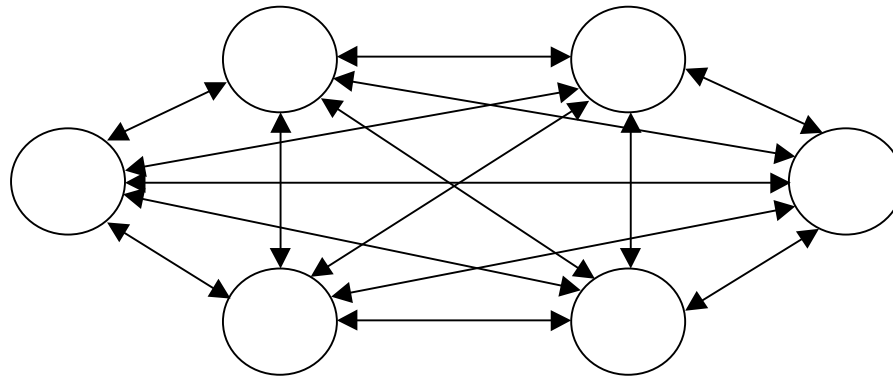


# Redes Recurrentes

- ✓ Redes formadas por muchas neuronas fuertemente interconectadas y que interaccionan muchas veces cuando la red es activada.
- ✓ Uso: Desarrollo de las denominadas memorias asociativas.
- ✓ Cualidades de la memoria en el cerebro humano:
  - ✗ Reproducir en la conciencia conceptos previamente elaborados o recordar impresiones pretéritas.
  - ✗ Evocar ideas desde conceptos parecidos o situaciones semejantes.
  - ✗ Por su modo de operación, esta memoria se puede describir como un sistema asociativo de procesamiento de información.
- ✓ Memoria asociativa: sistema que permite emular las funciones de la memoria humana.
- ✓ Memorias direccionables por el contenido (CAM).
  - ✗ Recuperan la información deseada a partir de una información parcial o deteriorada.
  - ✗ Una memoria asociativa se construye a partir de la información que se desea almacenar.
- ✓ Memorias direccionables por la dirección (AAM).
  - ✗ Dispositivos de memoria utilizados en un computador digital.

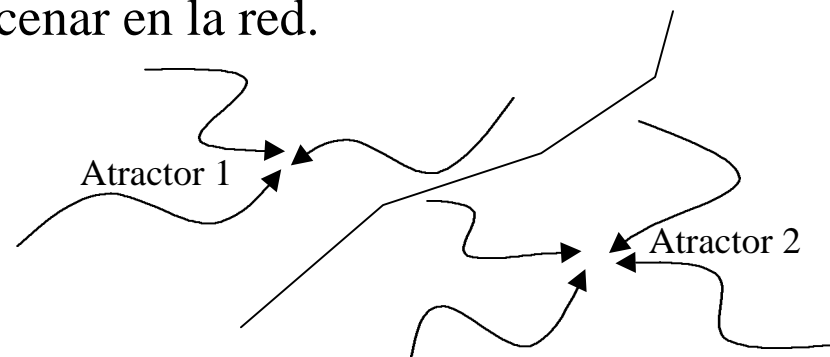
# La Red de Hopfield

- ✓ Permite implementar memorias asociativas.
- ✓ Está constituida por un conjunto de neuronas, cada una de las cuales está conectada a todas las demás. La conexión es tal que cada neurona recibe señal de todas las demás y emite señal hacia todas ellas.



- ✓ Cada neurona de la red se comporta como en un perceptrón con una función característica no lineal definida por la función signo. ( $a = w \cdot x - \theta$ ).
  - ✗ Si la activación de una neurona es positiva su salida pasa a ser +1.
  - ✗ Si la activación de una neurona es negativa su salida pasa a ser -1.
  - ✗ Si la activación es nula, la neurona permanece inmutable.
  - ✗ Así las neuronas se comportan como elementos biestables cuya salida oscila entre dos valores +1 o -1.

- ✓ Es una red recurrente puesto que el vector de salidas en un instante se toma como vector de entrada de cada neurona de la red en el instante siguiente.
- ✓ La red de Hopfield presenta una retroalimentación de la salida hacia la entrada.
- ✓ Funcionamiento de la red:
  - ✗ La red admite como dato de entrada un vector de componentes +1 o -1. Vector de entradas.
  - ✗ Con las salidas de las neuronas se genera un vector que se toma como entrada de las neuronas en el instante siguiente.
  - ✗ El proceso se reitera hasta que se alcanza un estado de equilibrio en el que la salida y la entrada coinciden. Este estado es el que toma como salida la red.
- ✓ El aprendizaje de la red consiste en seleccionar los vectores de pesos de las neuronas de manera que los posibles estados de equilibrio de la red representen los prototipos que se pretende almacenar en la red.



# Análisis Dinámico de la Red de Hopfield

- ✓ La evolución temporal del estado de una red de Hopfield viene descrita por un sistema de ecuaciones no lineales en diferencias de primer orden  $\Rightarrow$  Sistema dinámico discreto

$$x(k+1) = F(x(k))$$

- ✓ Trayectoria: sucesión de estados. Queda determinada a partir del estado inicial.
- ✓ Si el conjunto de posibles estados es finito, el sistema es de estado finito.
- ✓ Comportamiento asintótico del problema: tendencia con un gran  $n^\circ$  de iteraciones. Si el estado es finito:

- ✗ Las trayectorias son constantes a partir de un determinado momento. Se alcanza un punto fijo de la aplicación:

$$F(x) = x$$

Se dice que el sistema alcanza un punto de equilibrio

- ✗ Si el sistema no se hace estacionario, la trayectoria es periódica.
- ✓ Un sistema es globalmente estable cuando cualquier trayectoria termina en un punto de equilibrio.
- ✓ Un requisito para que la red de Hopfield funcione eficazmente como memoria asociativa, es que sea un sistema globalmente estable.

- ✓ Una manera simple de asegurar la estabilidad global de un sistema dinámico es poder asegurar la existencia de una función de Lyapunov para el sistema.
- ✓ **Teorema:** Si la matriz  $W$  formada con los vectores de peso de la red es una matriz simétrica y definida positiva, la red de Hopfield es convergente.
  - ✗ Exigir que la matriz sea definida positiva, requiere que todos los elementos de su diagonal principal sean positivos. Esto significa que todas las neuronas tengan una autoconexión excitatoria, lo cual no está previsto en el esquema de la red de Hopfield.
  - ✗ Si se impone que los elementos de la diagonal principal sean nulos, la red puede no ser globalmente estable, aunque se mantenga la simetría de la matriz.

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{partiendo del estado inicial } (+1, -1)$$

- ✓ **Teorema:** Si la matriz de pesos  $W$  es simétrica las trayectorias de la red de Hopfield convergen a un punto fijo o a un ciclo de período 2.
- ✓ **Teorema:** Si la matriz de pesos  $W$  es simétrica y los elementos de la diagonal principal son no negativos, la red es globalmente convergente si se emplea una dinámica asíncrona.

# Síntesis de Redes de Hopfield

- ✓ El problema de sintetizar mediante una red de Hopfield una memoria asociativa que almacene una serie de vectores predeterminados es complejo.
- ✓ Es necesario generar la matriz de pesos ( $W$ ) de la red de forma que los puntos fijos de la red se correspondan con los prototipos.
- ✓ Para que la red sea eficaz el radio de atracción de cada prototipo debe ser el mayor posible.
- ✓ En términos generales el número de prototipos que se pueden almacenar eficazmente es una fracción reducida de la dimensión de la red.
- ✓ La forma más simple para sintetizar una red de Hopfield que tenga como puntos fijos los  $p$  vectores  $u_1, \dots, u_p$ , es encontrar  $W$  tal que:

$$W \cdot u_i = u_i, \quad i=1, \dots, p$$

- ✗ Los  $p$  prototipos  $u_i$ , son vectores propios de la matriz  $W$  con valor propio correspondiente igual a la unidad. Por tanto hay que construir una matriz que tenga esta propiedad.
- ✓ Si  $U=[u_1, \dots, u_p]$ , se tiene como expresión para  $W$ :

$$W=U (U^t U)^{-1} U^t$$

- ✓ Sin embargo para que un prototipo  $u$  sea punto fijo de la red no es necesario exigir la identidad  $Wu=u$ . Basta con exigir  $\text{sgn}(Wu) = u$ , que se consigue imponiendo

$$Wu = \lambda u, \quad \lambda > 0$$

- ✗ Basta que cada prototipo sea un vector propio de la matriz  $W$  con valor propio asociado positivo.
- ✗ De esta forma se emplea como matriz de pesos:

$$W = \frac{1}{n} U^t U$$

- ✗ Para ajustarse a la estructura de la red de Hopfield en la que cada neurona no se autoexcita, los elementos de la diagonal principal de la matriz de pesos han de ser nulos.

$$W = \frac{1}{n} (U^t U - pI)$$

- ✓ Inconvenientes:

- ✗ Aparecen puntos de equilibrio diferentes a los prototipos especificados.
  - Si  $x$  es un punto fijo de la red también lo es  $-x$ .
  - La combinación de un número impar de estados de equilibrio también es un punto de equilibrio.
- ✗ Estos estados espúreos se pueden corregir mediante diversas modificaciones de la matriz de correlación.

# Capacidad de la Red de Hopfield

- ✓ Máximo número de prototipos que se pueden almacenar con seguridad en una red de dimensión determinada.
- ✓ Problema complicado y aún no resuelto de forma satisfactoria.
- ✓ La mayor parte de los estudios realizados ofrecen estimaciones asintóticas del máximo valor tolerable de prototipos cuando la dimensión de la red es muy grande.
- ✓ Si se desea que todos los prototipos sean recuperados con una probabilidad próxima a 1, se ha estimado la relación:

$$p \leq \frac{n}{4 \log n}$$

donde  $n$  es el número de neuronas y  $p$  el número de prototipos que se desean recuperar.

- ✓ Si se tolera un cierto margen de error en la recuperación de prototipos, puede admitirse un número de estos proporcional a la dimensión de la red, pudiendo llegar a ser del orden de  $0.138 n$ .

# Aplicación a Optimización Combinatoria

- ✓ Es preciso encontrar el mínimo de una función que tiene argumentos discretos, en cantidad finita o eventualmente numerable.
- ✓ Ejemplo: Búsqueda del camino mínimo entre dos puntos de una cierta red de comunicaciones (Viajante de comercio).
  - ✗ Las técnicas normales de optimización de funciones diferenciables no son directamente aplicables.
  - ✗ No existe todavía un procedimiento eficiente para la solución de estos problemas.
- ✓ La red de Hopfield funciona de manera que encuentra los mínimos de una función de energía con relativa sencillez.
- ✓ El problema fundamental es el diseño de una función de energía que se ajuste a las condiciones de estabilidad global de la red de Hopfield y cuyos puntos de mínimo coincidan con los de la función a minimizar.
- ✓ La existencia de muchos puntos de mínimo local hace que, en general, la utilización de una red de Hopfield sólo proporcione una solución subóptima.