# Autómatas y Sistemas de Control
## 3º Ingeniería Industrial

---

**Solución problema 21-control discreto (cálculo de errores en un sistema muestreado y con un controlador discreto, propuesto en el examen de septiembre de 2004)**

En primer lugar discretizamos el regulador continuo $R(s)$ usando la aproximación trapezoidal con $T = 1$ s:

$$R(z) = R(s)\big|_{s=\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = K \cdot \frac{1}{1+0.3s}\bigg|_{s=\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} =$$

$$= K \cdot \frac{1}{1+0.3\cdot\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = K \cdot \frac{1}{1+0.3\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{K(1+z^{-1})}{1+z^{-1}+0.6\cdot(1-z^{-1})} =$$

$$= \frac{K(1+z^{-1})}{1.6+0.4z^{-1}} = \frac{K(z+1)}{1.6z+0.4} = \boxed{0.625\cdot K\cdot\frac{z+1}{z+0.25}}$$

A continuación calcularemos el equivalente discreto a los bloques bloqueador de orden cero - sistema $G(s)$ - muestreador:

$$\begin{aligned}
BG(z) &= (1-z^{-1})\sum_{p=0,-1}\text{Residuos}\left[\frac{1}{p}\cdot\frac{3}{p+1}\cdot\frac{1}{1-e^{pT}\cdot z^{-1}}\right] = \\
&= (1-z^{-1})\cdot\left[\frac{3}{p+1}\cdot\frac{1}{1-e^{p}}\cdot z^{-1}\bigg|_{p=0} + \frac{3}{p}\cdot\frac{1}{1-e^{p}\cdot z^{-1}}\bigg|_{p=-1}\right] = \\
&= (1-z^{-1})\left[\frac{3}{1-z^{-1}} - \frac{3}{1-e^{-1}z^{-1}}\right] = \\
&= 3(1-e^{-1})\cdot\frac{z^{-1}}{1-e^{-1}z^{-1}}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{BG(z) = 3(1-e^{-1})\cdot\frac{1}{z-e^{-1}}}$$

La función de transferencia discreta en bucle abierto será:

$$\begin{aligned}
R(z)\cdot BG(z) &= 0.625\cdot K\cdot\frac{z+1}{z+0.25}\cdot 3(1-e^{-1})\cdot\frac{1}{z-e^{-1}} = \\
&= \boxed{K\cdot 1.875(1-e^{-1})\cdot\frac{z+1}{(z+0.25)(z-e^{-1})}}
\end{aligned}$$

Antes de calcular los errores pedidos habrá que comprobar si el sistema es estable en bucle cerrado para $K = 1$ y $K = 1/2$. Para ello pueden usarse varios métodos (lugar de las raíces, Jury, etc.). Un método sencillo consiste en calcular los polos en bucle cerrado del sistema para las ganancias de interés ($K = 1$, $K = 1/2$) y comprobar si están en el interior del círculo unidad. La función de transferencia en bucle cerrado es:

$$\begin{aligned}
M(z) &= \frac{BG(z)}{1+BG(z)} = \\
&= \frac{K \cdot 1.875(1-e^{-1}) \cdot \dfrac{z+1}{(z+0.25)(z-e^{-1})}}{1+K \cdot 1.875(1-e^{-1}) \cdot \dfrac{z+1}{(z+0.25)(z-e^{-1})}} = \\
&= \frac{K \cdot 1.875(1-e^{-1})(z+1)}{(z+0.25)(z-e^{-1}) + (z+1) \cdot K \cdot 1.875(1-e^{-1})} = \\
&= \frac{K \cdot 1.875(1-e^{-1})(z+1)}{z^2 + (1.185K - 0.118)z + 1.185K - 0.092}
\end{aligned}$$

La ecuación característica será por tanto:

$$z^2 + (1.185K - 0.118)z + 1.185K - 0.092 = 0$$

Para $K = 1$ esta ecuación se convierte en:

$$z^2 + 1.067z + 1.093 = 0$$

cuyas soluciones son $z = -0.535 \pm 0.899j$. El módulo de estas soluciones es

$$|-0.535 \pm 0.899j| = 1.05 > 1$$

Por tanto, ***para $K = 1$ el sistema es inestable y no tiene sentido calcular el error de posición***.

Para $K = 1/2$ la ecuación característica es

$$z^2 + 0.4745z + 0.5 = 0$$

cuyas soluciones son $z = -0.237 \pm 0.67j$. El módulo de estas soluciones es

$$|-0.237 \pm 0.67j| = 0.71 < 1$$

En este caso el sistema es estable y puede calcularse el error de posición ($K = 1/2$):

$$K_p = \lim_{z \to 1} R(z) \cdot BG(z) = \lim_{z \to 1} K \cdot 1.875(1-e^{-1}) \cdot \frac{z+1}{(z+0.25)(z-e^{-1})} = 1.5$$

$$e_p = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+1.5} = 0.4 = \boxed{40\,\%}$$