MUESTREO Y RECONSTRUCCIÓN DE SEÑALES

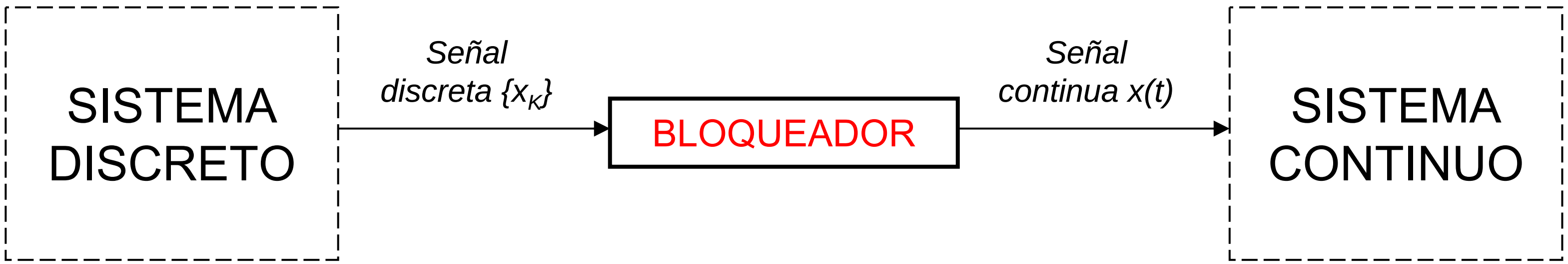
Teoría de circuitos y sistemas

Introducción

- Sabemos modelar sistemas continuos (Laplace) o sistemas discretos (Z).
- Pero en muchos casos los sistemas contienen tanto bloques continuos como bloques discretos.
- Ejemplo: control de un sistema físico (continuo) mediante un computador (discreto).
- Se necesitan elementos que permitan interconectar sistemas continuos con sistemas discretos.
- Estos elementos deben servir para convertir una señal continua en una secuencia y viceversa:
  - Muestreador: convierte una señal continua en una secuencia.
  - Bloqueador: convierte una secuencia en una señal continua.

Conexión bloqueador y muestreador

Ejemplo en el control de un horno: la temperatura $x(t)$ medida en el horno es introducida a un ordenador como una secuencia $\{x_K\}$

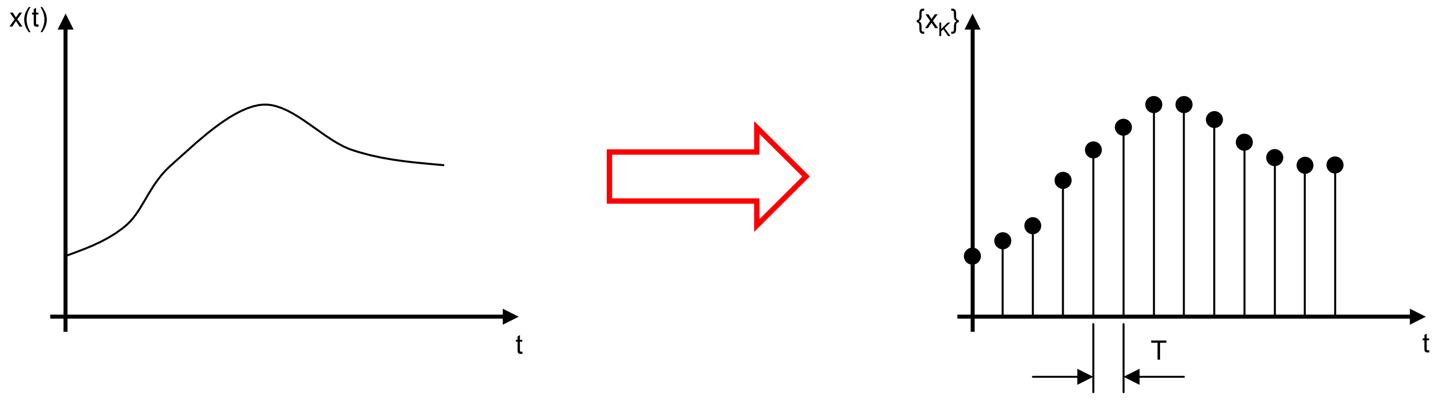


Ejemplo en el control de un horno: una secuencia de valores $\{x_K\}$ generada por el ordenador es introducida al horno como una tensión $x(t)$ que se debe aplicar en su resistencia.

MUESTREO DE SEÑALES

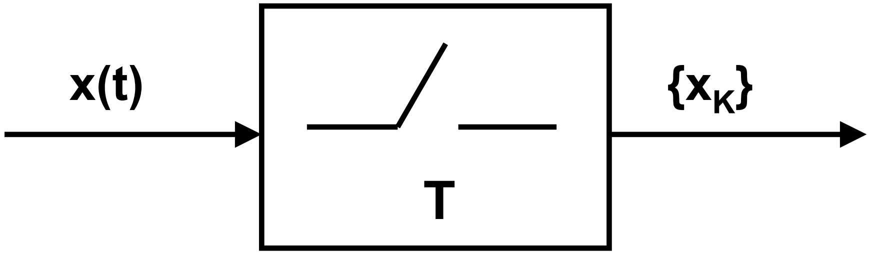
Muestreo de señales

- Permite obtener una secuencia a partir de una señal.



- El muestreador toma los valores de la señal cada cierto tiempo.
- Este tiempo se conoce como periodo (T) y normalmente es constante.

Representación y comportamiento



T = periodo de muestreo

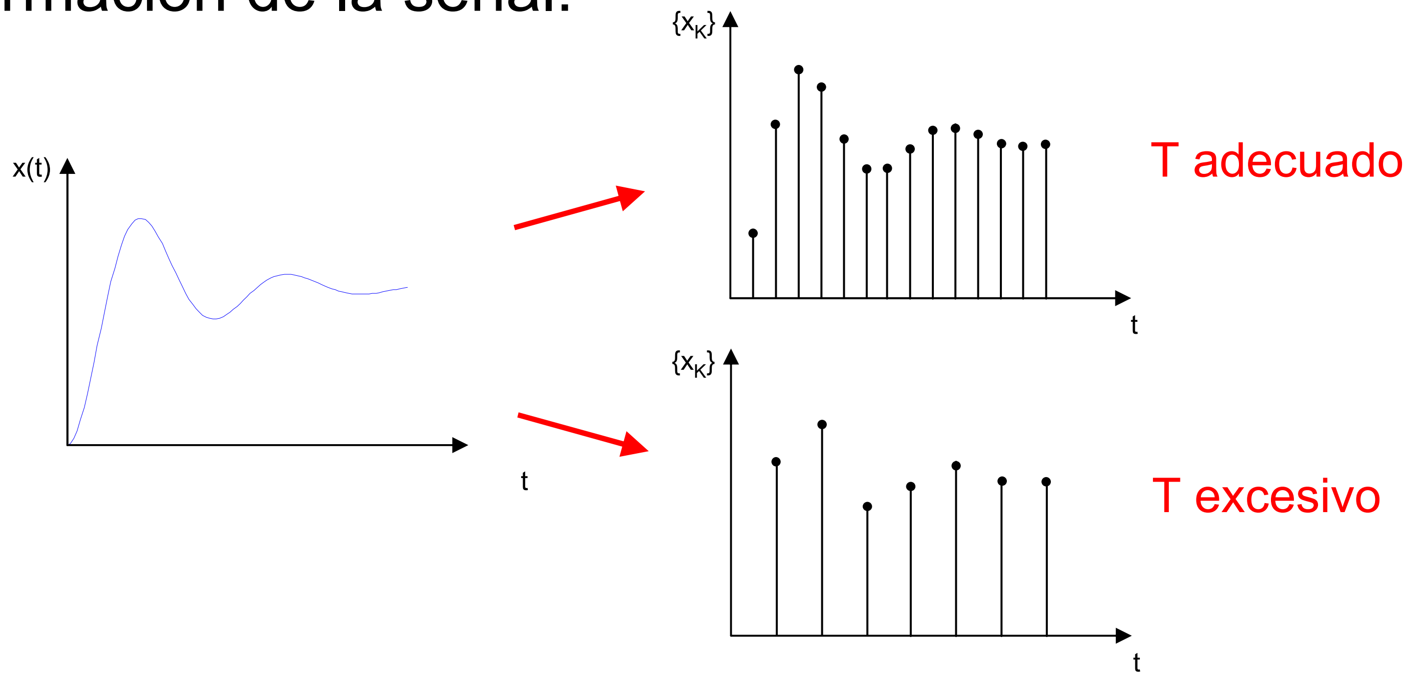
Relación entrada/salida en el dominio del tiempo:

$x_k = x(kT)$

$x_0 = x(0)$; $x_1 = x(T)$; $x_2 = x(2T)$; …

Importancia del periodo de muestreo

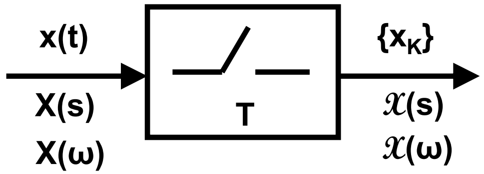
- T debe ser suficientemente pequeño para no perder información de la señal:



- T debe ser elegido en función de la señal a muestrear.

Comportamiento del muestreador en los dominios de Laplace y Fourier

- Conocemos la relación x(t) / {x_K} en el dominio del tiempo:
- Buscamos la relación en los dominios de Laplace y Fourier:
  - Dominio tiempo: $x_k = x(kT)$
  - Dominio Laplace: $\mathcal{X}(s)$ / $X(s)$?
  - Dominio Fourier: $\mathcal{X}(\omega)$ / $X(\omega)$?



- Trabajaremos en el dominio de Fourier.
- Partimos de las expresiones directa e inversa de la transformada:

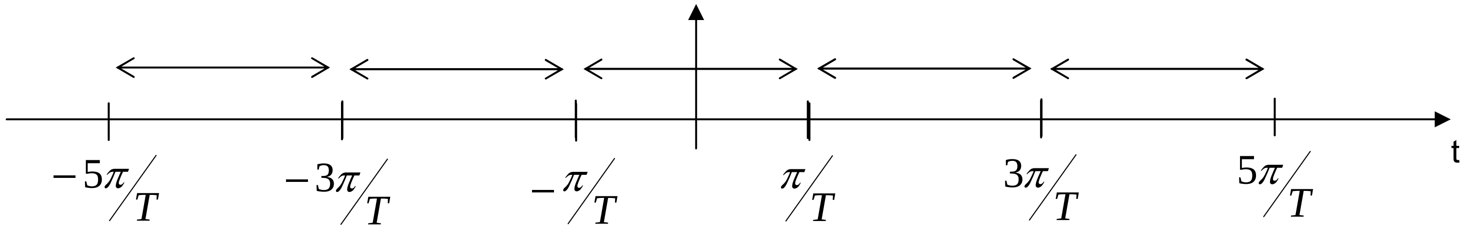
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt \qquad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega$$

$$\chi(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_K \cdot e^{-j\omega KT} \qquad x_K = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{+\frac{\pi}{T}} \chi(\omega) \cdot e^{j\omega KT} \cdot d\omega$$

- Operamos sobre el comportamiento del muestreador en el dominio t:

$$x_K = x(KT) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\cdot e^{j\omega KT}\cdot d\omega$$

- Dividimos el intervalo de integración en fragmentos de tamaño 2π/T:



$$x_K = \frac{1}{2\pi}\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\int_{\frac{(2r-1)\pi}{T}}^{\frac{(2r+1)\pi}{T}} X(\omega)\cdot e^{j\omega KT}\cdot d\omega$$

- Hacemos un cambio de variable: ω = Ω + 2πr/T

$$x_K = \frac{1}{2\pi}\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\int_{\frac{-\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X(\Omega + \frac{2\pi r}{T})\cdot e^{j\Omega KT}\cdot e^{jKT\cdot\frac{2\pi r}{T}}\cdot d\Omega = \frac{1}{2\pi}\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\int_{\frac{-\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X(\Omega + \frac{2\pi r}{T})\cdot e^{j\Omega KT}\cdot d\Omega$$

- Se introduce 1/T y se cambian de orden sumatorio e integral:

$$x_K = \frac{T}{2\pi}\int_{\frac{-\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X(\Omega + \frac{2\pi r}{T}) \cdot e^{j\Omega KT} \cdot d\Omega$$

- Comparando con la expresión de x_K en la transformada de Fourier, se obtiene:

$$\chi(\omega) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X(\omega + \frac{2\pi r}{T})$$

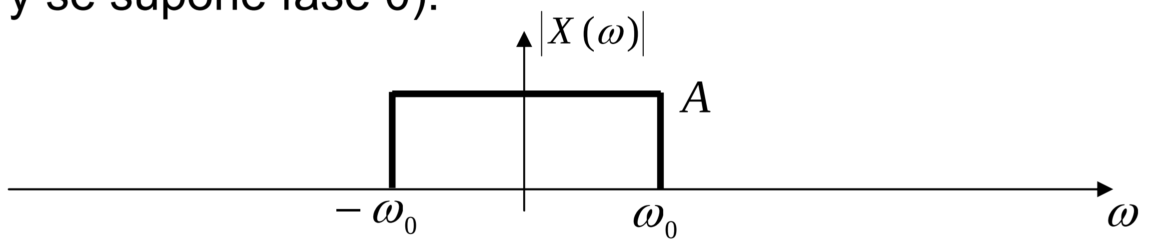
- La relación en el dominio de Laplace se puede obtener de forma similar:

$$\chi(s) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X(s + \frac{2\pi r}{T} j)$$

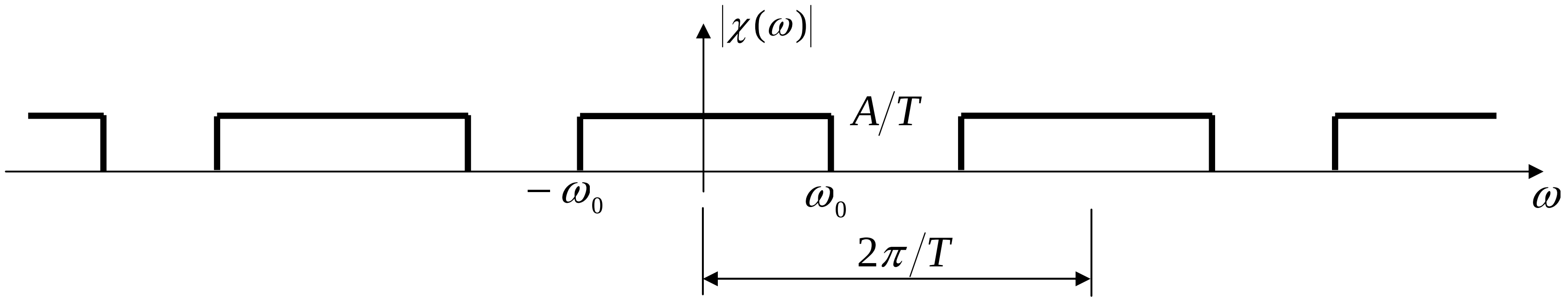
- En ninguno de los casos se puede hablar de función de transferencia, es sólo una relación E/S.

Representación gráfica del comportamiento del muestreador en el dominio de Fourier

- Señal continua de partida (se muestra módulo de su transformada de Fourier y se supone fase 0):



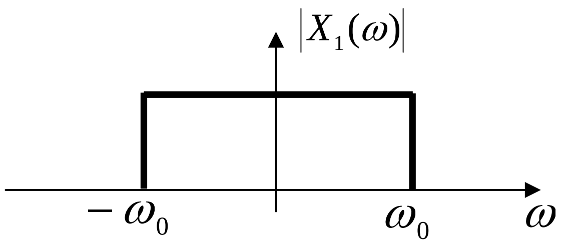
- Señal muestreada con periodo T según la fórmula anterior:

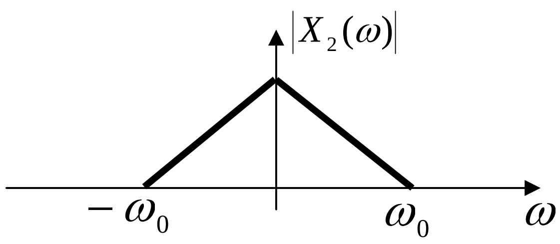


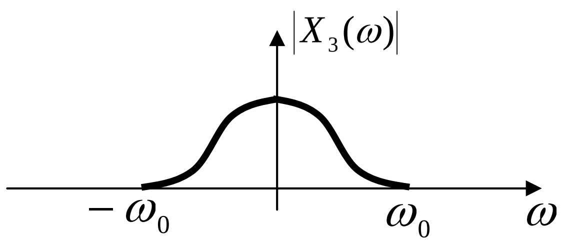
(suma de señales originales escaladas y desplazadas)

Periodo de muestreo (I)

- Interesa conocer el periodo de muestreo T adecuado para cada señal.
- El objetivo es no perder información.
- Intuitivamente, señales con contenido en frecuencias más elevadas requerirán menor T (mayor frecuencia de muestreo).
- La transformada de Fourier nos indica los contenidos frecuenciales.
- Señal de banda limitada: no contiene frecuencias por encima de un cierto límite, por ejemplo ω_0:



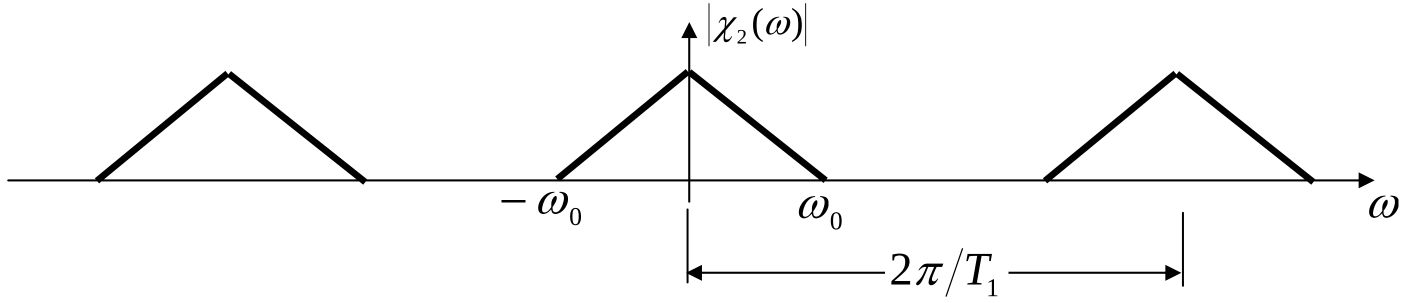




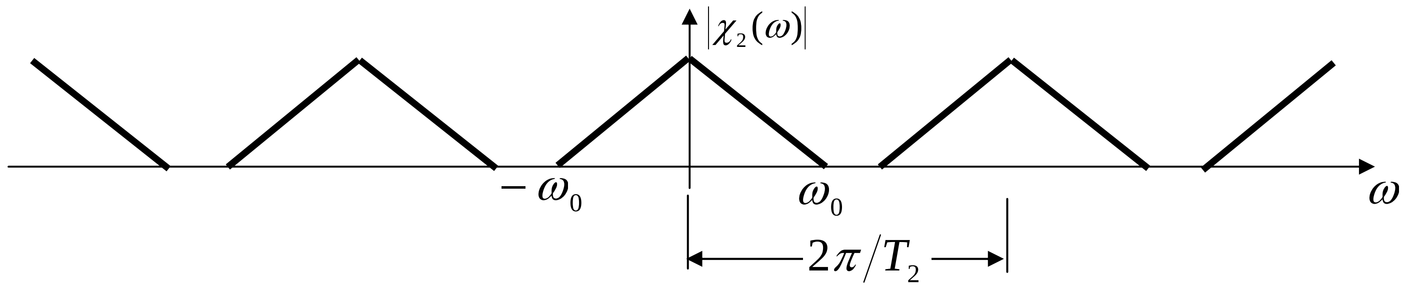
Periodo de muestreo (II)

- Muestreamos la señal X_2 anterior con 3 periodos distintos:

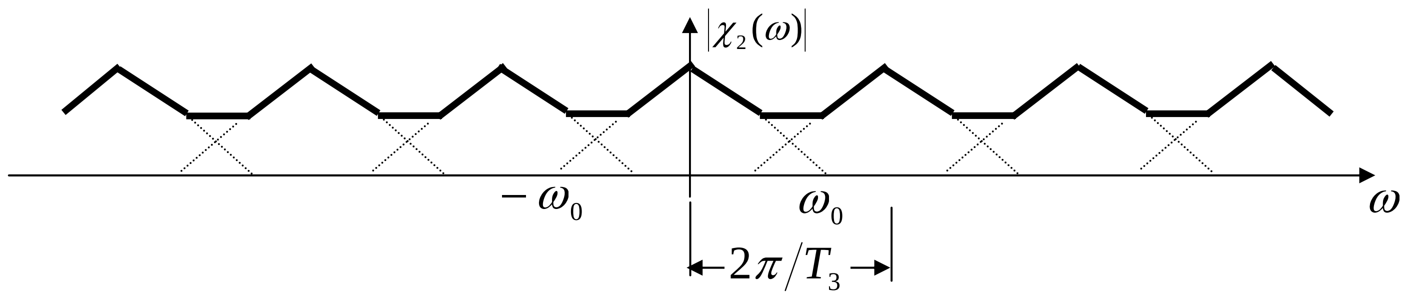
T_1



T_2



T_3



Periodo de muestreo (III)

- En los dos primeros casos no se produce solapamiento: sería posible reconstruir la señal original (continua) a partir de la señal muestreada. No hay deformación de la señal.
- En el tercer caso sí se produce solapamiento, y sería imposible reconstruir la señal original. La señal se ha deformado.

- Relación con el periodo de muestreo: T debe ser suficientemente pequeño para que no se pierda información:

$$T < \frac{\pi}{\omega_0}$$

- La misma relación se puede expresar en términos de la frecuencia de muestreo f:

$$\frac{1}{T} > \frac{\omega_0}{\pi} \quad \Rightarrow \quad f > 2 f_0$$

La frecuencia de muestreo f debe ser al menos el doble que la máxima frecuencia f_0 contenida en la señal a muestrear (TEOREMA DEL MUESTREO)

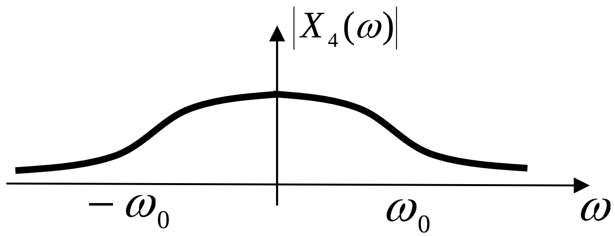
Periodo de muestreo (IV)

EJEMPLO: tarjeta de adquisición de datos para un PC.

- El tipo de tarjeta a elegir dependerá del tipo de señal a capturar:
  - Señales de audio (altas frecuencias): es necesaria una tarjeta con una frecuencia de muestreo rápida (periodo T pequeño).
  - Señales de temperatura (variaciones lentas, bajas frecuencias): es suficiente con una tarjeta más simple, con frecuencia de muestreo lenta (periodo T grande).

SITUACIÓN COMÚN: señales no de banda limitada.

- Muchas señales reales (por ejemplo, un tren de pulsos rectangulares) no son de banda limitada, contienen todas las frecuencias.
- Estas señales nunca se pueden muestrear sin pérdida de información, por pequeño que sea el periodo de muestreo.

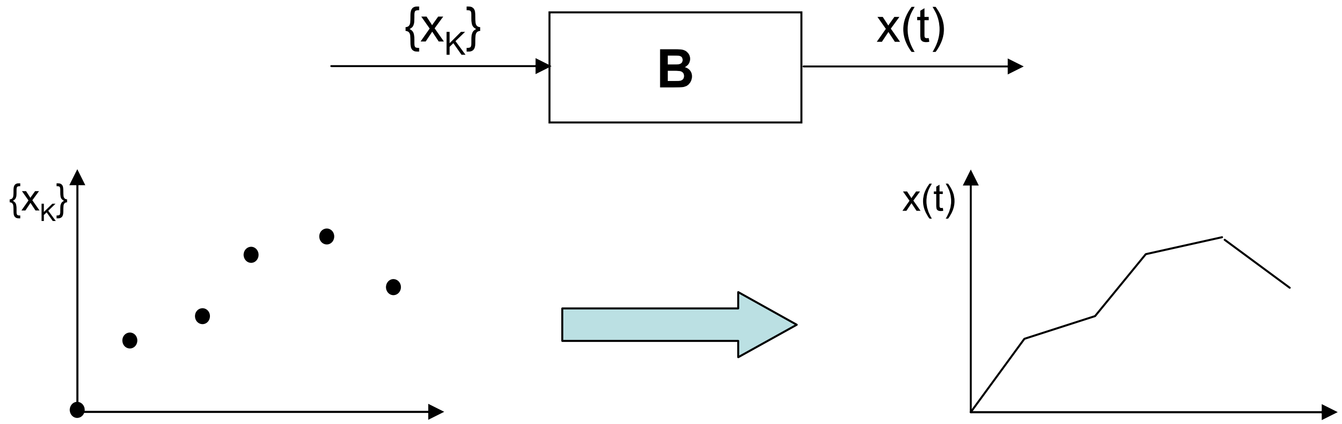


El módulo de la transformada de Fourier de la señal X_4 no llega a hacerse cero; la señal contiene todas las frecuencias

RECONSTRUCCIÓN DE SEÑALES

Reconstrucción de señales

- Obtención de una señal a partir de una secuencia.
  Reconstruir = volver a obtener una señal que ha sido muestreada.
- Elemento que realiza la operación: bloqueador.



NOTA: veremos cómo el ejemplo de reconstrucción mostrado es físicamente irrealizable.

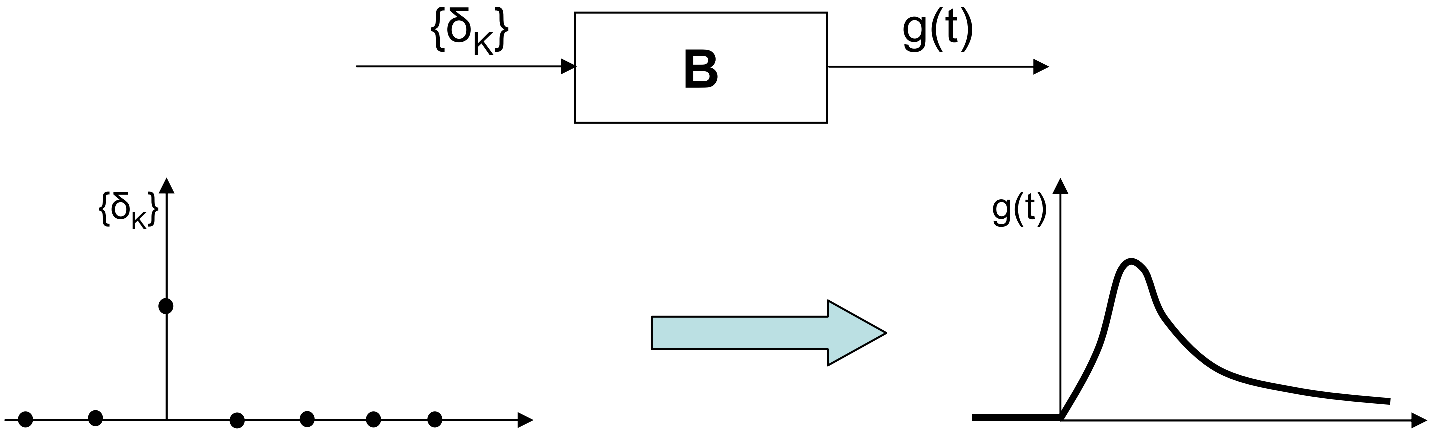
Representación del bloqueador

- 2 posibilidades:
  - Respuesta impulsional.
  - Función de transferencia (en ω o en s).

NOTA: para el bloqueador SÍ existe función de transferencia (para el muestreador NO)

Respuesta impulsional g(t)

- Señal continua de respuesta ante una secuencia impulso de entrada.



Uso de la respuesta impulsional

- La respuesta impulsional de un sistema permite conocer la salida del sistema ante cualquier señal de entrada.
- La salida se obtiene como la convolución entre la respuesta impulsional y la entrada.
- En el caso del bloqueador, se trata de una convolución híbrida.

$$x(t) = \{x_K\} * g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \cdot g(t - nT)$$

Función de transferencia

- Se utiliza en el dominio s y en el dominio ω.
- Se obtienen a partir de las transformadas de Fourier y Laplace de la respuesta impulsional:

$$G(\omega) = F[g(t)] \qquad G(s) = L[g(t)]$$

- Ambas permiten conocer la salida (señal continua) a partir de la entrada (secuencia discreta) en los dominios s o ω:

$$X(\omega) = G(\omega) \cdot \chi(\omega) \qquad X(s) = G(s) \cdot \chi(s)$$

- Se trata de funciones de transferencia híbridas.

Tipos de bloqueadores

- En función del criterio seguido para reconstruir una señal continua a partir de los valores de la secuencia.

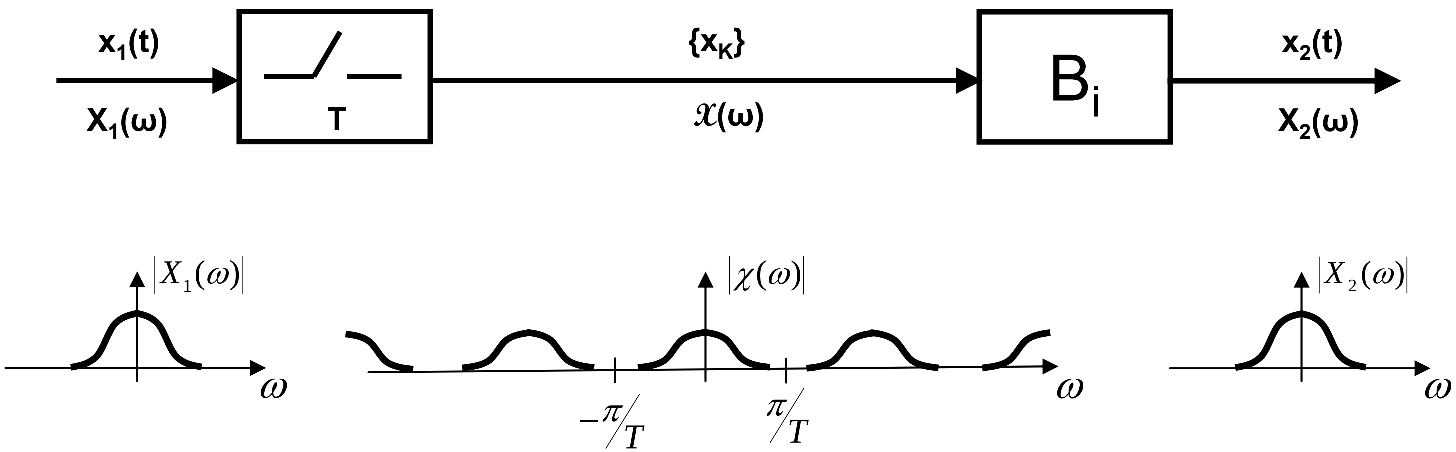
- Estudiaremos 3 tipos:

  – Bloqueador ideal.
  – Bloqueador de orden 0.
  – Bloqueador de orden 1.

Bloqueador ideal (I)

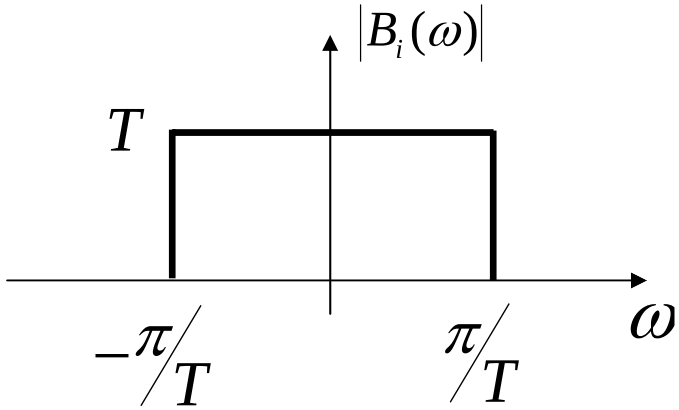
- Es capaz de reconstruir perfectamente la señal original, si se ha muestreado con un periodo T adecuado (teorema del muestreo).

- Visto en el dominio de Fourier, el objetivo es recuperar la transformada de Fourier de la señal original:



Bloqueador ideal (II)

- La función de transferencia en ω del bloqueador ideal, debe "cancelar" las repeticiones y debe restaurar la escala original:



$$B_i(\omega) = \begin{cases} T & |\omega| < \pi/T \\ 0 & |\omega| \geq \pi/T \end{cases}$$

- El valor cero fuera del intervalo central cancela las repeticiones.
- El valor T dentro de ese intervalo restaura la escala.

Bloqueador ideal (III)

- Respuesta ante impulso:

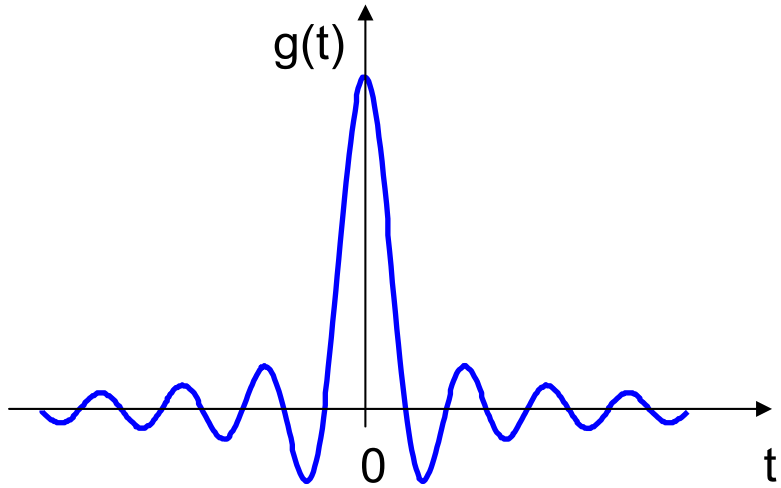
$$g(t) = F^{-1}\left[G(\omega)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\cdot e^{j\omega t}\cdot d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} T\cdot e^{j\omega t}\cdot d\omega =$$

$$= \frac{T}{2\pi}\left[\frac{e^{j\omega t}}{jt}\right]_{-\pi/T}^{\pi/T} = \frac{T}{2\pi}\left[\frac{e^{j\frac{\pi}{T}t} - e^{-j\frac{\pi}{T}t}}{jt}\right] = \frac{e^{j\frac{\pi}{T}t} - e^{-j\frac{\pi}{T}t}}{2j\cdot\frac{\pi}{T}t} = \frac{sen\left(\frac{\pi}{T}t\right)}{\frac{\pi}{T}t} = \frac{sen(\omega_1 t)}{\omega_1 t}$$

$$\boxed{g(t) = \frac{sen(\omega_1 t)}{\omega_1 t}}$$

Bloqueador ideal (IV)

- Representación de g(t):



•La respuesta impulsional toma valores para instantes anteriores a cero.

•Es un bloqueador no causal

•Se trata de un sistema físicamente irrealizable.

(recordar ejemplo 1ª transparencia)

- No existen bloqueadores ideales en la práctica.
- Sólo se estudiarán teóricamente.

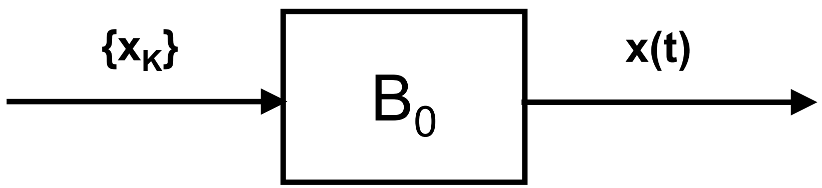
Bloqueadores causales

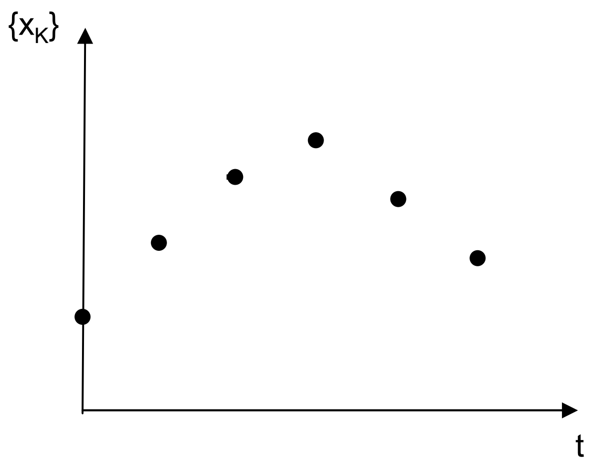
- La salida en un cierto instante t_0 sólo depende de los valores que toma la entrada en instantes anteriores $t<t_0$.

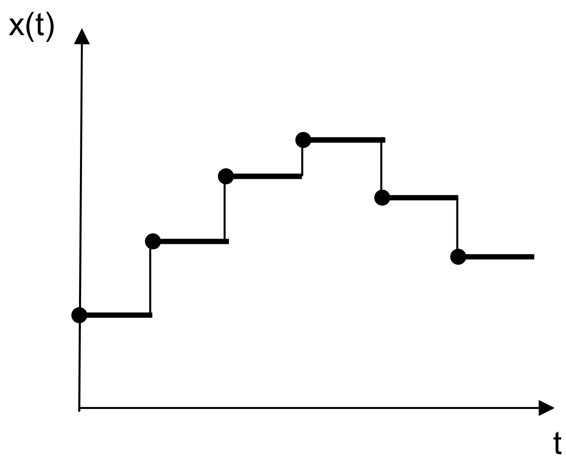
- Estudiaremos 2 tipos:
  - Bloqueador de orden 0.
  - Bloqueador de orden 1.

- Bloqueador de orden 0: la señal continua de salida toma el valor del último dato conocido para la entrada (ajuste polinomial de orden 0).
- Bloqueador de orden 1: la señal continua de salida se obtiene a partir de los dos últimos datos conocidos para la entrada (ajuste polinomial de orden 1).

Bloqueador de orden cero (I)

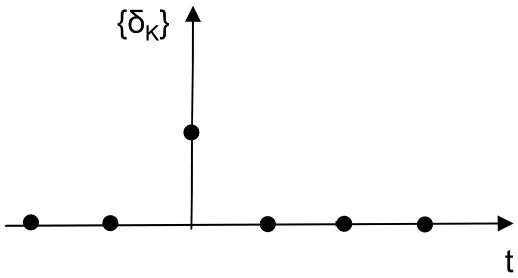


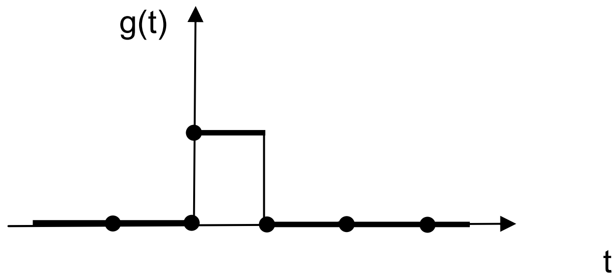




Bloqueador de orden cero (II)

- Respuesta impulsional:





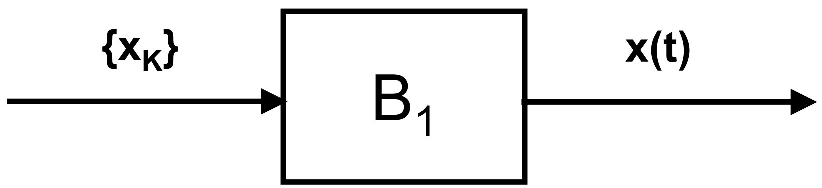
$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < T \\ 0 & t \geq T \end{cases}$$

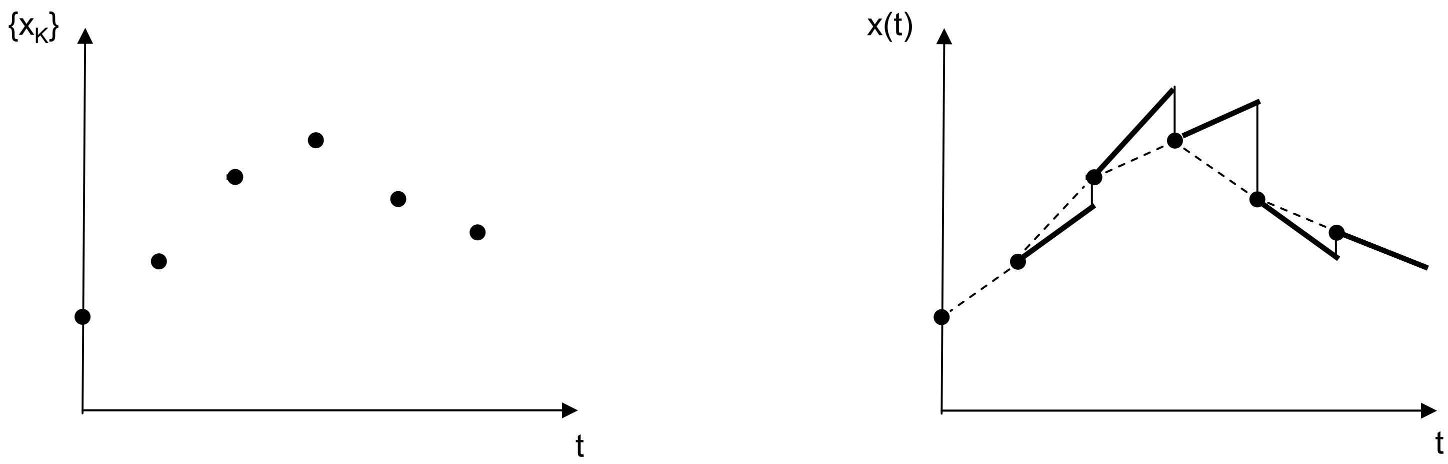
- Funciones de transferencia:

$$G(\omega) = F\left[g(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = \int_{0}^{T} e^{-j\omega t} \cdot dt = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega}$$

$$G(s) = L\left[g(t)\right] = \int_{0}^{\infty} g(t) \cdot e^{-st} \cdot dt = \int_{0}^{T} e^{-st} \cdot dt = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

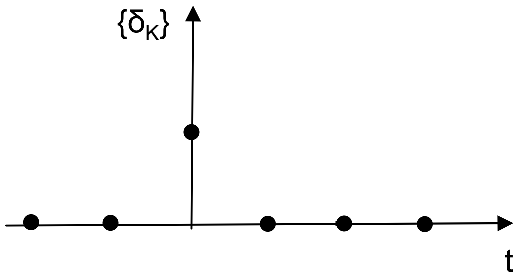
Bloqueador de orden uno (I)

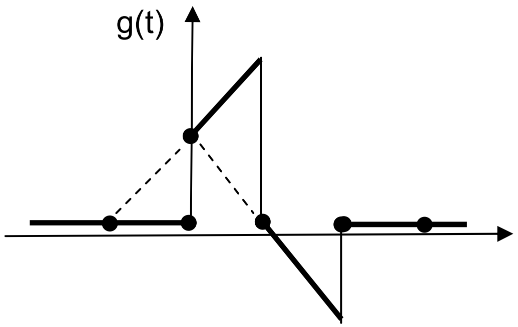




Bloqueador de orden uno (II)

- Respuesta impulsional:





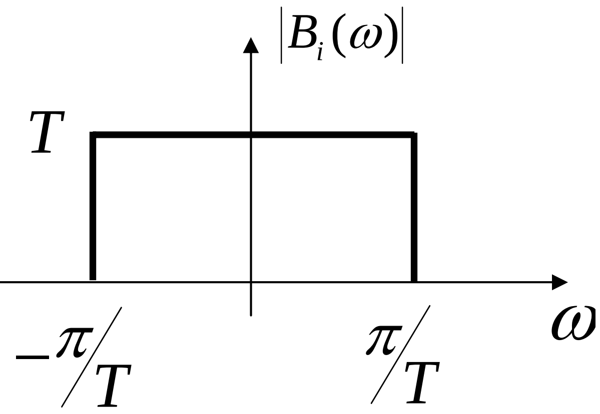
$$g(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1+{}^{t}/_{T} & 0\le t<T\\ 1-{}^{t}/_{T} & T\le t<2T\\ 0 & t\ge 2T\end{cases}$$

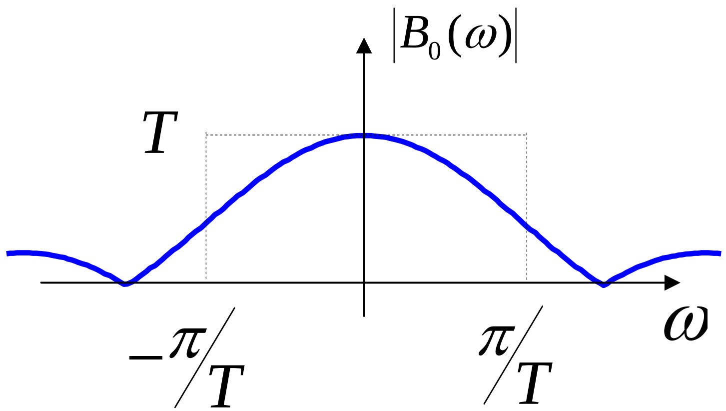
- Funciones de transferencia:

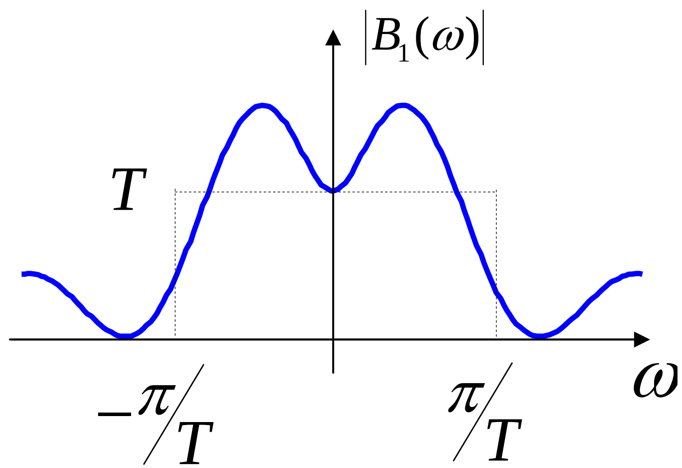
$$G(\omega)=F[g(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\cdot e^{-j\omega t}\cdot dt=\ldots=\frac{1+j\omega T}{T}\left(\frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega}\right)^2$$

$$G(s)=L[g(t)]=\int_{0}^{\infty}g(t)\cdot e^{-st}\cdot dt=\ldots=\frac{1+sT}{T}\left(\frac{1-e^{-sT}}{s}\right)^2$$

Comparación f. de transferencia en ω

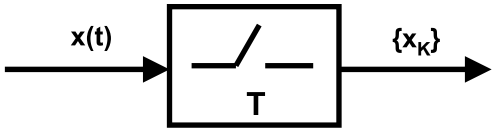






Resumen muestreo y reconstrucción

Muestreadores

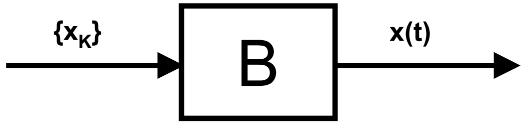


$$x_k = x(k \cdot T)$$

$$\chi(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+} X\left(\omega + \frac{2\pi r}{T}\right)$$

$$\chi(s) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+} X\left(s + \frac{2\pi r}{T} j\right)$$

Bloqueadores



$$B_i : \left\{ g(t) = \frac{sen(\omega_1 t)}{\omega_1 t} \right. \qquad \omega_1 = \frac{\pi}{T}$$

$$B_0 : \begin{cases} B_0(\omega) = \dfrac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega} \\ B_0(s) = \dfrac{1-e^{-sT}}{s} \end{cases}$$

$$B_1 : \begin{cases} B_1(\omega) = \dfrac{1+j\omega T}{T}\left(\dfrac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega}\right)^2 \\ B_1(s) = \dfrac{1+sT}{T}\left(\dfrac{1-e^{-sT}}{s}\right)^2 \end{cases}$$

MUESTREO Y RECONSTRUCCIÓN DE SEÑALES

Teoría de circuitos y sistemas