SISTEMAS DE CONTROL
RESULTADOS

1. Para analizar la estabilidad del sistema, será necesario calcular en primer lugar:

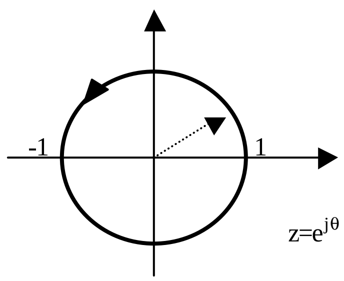
$$B_0G(z) = \left(1 - z^{-1}\right)\sum_{\substack{p=0\\p=-2}} \frac{1}{p}\,\frac{1}{p+2}\,\frac{1}{1 - e^{pT}z^{-1}}$$

$$B_0G(z) = \frac{1 - e^{-2T}}{2\left(z - e^{-2T}\right)}$$

De esta forma la función de transferencia en bucle abierto es:

$$R(z)B_0G(z) = \frac{K}{2}\,\frac{1 - e^{-2T}}{z - e^{-2T}}$$

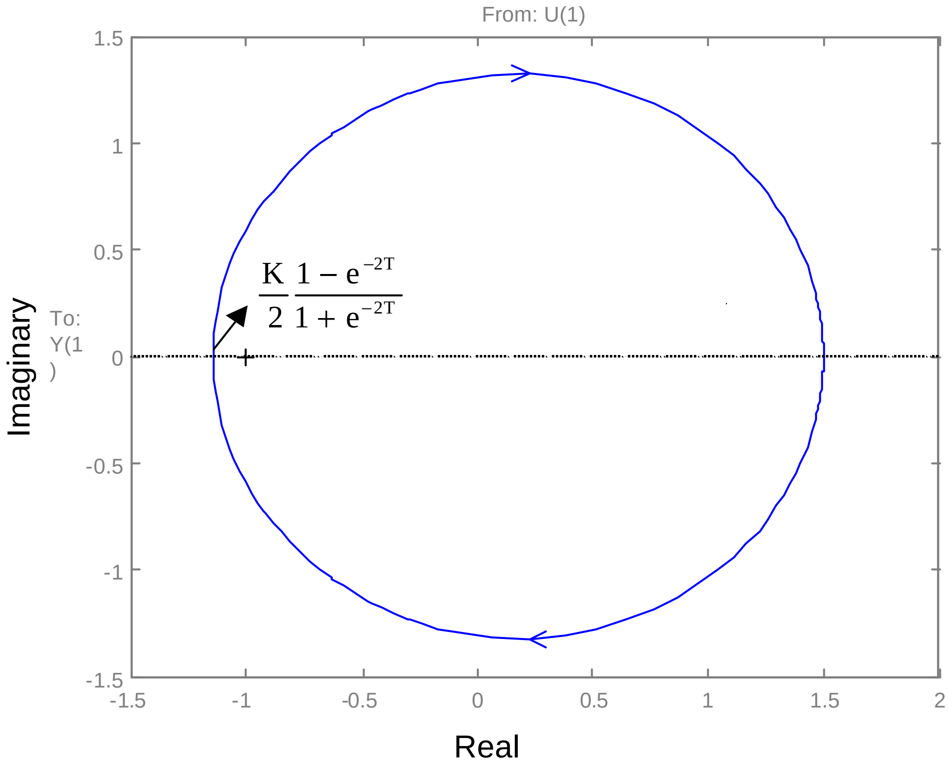
Al ser T el periodo de muestreo, $0<T<\infty$, e^{-2T} estará siempre comprendido entre 0 y 1. Por lo tanto el camino de Nyquist que se debe elegir es el representado en la siguiente figura:



Como se observa únicamente consta de un tramo en el que $z=e^{j\vartheta}$, estando ϑ comprendido entre 0 y 2π radianes. A la vista de la función de transferencia se puede construir la siguiente tabla:

θ	0º	90º	180º	270º	360º
$\angle\left(e^{j?} - e^{-2T}\right)$	0º	α_1	180º	α_2	360º
$\angle KBG(z)$	0º	$-\alpha_1$	-180º	$-\alpha_2$	-360º
$\lvert KBG(z)\rvert$	$\frac{K}{2}$	$\frac{K}{2}\frac{1-e^{-2T}}{\sqrt{1+e^{-4T}}}$	$\frac{K}{2}\frac{1-e^{-2T}}{1+e^{-2T}}$	$\frac{K}{2}\frac{1-e^{-2T}}{\sqrt{1+e^{-4T}}}$	$\frac{K}{2}$

En la siguiente figura aparece representado el resultado de recorrer el camino de Nyquist a través de la función de transferencia en bucle abierto:



De esta forma el sistema da un número de vueltas determinado en torno al punto –1+0j, dependiendo del valor:

$$\frac{K}{2}\frac{1-e^{-2T}}{1+e^{-2T}}$$

El número de vueltas en torno al punto –1+0j será 1 cuando:

$$\frac{K}{2}\frac{1-e^{-2T}}{1+e^{-2T}} > 1$$

De esta forma se tiene:

$$Z = N + P$$

P: Numero de polos en cadena abierta dentro del círculo unidad (camino de Nyquist), 1

N: Número de vueltas en torno al punto –1+0j

Z: Número de polos dentro del círculo unidad del sistema en bucle cerrado. Para que el sistema sea estable el polo debe encontrarse dentro del círculo unidad, luego Z=1.

Si:

$$\frac{K}{2}\frac{1-e^{-2T}}{1+e^{-2T}} > 1$$

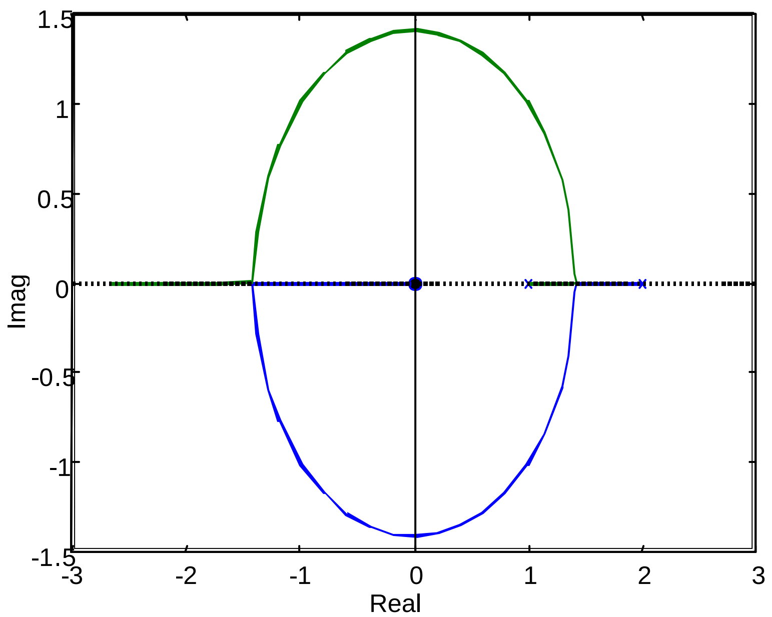
N=-1, P=1, Z=0: El sistema es INESTABLE

Si:

$$\frac{K}{2}\frac{1-e^{-2T}}{1+e^{-2T}} < 1$$

N=0, P=1, Z=1: El sistema es ESTABLE

2. a. El polo en el punto z=1 provoca que el error de posición del sistema en bucle cerrado sea nulo siempre y cuando el sistema sea estable. Por lo tanto lo que es necesario es asegurar la estabilidad del sistema en bucle cerrado. En primer lugar se comprobará si es posible utilizar un regulador proporcional R(z)=K de forma que el sistema sea estable. Para ello se dibuja el lugar de las raíces:



Los puntos de dispersión son:

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2}$$

$$\frac{1}{s} = \frac{2s-3}{s^2-3s+2}$$

$$s = \pm\sqrt{2}$$

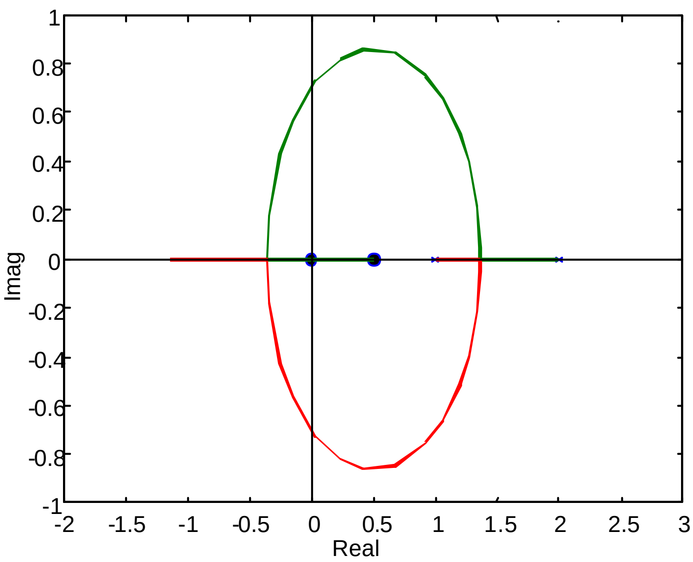
Por lo tanto con un regulador proporcional el sistema siempre será inestable. Es necesario por lo tanto modificar el lugar de las raíces. Para ello se introduce un regulador PD:

$$PD = K\frac{z-c}{z}$$

Con este regulador se introduce un polo en el origen y un cero de valor c. Para elegir este valor probamos con c=0.5 para ver si vale.
El nuevo sistema en cadena abierta será:

$$R(z)G(z) = K\frac{z-0.5}{z}\frac{z}{(z-1)(z-2)} = K\frac{z-0.5}{(z-1)(z-2)}$$

El lugar de las raíces queda ahora:



El punto de dispersión será ahora:

$$\frac{1}{s-0.5} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2} = \frac{2s-3}{s^2-3s+2}$$

$$s = \begin{cases} 1.366 \\ -0.366 \end{cases}$$

Con el cero en z=0.5, el sistema ya posee valores de K que hacen que el sistema sea estable. Evidentemente existen muchas otras posiciones del cero que permiten asegurar la estabilidad del sistema. Esta es tan sólo una de ellas. Para el cálculo del valor de K basta con elegir como punto de funcionamiento el punto de dispersión de las ramas σ=-0.366. Para calcular el valor de K, se tiene aplicando el criterio del módulo:

$$K = \frac{1.366 \cdot 2.366}{0.866} = 3.732$$

Por lo tanto un posible regulador que cumple las especificaciones solicitadas es:

$$R(z) = 3.732\frac{z - 0.5}{z}$$

b. Para calcular el regulador de tiempo mínimo se deben satisfacer las siguientes ecuaciones:

$$M(z^{-1}) = z^{-d}B^{-}(z^{-1})M_2(z^{-1})$$

$$1 - M(z^{-1}) = \left(1 - z^{-1}\right)^{\max(v+1,v')}A^{-}(z^{-1})M_1(z^{-1})$$

En primer lugar obtendremos $G(z^{-1})$:

$$G(z^{-1}) = \frac{z^{-1}}{\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)}$$

Entonces:

$$M(z^{-1}) = z^{-1}M_2(z^{-1})$$

$$1 - M(z^{-1}) = \left(1 - z^{-1}\right)^{1}\left(1 - 2z^{-1}\right)M_1(z^{-1})$$

Siendo orden $M(z^{-1})$=d+p+q+max(v+1,v')-1=2. Por lo tanto:

$$M_2(z^{-1}) = a + bz^{-1}$$

$$M_1(z^{-1}) = 1$$

$$1 - z^{-1}\left(a + bz^{-1}\right) = \left(1 - z^{-1}\right)^{1}\left(1 - 2z^{-1}\right)$$

Obteniendo a=3 y b=-2. Así:

$$M(z^{-1}) = z^{-1}\left(3 - 2z^{-1}\right)$$

$$1 - M(z^{-1}) = \left(1 - z^{-1}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)$$

El regulador pedido será:

$$R(z^{-1}) = \frac{1}{G(z^{-1})}\frac{M(z^{-1})}{1 - M(z^{-1})} = 3 - 2z^{-1}$$

c.- La secuencia de error se obtendrá como:

$$E(z) = U(z) - Y(z) = \left[1 - M(z)\right]Y(z) = \left(1 - z^{-1}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)\frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$\{e_k\} = \{1, -2, 0, 0, 0, 0 \ldots\}$$

La salida será:

$$Y(z) = U(z) - E(z)$$

$$\{y_k\} = \{1,3,1,1,1,1\ldots\}$$

Por lo tanto, a la vista de la secuencia de salida, el tiempo de establecimiento es n_s=2. La sobreoscilación será:

$$M_p = \frac{3 - 1}{1} 100 = 200\%$$

d.- El principal inconveniente del uso de este último regulador es la altísima sobreoscilación que provoca sobre la salida.

3. Tanto en un caso como en otro es necesario calcular primero si el sistema es estable en el punto de funcionamiento elegido. Para K=3, los polos de la función de transferencia en bucle cerrado se encuentran en:

$$1 + KG(s) = 0 \quad \Rightarrow \; (s+1)(s+2) + K(s-1) = 0 \quad \Rightarrow \; s^2 + (3+K)s + 2 - K = 0$$

Para K=3, las raíces se encuentran en: -6.16 y 0.16. Por lo tanto para K=3, el sistema es inestable, luego el error de posición es infinito.

Cuando se utiliza un esquema discreto, con un periodo de muestreo de 0.1 segundos, es necesario calcular:

$$BG(z) = \left(1 - z^{-1}\right) \sum_{\substack{p=0 \\ p=-1 \\ p=-2}} \frac{1}{p} \frac{p - 1}{(p+1)(p+2)} \frac{1}{1 - e^{-pT} z^{-1}}$$

obteniendo:

$$BG(z) = \frac{0.082z - 0.09}{z^2 - 1.72z + 0.74}$$

Para el cálculo de los polos se hallan los ceros de la ecuación característica:

$$1 + KBG(z) = 0 \quad \Rightarrow z^2 - 1.72z + 0.74 + K(0.082z - 0.09) = 0 \quad \Rightarrow z^2 - 1.474z + 0.47 = 0$$

Las raíces se encuentran en 0.466 y 1.007. El sistema es inestable, como era lógico pensar y el error de posición es infinito.