3º Ingeniería Telecomunicación
2º ITT Sistemas Electrónicos
2º ITT Sistemas de Telecomunicación

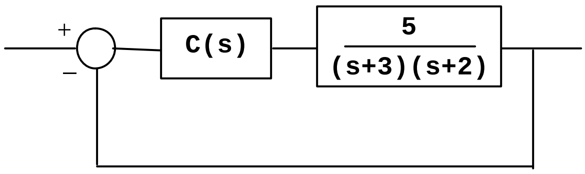
Autómatas y Sistemas de Control

EXAMEN SISTEMAS DE CONTROL 21-6-2002

PROBLEMA 1

En el diagrama de bloques de la figura inferior, el elemento **C(s)** representa un controlador. Se pide diseñar el controlador más sencillo que haga cumplir a la planta las siguientes especificaciones ante entrada escalón:

- Sobreoscilación < 20.8%
- Tiempo de establecimiento < 1.57s
- Error de posición < 20%



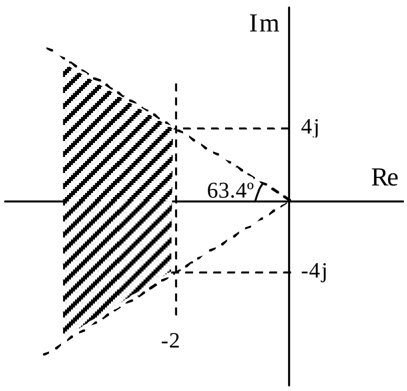
VALORACIÓN: 3 puntos

SOLUCIÓN

En primer lugar, se expresan las especificaciones pedidas para el régimen transitorio como la zona del plano complejo donde podrían encontrarse los polos del sistema:

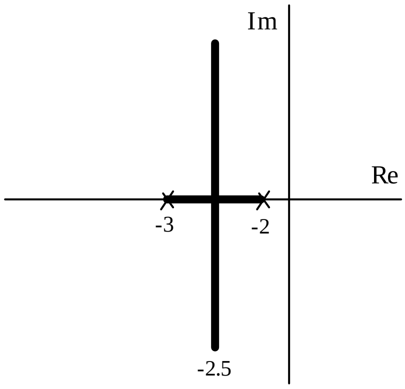
$$t_s = \frac{p}{s} \le 1.57 \quad \Rightarrow \quad s \ge 2$$

$$M_p = e^{-\frac{p}{\tan q}} \le 0.208 \quad \Rightarrow \quad q \le 63.4^{\circ}$$



A continuación se prueba con el más sencillo de los reguladores, el proporcional [C(s)=K]. Este regulador será válido si el LDR del sistema pasa por la zona válida. El trazado de este LDR es muy simple:

$$G(s) = \frac{5}{(s+3)(s+2)}$$



Podemos ver cómo el LDR pasa por la zona válida, por lo tanto el regulador tipo P será suficiente.

Para que el comportamiento en régimen permanente sea lo mejor posible, se elegirá la constante K del regulador lo más grande posible sin que el LDR se salga de la zona válida: por tanto se buscará el valor de K para el cual el LDR pasa por el punto -2.5+5j. Se empleará el criterio del módulo:

$$K' = \frac{\prod |s - p_i|}{\prod |s - z_i|} = \sqrt{5^2 + 0.5^2} \cdot \sqrt{5^2 + 0.5^2} = 25.25$$

$$K' = 5K \quad \Rightarrow \quad K = 5.05$$

Sólo falta comprobar si este regulador cumple las especificaciones en régimen permanente (error de posición menor del 20%):

$$K_p = \lim_{s \to 0} [C(s) \cdot G(s)] = \lim_{s \to 0} \left[5.05 \cdot \frac{5}{(s+3)(s+2)} \right] = 4.21$$

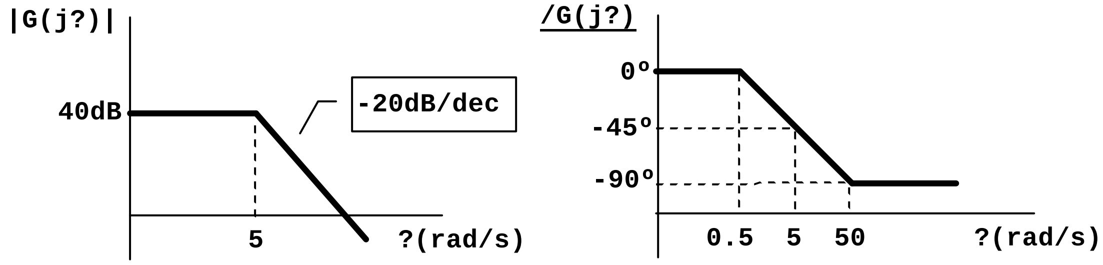
$$e_p = \frac{1}{1 + K_p} = 0.19 = 19\% < 20\% \quad \Rightarrow \quad \text{el regulador es válido}$$

El regulador obtenido es, por tanto:

$$C(s) = 5.05$$

PROBLEMA 2

Se muestran los diagramas asintóticos de Bode para un sistema desconocido G(s):



Se pide:

- Obtener la función de transferencia del sistema G(s)
- Indicar si el sistema G(s) realimentado unitaria y negativamente sería estable o no, y calcular sus márgenes de ganancia y de fase.

VALORACIÓN: 2.5 puntos

SOLUCIÓN

A partir de los diagramas de Bode, se deduce que el sistema G(s) presenta un polo y ningún cero; por lo tanto será un sistema de primer orden del tipo:

$$G(s) = \frac{K}{1+Ts}$$

La constante K se puede obtener como la ganancia a muy baja frecuencia:

$$K[dB] = 40 \quad \Rightarrow \quad 20\log_{10} K = 40 \quad \Rightarrow \quad K = 100$$

La constante de tiempo T se obtiene a partir de la frecuencia de corte del diagrama de Bode (5 rad/s):

$$\frac{1}{T} = 5\ rad/s \quad \Rightarrow \quad T = 0.2seg$$

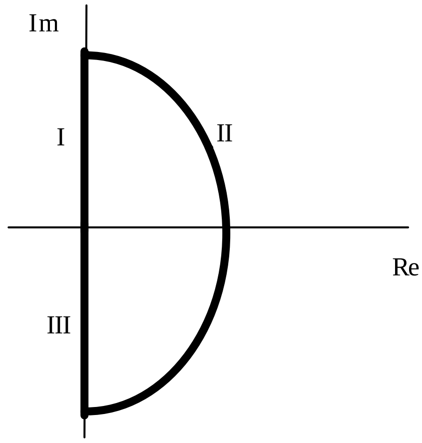
El sistema buscado es, por tanto:

$$G(s) = \frac{100}{1+0.2s}$$

Para determinar la estabilidad del sistema realimentado, así como los márgenes de ganancia y fase, se utilizará el método de Nyquist, donde la función de transferencia en bucle abierto es:

$$G(s)H(s) = G(s) = \frac{100}{1+0.2s} = \frac{500}{5+s}$$

El camino origen de Nyquist se muestra a continuación:



Calculamos el camino imagen tramo por tramo:

- Tramo I: s = j? ? = (0,8)

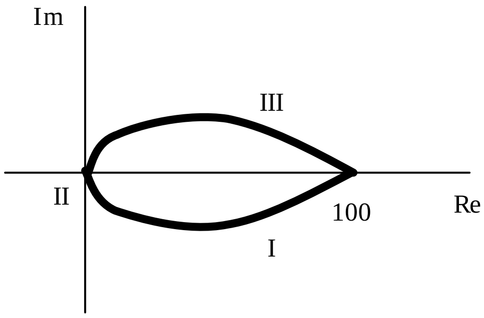
$$|G(s)H(s)| = \frac{500}{\sqrt{w^2+25}} = \begin{cases} 100 & w \to 0 \\ 0 & w \to \infty \end{cases}$$

$$\arg[G(s)H(s)] = -\arctan\left(\frac{w}{5}\right) = \begin{cases} 0 & w \to 0 \\ -90 & w \to \infty \end{cases}$$

- Tramo II: la imagen será un punto en el origen.

- Tramo III: la imagen será simétrica a la del tramo I.

La representación completa del camino imagen queda como sigue:



El sistema será estable porque no rodea al punto -1. El margen de ganancia será **K_g = 8** porque la fase nunca se hace -180º. Para calcular el margen de fase **?**, será necesario determinar sobre el tramo I el punto en el que el módulo es igual a la unidad:

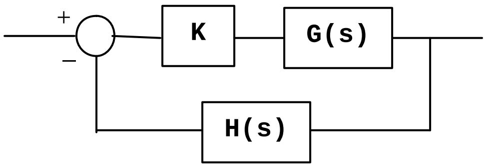
$$|G(s)H(s)| = \frac{500}{\sqrt{w^2+25}} = 1 \quad \Rightarrow \quad w = 500\ rad/s$$

$$\arg[G(s)H(s)] = -\arctan\frac{w}{5} = -89.4^{\circ}$$

$$g = 180 - 89.4 = 90.6^{\circ}$$

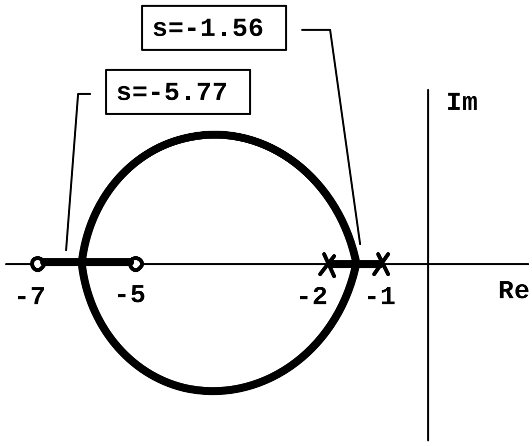
PROBLEMA 3

La figura de la derecha muestra el lugar de las raíces del sistema realimentado de la izquierda cuando el parámetro K varía entre 0 e 8 :



$$G(s)=\frac{\prod(s-z_i)}{\prod(s-p_i)}$$

$$H(s)=\frac{\prod(s-z_j)}{\prod(s-p_j)}$$



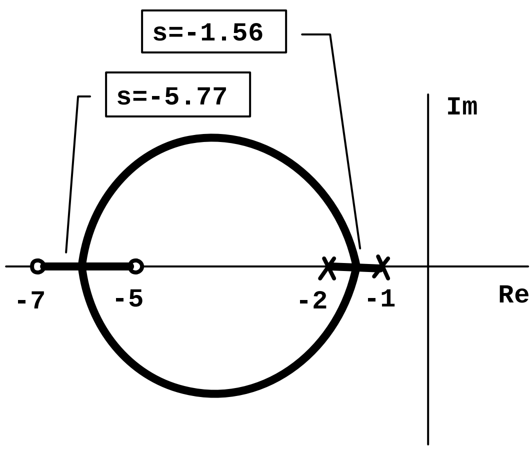
Se pide:

- Indicar como varía el comportamiento del sistema realimentado en función del valor de K. Especificar los valores exactos de K para los que se produce un cambio de comportamiento (se tendrá en cuenta únicamente la situación de los polos del sistema realimentado).
- Obtener las expresiones de G(s) y H(s) que dan lugar a un lugar de las raíces como el dibujado y que hacen que el sistema realimentado no presente ningún cero.

VALORACIÓN: 2.5 puntos

SOLUCIÓN

En primer lugar se dibujan las flechas sobre el diagrama, teniendo en cuenta que las ramas del LDR comienzan en los polos en cadena abierta y terminan en los ceros en cadena abierta:



A continuación, se debe obtener el valor de K correspondiente a cada uno de los puntos de confluencia/dispersión:

$$s = -5.77 \quad K = \frac{\prod |s - p_i|}{\prod |s - z_i|} = \frac{3.77 \cdot 4.77}{0.77 \cdot 1.23} = 18.99$$

$$s = -1.56 \quad K = \frac{\prod |s - p_i|}{\prod |s - z_i|} = \frac{0.56 \cdot 0.44}{3.44 \cdot 5.44} = 0.0132$$

Quedan definidos los siguientes comportamientos en función del valor de K:

- 0 < K < 0.0132
  Dos polos reales; sistema de 2º orden sobreamortiguado, no existe sobreoscilación.

- K = 0.0132
  Dos polos reales iguales; sistema de 2º orden críticamente amortiguado, no existe sobreoscilación.

- 0.0132 < K < 18.99
  Dos polos complejos conjugados; sistema de 2º orden subamortiguado, exisate sobreoscilación.

- K = 18.99
  Dos polos reales iguales; sistema de 2º orden críticamente amortiguado, no existe sobreoscilación.

- K > 18.99
  Dos polos reales; sistema de 2º orden sobreamortiguado, no existe sobreoscilación.

Se buscan ahora G(s) y H(s) que den lugar a un LDR como el propuesto y que den como resultado un sistema realimentado sin ningún cero:

$$M(s) = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)H(s)} \qquad G(s) = \frac{\prod (s - z_i)}{\prod (s - p_i)} \qquad H(s) = \frac{\prod (s - z_j)}{\prod (s - p_j)}$$

$$M(s) = \frac{K \cdot \dfrac{\prod (s - z_i)}{\prod (s - p_i)}}{1 + K \cdot \dfrac{\prod (s - z_i)}{\prod (s - p_i)} \cdot \dfrac{\prod (s - z_j)}{\prod (s - p_j)}} = \frac{K \cdot \prod (s - z_i) \cdot \prod (s - p_j)}{\prod (s - p_i) \cdot \prod (s - p_j) + K \cdot \prod (s - z_i) \cdot \prod (s - z_j)}$$

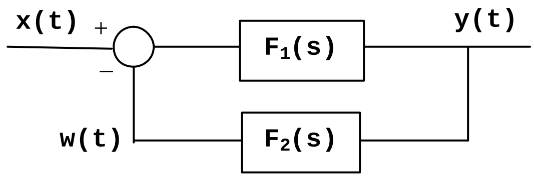
Si se desea que M(s) no presente ceros, G(s) no debe tener ningún cero y H(s) no debe tener ningun polo, por tanto:

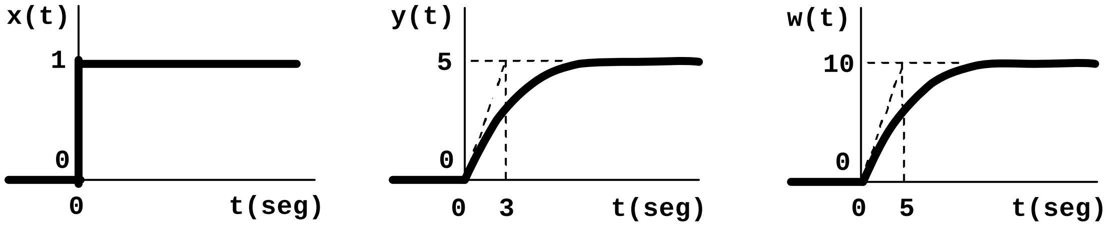
$$G(s)H(s) = \frac{(s+5)(s+7)}{(s+1)(s+2)} \qquad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad H(s) = (s+5)(s+7)$$

Debe observarse que el sistema H(s) sería físicamente irrealizable por tener más ceros que polos.

PROBLEMA 4

Obtener la expresión de las funciones de transferencia **F_1(s)** y **F_2(s)** utilizando como dato las señales **x(t)**, **y(t)** y **w(t):**





VALORACIÓN: 2 puntos

SOLUCIÓN

En primer lugar se estudia la relación entre x(t) e y(t); para ello basta con resolver la realimentación:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = M(s) = \frac{F_1(s)}{1 + F_1(s) \cdot F_2(s)}$$

Por la relación entre las señales x(t) e y(t) se puede observar que el sistema realimentado completo M(s) es un sistema de primer orden con ganancia K = 5 y constante de tiempo T = 3 segundos:

$$M(s) = \frac{K}{1+Ts} = \frac{5}{1+3s}$$

La relación entre las señales x(t) y w(t) también se puede deducir a partir del diagrama:

$$\left.\begin{array}{l} Y(s) = M(s) \cdot X(s) \\ W(s) = Y(s) \cdot F_2(s) \end{array}\right\} \frac{W(s)}{X(s)} = M(s) \cdot F_2(s)$$

Por la relación entre las señales x(t) y w(t) se puede deducir que M(s)·F_2(s) es un sistema de primer orden con ganancia K = 10 y constante de tiempo T = 5 segundos:

$$M(s) \cdot F_2(s) = \frac{K}{1+Ts} = \frac{10}{1+5s}$$

A partir de las expresiones anteriores es posible despejar F_1(s) y F_2(s):

$$F_1(s) = \frac{25s+5}{15s^2 - 22s - 9}$$

$$F_2(s) = \frac{6s+2}{5s+1}$$