Escuela Politécnica Superior de Elche

Departamento de Ingeniería de Sistemas Industriales
División de Ingeniería de Sistemas y Automática

Examen de Sistemas de Control
Junio 2003
Resultados

1. La función de transferencia en bucle cerrado resulta:

$$G(z)H(z) = K\frac{s-1}{(s^2+0.25)(s+1)} \tag{1}$$

El camino de Nyquist elegido para el sistema se observa en la figura 1

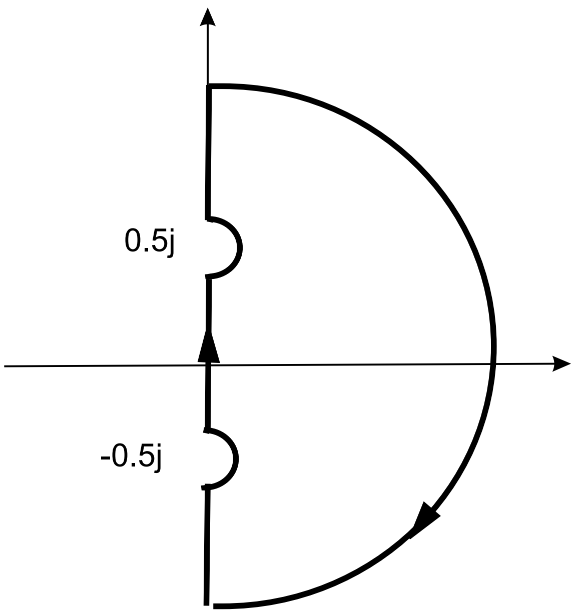

Figura 1 Camino de Nyquist para el sistema.

Este camino de Nyquist se encuentra formado por 5 tramos.

Tramo I $s = j\omega$ con $w \in [-0.5^+, 0, 0.5^-]$ En este tramo la función de transferencia en bucle abierto será:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K(j\omega-1)}{(-\omega^2+0.25)(j\omega+1)} \tag{2}$$

(a) Para $\omega = -0.5^+$,

$$|GH| = \infty \tag{3}$$
$$\angle GH = 206 - (0 + 334) = 232^o \tag{4}$$

(b) Para $\omega = 0$

$$|GH| = 4K \tag{5}$$
$$\angle GH = -180 - (0 + 0) = -180^o \tag{6}$$

(c) Para $\omega = 0.5^-$

$$|GH| = \infty \tag{7}$$
$$\angle GH = 154 - (0 + 26) = 128^o \tag{8}$$

Tramo II $s = 0.5j + re^{j\theta}$, con $r \to 0$ y $\theta \in [-90^o, 0^o, 90^o]$ En este tramo la función de transferencia en bucle abierto será:

$$GH = \frac{K(0.5j + re^{j\theta} - 1)}{((0.5j + re^{j\theta})^2 + 0.25)(0.5j + re^{j\theta} + 1)} \tag{9}$$

El módulo siempre vale ∞ para cualquier valor de θ. El argumento será:
(a) Para $\theta = -90^0$,

$$\angle GH = 154 - (0 + 26) = 128^o \tag{10}$$
$$\angle GH = 154 - (90 + 26) = 38^o \tag{11}$$
$$\angle GH = 154 - (-180 + 26) = 308^o \tag{12}$$

Tramo III $s = j\omega$, con $\omega \in [0.5^+, \infty]$ En este tramo la función de transferencia en bucle abierto será:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K(j\omega - 1)}{(-\omega^2 + 0.25)(j\omega + 1)} \tag{13}$$

(a) Para $\omega = 0.5^+$,

$$|GH| = \infty \tag{14}$$
$$\angle GH = 154 - (180 + 26) = 308^o \tag{15}$$

(b) Para $\omega = \infty$

$$|GH| = 0 \tag{16}$$
$$\angle GH = 90 - (180 + 90) = -180^o \tag{17}$$

Tramo IV El recorrido del tramo IV será el punto final del tramo III.
Tramo V El tramo V será simétrico al tramo III.
Tramo VI El tramo VI será similar al tramo II.
De esta forma se tiene como diagrama de Nyquist el representado en la figura 2.

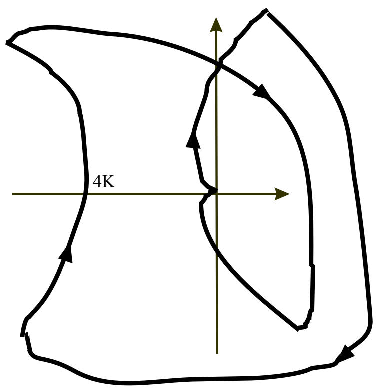

Figura 2 Diagrama de Nyquist obtenido.

Como se observa dependiendo del valor de K se tienen dos posibilidades:

Para $4K < 1$ El diagrama de Nyquist no da ninguna vuelta en torno al punto -1. Por lo tanto $Z = N + P = 0$. El sistema es estable.

Para $4K > 1$ El diagrama de Nyquist da una vuelta en torno al punto -1. Por este motivo $Z = N + P = 1$. El sistema en bucle cerrado tendrá un polo en el semiplano complejo de parte real positiva. Por tanto el sistema será inestable.

2. (a) En primer lugar se calculará el punto de funcionamiento deseado del sistema. Se tiene:

$$M_p = e^{-\pi/\tan\theta} = 0.0432 \rightarrow \theta = 45^o \quad (18)$$

$$t_s = \frac{\pi}{\sigma} < 1.57 \rightarrow \sigma = 2 \quad (19)$$

Si se representa el lugar de las raíces del sistema junto con el punto de funcionamiento deseado $(2 \pm j2)$, se observa que éste no pasa por dicho punto 3.

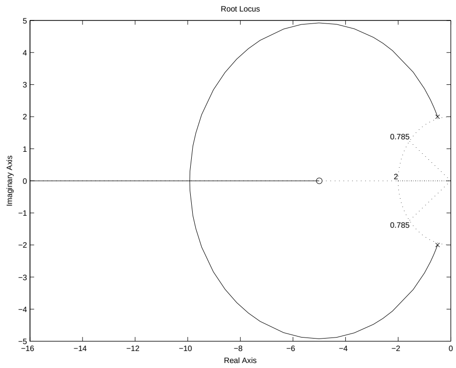

Figura 3 Lugar de las raices.

De esta forma se añadirá un regulador PD, ya que no basta con el regulador tipo P. El regulador PD será:

$$PD(s) = K\frac{s+z}{s+p} \quad (20)$$

La posición del cero (z) se elegirá justo en la vertical del punto de funcionamiento deseado. La posición del polo vendrá determinado por el criterio del argumento:

$$\alpha_1 + \alpha_2 - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) = 180^o(2n+1) \quad (21)$$

siendo $\alpha_1 = 33.7^o$, $\alpha_2 = 90^o$, $\beta_1 = 180^o$, β_2 el angulo del polo con el punto de funcionamiento deseado, $\beta_3 = 110.56^o$. De esta forma, $\beta_2 = 13^o$, y la posición del polo será p=10.66. Por lo tanto el regulador será:

$$PD(s) = K\frac{s+2}{s+10.66} \quad (22)$$

Como se observa con este regulador, el lugar de las raíces ya pasa por el punto de funcionamiento deseado (Figura 4).

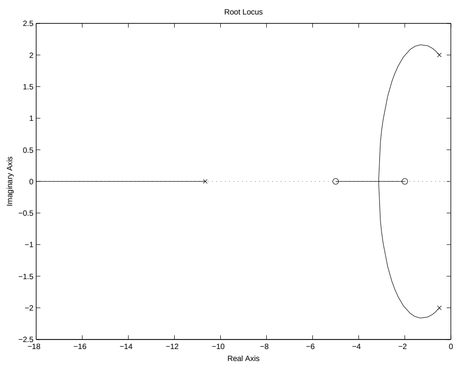

Figura 4 Lugar de las raices con regulador.

Falta por calcular el valor de K en el regulador para que el punto de funcionamiento deseado coincida con los polos del sistema en bucle cerrado. Para ello se impone el criterio del módulo:

$$\left| K \frac{2(s+5)(s+2)}{(s^2+s+4.25)(s+10.66)} \right|_{s=-2\pm j2} = 1 \tag{23}$$

De donde se obtiene $K = 3.95$. De esta forma el regulador resulta:

$$PD(s) = 3.95 \frac{s+2}{s+10.66} \tag{24}$$

A continuación será necesario calcular el error de posición del sistema con el regulador:

$$e_p = \frac{1}{1+K_p} \tag{25}$$

siendo.

$$K_p = \lim_{s\to 0} R(s)G(s) \tag{26}$$

Así,

$$K_p = \lim_{s\to 0} \frac{s+2}{s+10.66} \frac{2(s+5)}{s^2+s+4.25} = 1.74 \tag{27}$$

Por lo tanto:

$$e_p = \frac{1}{1+K_p} = 36.4\% \tag{28}$$

Como el sistema cumple las especificaciones en régimen permanente, basta con el regulador calculado.

(b) Para discretizar el regulador calculado utilizando la aproximación de la evolución temporal ante entrada escalón, se ha de cumplir:

$$R(z) = (1-z^{-1}) \sum_{polos, p=0} Residuos[\frac{R(s)}{s} \frac{1}{1-e^{sT}z^{-1}}] \tag{29}$$

Así,

$$R(z) = \frac{3.95z - 3.213}{z - 0.004844} \tag{30}$$

3. (a) Para analizar la estabilidad del sistema usaremos el lugar de las raíces. La ecuación característica del sistema en bucle cerrado será:

$$1 + 10 \frac{(s-1)}{(s+2)(s+3)} \frac{h(s+4)}{(s+5)} \tag{31}$$

El lugar de las raíces del sistema para los diferentes valores de h viene representado en la figura 5.

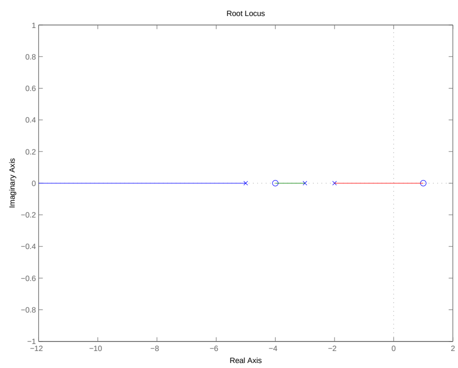

Figura 5 Lugar de las raices.

Como se observa el sistema se hará inestable a partir del valor dado por:

$$K_{LR} = \frac{2\cdot 3\cdot 5}{4} = 30/4 \tag{32}$$

Dado que $K_{LR} = K \cdot h$, se tiene finalmente que el sistema se hará inestable para valores de $h > 0.75$

(b) Para $K = 0.5$ y $h = 20$ el sistema es inestable. No tiene sentido hablar de error de posición.