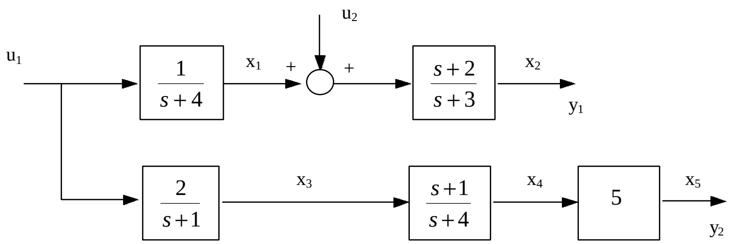
EXAMEN DE SISTEMAS ELECTRÓNICOS DE CONTROL

(2ª Parte) FINAL Junio 2001

SOLUCIÓN

Problema 1

Para el sistema representado por el siguiente diagrama de bloques:



Se pide:

a) Indicar cuales de las variables x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 pueden ser por separado variables de estado.

(1 punto)

Variables de estado:

- **x_1** si puede ser variable de estado ya que corresponde a la salida de un integrador.
- **x_2** no puede ser variable de estado ya que puede variar bruscamente ante un cambio brusco en **u_2** (mismo orden del numerador y del denominador de la función de transferencia directa)
- **x_3** si puede ser variable de estado ya que corresponde a la salida de un integrador.
- **x_4** si puede ser variable de estado ya que corresponde a la salida de bloque cuya entrada puede ser variable de estado y por tanto no puede variar bruscamente ante variaciones bruscas de las entradas.
- **x_5** si puede ser variable de estado ya que, como en el caso anterior, corresponde a la salida de bloque cuya entrada puede ser variable de estado y por tanto no puede variar bruscamente ante variaciones bruscas de las entradas. Evidentemente **x_5, x_4** son linealmente dependientes, pero por separado cualquiera de ellas puede ser variable de estado.

b) Elegir un conjunto de variables de estado que contenga el máximo número de las variables x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , indicando las ecuaciones matriciales del modelo de estado y <u>representando gráficamente</u> dichas ecuaciones:

(3 puntos)

La dimensión del sistema es 4 (el bloque constante no incorpora dinámica), por lo que <u>**necesitamos 4 variables de estado**</u>.

x_2 no puede ser variable de estado, y **x_5, x_4** son linealmente dependientes por lo que de las variables indicadas utilizaremos:

x_1, x_3, x_4

Necesitamos una variable de estado adicional asociada al bloque cuyas salida es **x_2**. Para ello recurriremos al método sistemático a partir de la función de transferencia:

Del bloque **$X_2(s)/(U_2(s)+X_1(s))$** tenemos:

$$s\,x_2 + 3\,x_2 = s\,u_2 + 2\,u_2 + s\,x_1 + 2\,x_1 \Rightarrow s\,(\underbrace{x_2 - u_2 - x_1}_{x_6}) = 2\,u_2 + 2\,x_1 - 3\,x_2$$

Obtenemos:

$$\dot{x}_6 = 2\,u_2 + 2\,x_1 - 3\,x_2 \quad ; \quad x_6 = x_2 - u_2 - x_1 \Rightarrow x_2 = x_6 + u_2 + x_1$$

$$\dot{x}_6 = 2\,u_2 + 2\,x_1 - 3\,(x_6 + u_2 + x_1) = -x_1 - 3x_6 - u_2$$

$$\boxed{\dot{x}_6 = -x_1 - 3x_6 - u_2}$$

Del bloque **$X_1(s)/U_1(s)$** tenemos:

$$s\,x_1 + 4\,x_1 = u_1$$

$$\boxed{\dot{x}_1 = -4\,x_1 + u_1}$$

Del bloque **$X_3(s)/U_1(s)$** tenemos:

$$s\,x_3 + x_3 = 2u_1$$

$$\boxed{\dot{x}_3 = -x_3 + 2u_1}$$

Del bloque **$X_4(s)/X_3(s)$** tenemos:

$$s\,x_4 + 4x_4 = s\,x_3 + x_3$$

$$\dot{x}_4 = -4x_4 + x_3 + (-x_3 + 2u_1) = -4x_4 + 2u_1$$

$$\boxed{\dot{x}_4 = -4\,x_4 + 2u_1}$$

La salidas vendrían dadas por:

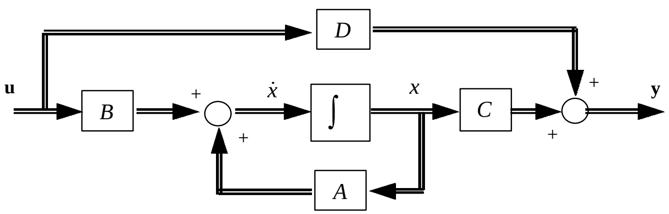
$$y_1 = x_2 = x_1 + x_6 + u_2$$
$$y_2 = 5\,x_4$$

De forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$$
$$y(t) = C\,x(t) + D\,u(t)$$



Campus de Elche. Avda. del Ferrocarril s/n – 03202 ELCHE

c) Razonar si el sistema es controlable y dar la dimensión del subespacio controlable, así como una base de dicho subespacio. Separar el subsistema controlable del no controlable. (representando gráficamente)

(2,5 puntos)

Planteamos la matriz de controlabilidad:

$$Q = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 & 16 & 0 & -64 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -8 & 0 & 32 & 0 & -128 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 7 & -9 & -37 & 27 \end{bmatrix} \rightarrow rango = 3$$

El sistema es **No Controlable**. Intuitivamente puede observarse en el diagrama de bloques que las variables x_1 y x_4 corresponden a dos bloques en paralelo con la misma dinámica.

La dimensión del subespacio controlable es **3**. Una base de este subespacio (BSC) está formada por tres columnas linealmente independientes de la matriz Q:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ -8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Calculamos la matriz se separación del susbsistema controlable. Está formada por los 3 vectores de la BSC (T_a) y un vector cualquiera que sea linealmente independiente (T_b):

$$T = [T_a, T_b] \Rightarrow T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}6667 & -0.1667 & 0 \\ 0 & -0.1667 & 0.1667 & -1 \\ 0 & 0.1667 & -0.1667 & 0 \\ 1 & 0 & -0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

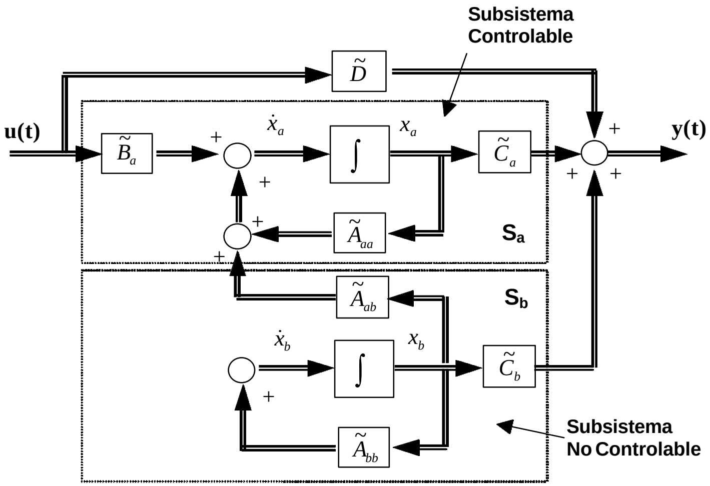
$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{C} = C\,T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 & 1 \\ 10 & 0 & -40 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{D} = D$$

La parte controlable corresponde a las tres primeras variables de estado en la nueva representación de estado. La siguiente figura describe la separación realizada:

Campus de Elche. Avda. del Ferrocarril s/n – 03202 ELCHE

$$\tilde{A}_{aa} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \tilde{A}_{ab} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{A}_{bb} = [-4] \quad \tilde{B}_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C}_a = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 10 & 0 & -40 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}_b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Campus de Elche. Avda. del Ferrocarril s/n – 03202 ELCHE

d) Razonar si el sistema es observable y dar la dimensión del subespacio no observable, así como una base de dicho subespacio. Separar el subsistema observable del no observable. (representando gráficamente)

(2,5 puntos)

Planteamos la matriz de observabilidad:

$$P = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -20 & 0 \\ 23 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 80 & 0 \\ -101 & 0 & 0 & -27 \\ 0 & 0 & -320 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow rango = 3$$

El sistema es **No Observable**. Intuitivamente puede observarse en el diagrama de bloques, que en los bloques correspondientes a las variables x_3 y x_4 se produce una cancelación polo/cero.

La dimensión del subespacio no observable es **1**. Una base de este subespacio (BSNO) está formada por la solución de la ecuación: $P\,x = 0$. Si nos quedamos con tres filas linealmente independientes de P tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_6 \end{bmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{matrix} x_1 = -x_6 \\ x_4 = 0 \\ -5x_1 = 3x_6 \end{matrix} \quad \Rightarrow x_1 = x_4 = x_6 = 0$$

Por tanto la BSNO es un vector tal que $x_1 = x_4 = x_6 = 0$ y x_3 puede tomar cualquier valor. La parte no observable corresponde a la variable x_3 que es la variable intermedia en la cancelación polo/cero. Por tanto la base del subespacio no observable es:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calculamos la matriz se separación del susbsistema observable del no observale. Está formada por el vector de la BSNO colocado al final (T_b) junto a 3 vectores cualquiera que sean linealmente independientes (T_a). (**nota**: en este caso, ya que el subespacio no observable coincide con la variable x_3, basta con reordenarlas colocándola al final):

$$T = [T_a, T_b] \Rightarrow \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

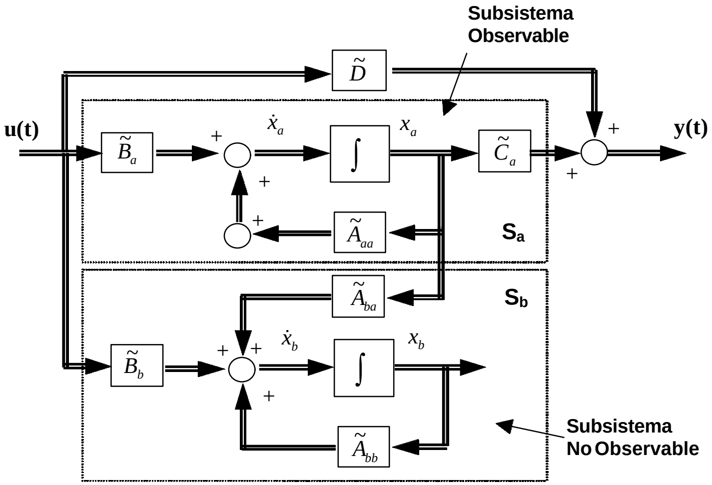
Campus de Elche. Avda. del Ferrocarril s/n – 03202 ELCHE

$$\tilde{A}=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}-4&0&0&0\\0&-4&0&0\\-1&0&-3&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\quad \tilde{B}=T^{-1}B=\begin{bmatrix}1&0\\2&0\\0&-1\\2&0\end{bmatrix}\quad \tilde{C}=C\,T=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&5&0&0\end{bmatrix}\quad \tilde{D}=D$$

La parte observable corresponde a las tres primeras variables de estado en la nueva representación de estado. En la siguiente figura se muestra la separación realizada:

$$\tilde{A}_{aa}=\begin{bmatrix}-4&0&0\\0&-4&0\\-1&0&-3\end{bmatrix},\quad \tilde{A}_{ba}=\begin{bmatrix}0&0&0\end{bmatrix},\quad \tilde{A}_{bb}=\begin{bmatrix}-1\end{bmatrix}$$

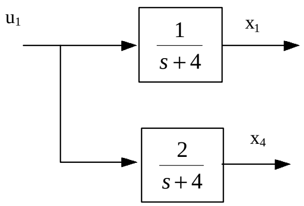
$$\tilde{B}_{a}=\begin{bmatrix}1&0\\2&0\\0&-1\end{bmatrix},\quad \tilde{B}_{b}=\begin{bmatrix}2&0\end{bmatrix},\quad \tilde{C}_{a}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&5&0\end{bmatrix},\quad \tilde{D}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$$



e) Razonar a partir del diagrama de bloques los resultados anteriores sobre la controlabilidad y observabilidad del sistema. ¿qué elementos hacen que el sistema sea o no controlable y/o observable y porqué?

(1 punto)

Si observamos en el diagrama de bloques, la relacción entre las variables de estado x_1 y x_4 con respecto a la entrada u_1., corresponde a dos bloques en paralelo con la misma dinámica por lo que no van a poder ser controlables conjuntamente.



También se puede observar la cancelación polo/cero que se produce entre los bloques en serie cuyas salida son x_3 y x_4 Esta cancelación hace que la variable x_3 quede oculta no pudiendo ser observada a partir de la salida y_2. si observamos del apartado anterior el susbespacio no observable coincide con la variable x_3.