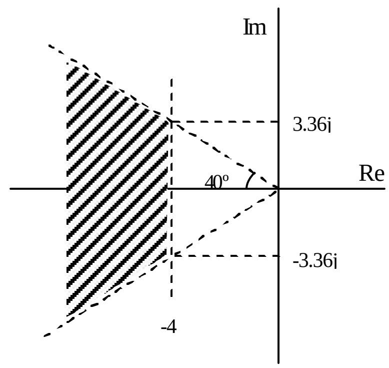
VALORACIÓN: 3 puntos

SOLUCIÓN

En primer lugar, se expresan las especificaciones pedidas para el régimen transitorio como la zona del plano complejo donde podrían encontrarse los polos del sistema:

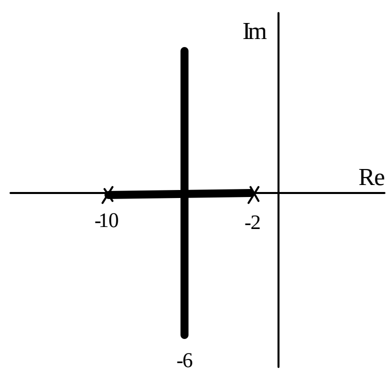
$$t_s = \frac{\pi}{\sigma} \leq 0.785 \quad \Rightarrow \quad \sigma \geq 4$$

$$M_p = e^{-\frac{\pi}{\tan\theta}} \leq 0.0237 \quad \Rightarrow \quad \theta \leq 40^{o}$$



A continuación se prueba con el más sencillo de los reguladores, el proporcional [C(s)=K]. Este regulador será válido si el LDR del sistema pasa por la zona válida. El trazado de este LDR es muy simple:

$$G(s) = \frac{25}{(s+10)(s+2)}$$



Podemos ver cómo el LDR pasa por la zona válida, por lo tanto el regulador tipo P será suficiente para cumplir las especificaciones en régimen permanente.

Para que el comportamiento en régimen permanente sea lo mejor posible, se elegirá la constante K del regulador lo más grande posible sin que el LDR se salga de la zona válida: por tanto se buscará el valor de K para el cual el LDR pasa por el punto de coordenadas -6+5.03j. Se empleará el criterio del módulo:

$$25K = \frac{\prod|s-p_i|}{\prod|s-z_i|} = \sqrt{5.03^2+4^2}\cdot\sqrt{5.03^2+4^2} = 41.3 \quad \Rightarrow \quad K = 1.65$$

Sólo falta comprobar si este regulador cumple las especificaciones en régimen permanente (error de posición menor del 25%):

$$K_p = \lim_{s\to 0}\left[C(s)\cdot G(s)\right] = \lim_{s\to 0}\left[1.65\cdot\frac{25}{(s+10)(s+2)}\right] = 2.06$$

$$e_p = \frac{1}{1+K_p} = 0.326 = 32.6\% > 25\% \quad \Rightarrow \quad \text{el regulador no es válido}$$

Para corregir el error en régimen permanente se introduce un efecto integral en el regulador:

$$C(s) = K\cdot\frac{s+z}{z+p}$$

- La constante K es la obtenida para el regulador proporcional: K = 1.65
- La situación del cero z se elige a 1/6 del valor real de los polos deseados:

$$z = \frac{6}{6} = 1$$

- Por último, la situación del polo p se elige de modo que se cumpla la condición de error en régimen permanente solicitada:

$$e_p = \frac{1}{1+K_p} \le 0.25 \quad \Rightarrow \quad K_p \ge 3$$

$$K_p = \lim_{s\to 0}\left[C(s)\cdot G(s)\right] = \lim_{s\to 0}\left[1.65\cdot\frac{s+1}{s+p}\cdot\frac{25}{(s+10)(s+2)}\right] = \frac{2.06}{p} \ge 3 \quad \Rightarrow \quad p \le 0.687$$

Se elige p= 0.687 y el regulador queda:

$$C(s) = 1.65\cdot\frac{s+1}{z+0.687}$$