UNIVERSITAS Miguel Hernández

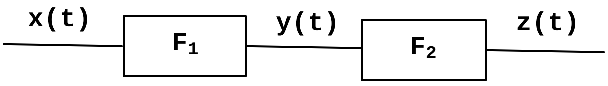
3º Ingeniería Telecomunicación
2º ITT Sistemas Electrónicos
2º ITT Sistemas de Telecomunicación

Autómatas y Sistemas de Control

EXAMEN SISTEMAS DE CONTROL 11-12-2002

PROBLEMA 1

Los sistemas $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$ de la figura inferior se comportan de acuerdo con las ecuaciones diferenciales que se indican:



$$\begin{cases} \sqrt{x(t)} + 5 \cdot \dfrac{dx(t)}{dt} = 10 \cdot \dfrac{dy(t)}{dt} + 20 \cdot \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 5 \cdot y^2(t) \\ y(t) + 2 \cdot \dfrac{dy(t)}{dt} = 5 \cdot z(t) + \dfrac{dz(t)}{dt} + 4 \cdot \dfrac{d^2z(t)}{dt^2} - 18 \end{cases}$$

Se pide:

- Obtener las funciones de transferencia $\mathbf{F_1(s)}$ y $\mathbf{F_2(s)}$.
- Deducir si $\mathbf{F_1(s)}$ y $\mathbf{F_2(s)}$ son sistemas estables o no.

Nota: se trabajará sobre el punto de equilibrio definido por x(0)=400

VALORACIÓN: 3 puntos

SOLUCIÓN

Cálculo del punto de funcionamiento (derivadas igual a cero):

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{x(0)} + 5 \cdot 0 = 10 \cdot 0 + 20 \cdot 0 + 5 \cdot y^2(0) \\ y(0) + 2 \cdot 0 = 5 \cdot z(0) + 0 + 4 \cdot 0 - 18 \\ x(0) = 400 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y(0) = 2 \quad z(0) = 4$$

Linealización y expresión en variables incrementales:

$$\begin{cases} \left[\dfrac{1}{2\sqrt{x(0)}}\right]\Delta x(t) + 5 \cdot \Delta \dot{x}(t) = 10 \cdot \Delta \dot{y}(t) + 20 \cdot \Delta \ddot{y}(t) + 5 \cdot [2y(0)]\Delta y(t) \\ \Delta y(t) + 2 \cdot \Delta \dot{y}(t) = 5 \cdot \Delta z(t) + \Delta \dot{z}(t) + 4 \cdot \Delta \ddot{z}(t) \end{cases}$$

Paso al dominio de Laplace:

$$\begin{cases} 0.025\cdot X(s)+5s\cdot X(s)=10s\cdot Y(s)+20s^2\cdot Y(s)+20\cdot Y(s) \\ Y(s)+2s\cdot Y(s)=5\cdot Z(s)+s\cdot Z(s)+4s^2\cdot Z(s) \end{cases}$$

Obtención de las funciones de transferencia:

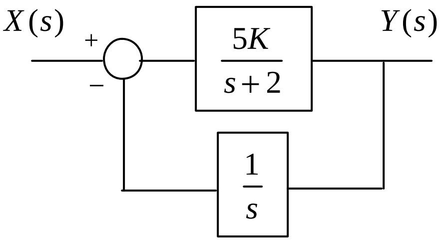
$$F_1(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{5s+0.025}{20s^2+10s+20}$$
$$F_2(s)=\frac{Z(s)}{Y(s)}=\frac{2s+1}{4s^2+s+5}$$

Estabilidad: en función de los polos de las funciones de transferencia:

$F_1(s)$: polos en s = -0.25 ± 0.968j (estable: ambas raíces tienen parte real <0)
$F_2(s)$: polos en s = -0.125 ± 1.11j (estable por la misma razón)

PROBLEMA 2

Considérese el sistema de la figura en el que **X(s)** es la entrada e **Y(s)** es la salida:



Se pide:

- Margen de ganancia para K=1.
- Margen de fase para K=1.
- Valor de K que haría que el margen de fase aumentase un 25%.

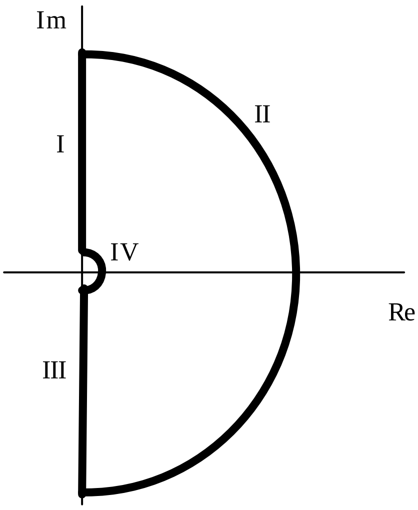
VALORACIÓN: 3 puntos

SOLUCIÓN

Se estudia la estabilidad por Nyquist para K=1:

$$G(s)\cdot H(s)=\frac{5}{s(s+2)}$$

El camino origen de Nyquist deberá rodear al punto origen por existir un polo en cero. Contendrá los 4 tramos que se muestran:



Calculamos el camino imagen tramo por tramo:

- Tramo I: s = j?   ? = (0,8)

$$\left|G(s)H(s)\right| = \frac{5}{w\sqrt{w^2+4}} = \begin{cases} \infty & w \to 0 \\ 0 & w \to \infty \end{cases}$$

$$\arg\left[G(s)H(s)\right] = -90 - \arctan\left(\frac{w}{2}\right) = \begin{cases} -90 & w \to 0 \\ -180 & w \to \infty \end{cases}$$

- Tramo II: la imagen será un punto en el origen.

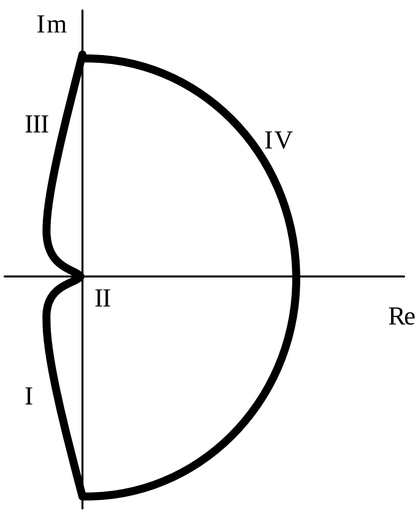
- Tramo III: la imagen será simétrica a la del tramo I.

- Tramo IV: s = e·e^{jf} f = (-90,+90)

$$\left|G(s)H(s)\right| = \frac{5}{e \cdot 2} = 0$$

$$\arg\left[G(s)H(s)\right] = -j = (+90,-90)$$

La representación completa del camino imagen queda como sigue:



Margen de ganancia: $\mathbf{K_g = 8}$ (la fase nunca se hace 180º en el tramo I)

Margen de fase: se busca en el tramo I la fase para la cual el módulo vale la unidad:

$$\frac{5}{w\sqrt{w^2+4}} = 1 \quad \Rightarrow \quad w = 1.84\ rad/s$$

$$\arg\left[G(s)H(s)\right]_{w=1.84} = -90 - \arctan\left(\frac{1.84}{2}\right) = -132.6^{o}$$

El margen de fase será la diferencia entre esta fase y -180º: **? = 180 - 132.6 = 47.38º**

Valor de K para que el margen de fase aumente un 25%:

$$g_{nuevo} = 1.25 \cdot g = 59.23^{o}$$

Buscamos en el tramo I el módulo correspondiente a una fase de -180 + 59.23 = -120.8º:

$$-90 - \arctan\left(\frac{w}{2}\right) = -120.8^{o} \quad \Rightarrow \quad w = 1.19\ rad/s$$

$$\left|G(s)H(s)\right|_{w=1.19} = \frac{5}{1.19\sqrt{1.19^2+4}} = 1.8$$

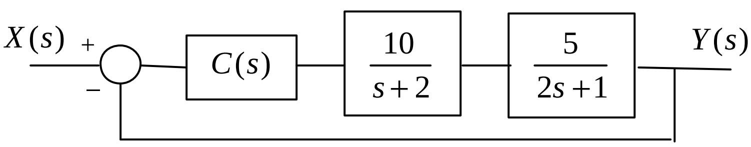
Para que el margen de fase fuese de 59.23º, el módulo en el punto calculado debería ser la unidad; por lo tanto debería reducirse 1.8 veces:

$$K = \frac{1}{1.8} = 0.55$$

PROBLEMA 3

En el sistema de la figura inferior, se pide diseñar el controlador C(s) más sencillo que haga cumplir las siguientes especificaciones a la salida **y(t)** ante entrada **x(t)** escalón:

- Sobreoscilación = 16.3%
- Tiempo de pico = 1.05 segundos
- Error de posición en régimen permanente = 30%



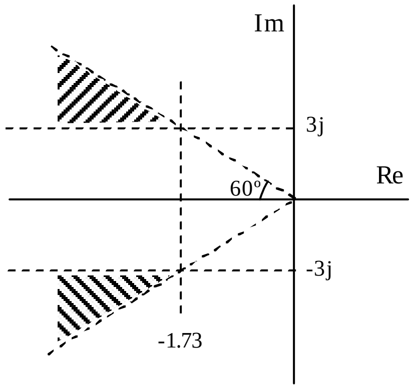
VALORACIÓN: 4 puntos

<u>SOLUCIÓN</u>

En primer lugar, se expresan las especificaciones pedidas para el régimen transitorio como la zona del plano complejo donde podrían encontrarse los polos del sistema:

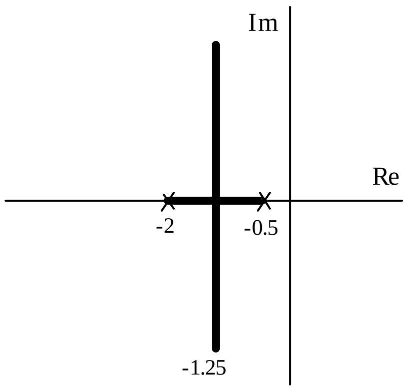
$$t_p = \frac{p}{w_d} \leq 1.05 \quad \Rightarrow \quad w_d \geq 3$$

$$M_p = e^{-\frac{p}{\tan q}} \leq 0.163 \quad \Rightarrow \quad q \leq 60^o$$



A continuación se prueba con el más sencillo de los reguladores, el proporcional. Este regulador será válido si el LDR del sistema pasa por la zona válida. El trazado de este LDR es muy simple:

$$G(s) = \frac{25}{(s+2)(s+0.5)}$$

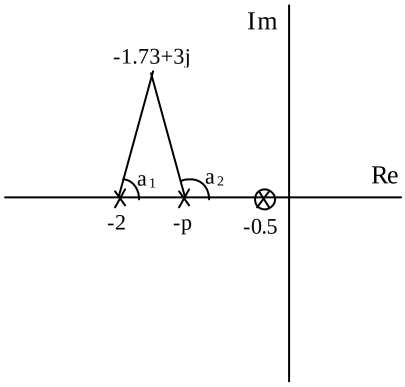


Queda claro que el LDR no pasa por la zona válida, por tanto el regulador tipo P no es válido, será necesario probar con un regulador tipo PD:

$$C(s) = K \cdot \frac{s+z}{s+p}$$

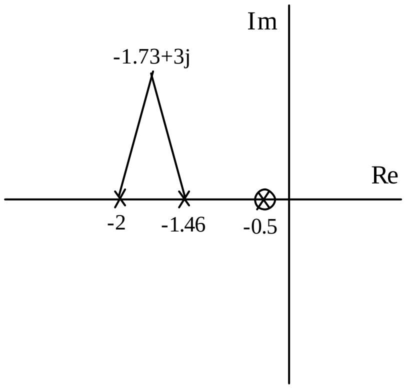
El cero del regulador (-z) se elegirá de modo que cancele al polo más significativo del sistema a controlar (salvo polos en el origen) en cadena abierta, por tanto z = 0.5

El polo del regulador se elegirá de acuerdo con el criterio del argumento de modo que el LDR del sistema más el controlador pase por el punto deseado (-1.73 ± 3j):



$$-a_1 - a_2 = 180 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 95.14^{\text{o}} \quad \Rightarrow \quad p = 1.46$$

El valor de la constante K se elegirá de modo que se cumpla el criterio del módulo:



$$K' = \frac{\prod |s - p_i|}{\prod |s - z_i|} = \sqrt{0.27^2 + 3^2} \cdot \sqrt{0.27^2 + 3^2} = 9.07$$
$$K' = 25K \quad \Rightarrow \quad K = 0.36$$

El regulador tipo PD sería:

$$C(s) = 0.36 \cdot \frac{s + 0.5}{s + 1.46}$$

Por último, es necesario comprobar si este regulador es válido para los requisitos pedidos en régimen permanente (e_p = 30%)

$$K_p = \lim_{s\to 0} [C(s) \cdot G(s)] = \lim_{s\to 0} \left[0.36 \cdot \frac{s+0.5}{s+1.46} \cdot \frac{25}{(s+2)(s+0.5)} \right] = 3.1$$
$$e_p = \frac{1}{1+K_p} = 0.243 = 24.3\% < 30\% \quad \Rightarrow \quad \text{el regulador es válido}$$