

**3° INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL,  
ESPECIALIDAD MECÁNICA  
AUTOMATIZACIÓN INDUSTRIAL**

**PROBLEMAS CONTROL DE  
PROCESOS**

**PARTE 2:**

- **DISEÑO DE REGULADORES  
CONTINUOS**

## PROBLEMA 1

Sea el modelo de una planta continua:

$$G_p(s) = \frac{3}{(s+1)(s+2)}$$

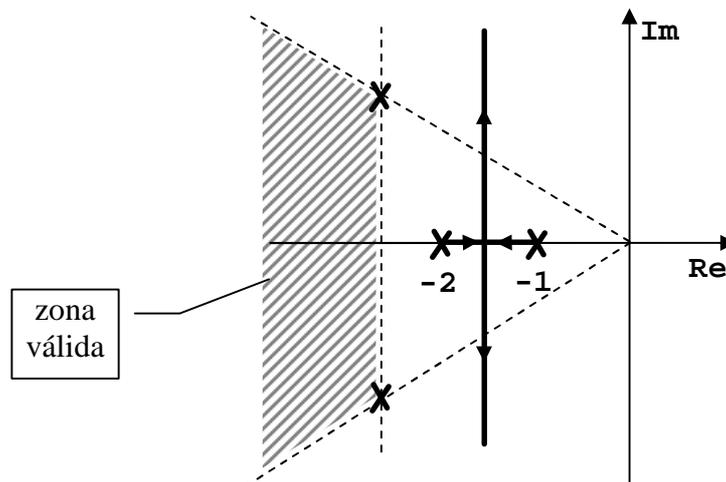
Se pide diseñar el regulador continuo más sencillo posible de forma que se consigan para el sistema realimentado las siguientes especificaciones:

- Sobreoscilación menor de un 4.3%  $M_p < 4.3\%$
- Tiempo de establecimiento de 1.256 s.
- Error de posición ante entrada escalón menor de un 50%

## SOLUCIÓN

Las especificaciones en régimen transitorio equivalen a unos polos dominantes en cadena cerrada en la posición  $s = 2.5 \pm 2.5j$  o en una posición más favorable.

En primer lugar se comprueba que un regulador tipo P no es suficiente, porque el lugar de las raíces de la planta sin controlador no pasa por los polos deseados.



Como siguiente paso se prueba con un regulador tipo PD, que es dimensionado mediante la técnica del lugar de las raíces. A continuación se muestra  $C(s)$  o la función de transferencia del controlador obtenido:

$$C(s) = 2.17 \frac{s+1}{s+3}$$

Falta por verificar que se cumplen las especificaciones de régimen permanente. El error de posición será:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} C(s) \cdot G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{3}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{2.17(s+1)}{(s+3)} = 1.08$$

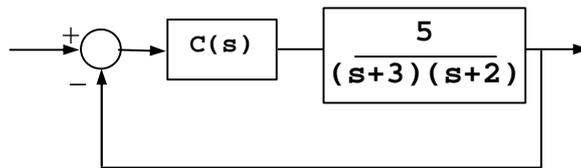
$$e_p = \frac{1}{1+K_p} = 0.48 = 48\%$$

Por lo tanto, se cumplen las especificaciones.

## PROBLEMA 2

En el diagrama de bloques de la figura inferior, el elemento  $C(s)$  representa un controlador. Se pide diseñar el controlador más sencillo que haga cumplir a la planta las siguientes especificaciones ante entrada escalón:

- Sobreoscilación  $< 20.8\%$
- Tiempo de establecimiento  $< 1.57s$
- Error de posición  $< 20\%$

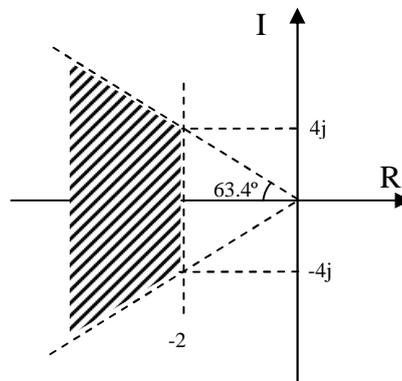


## SOLUCIÓN

En primer lugar, se expresan las especificaciones pedidas para el régimen transitorio como la zona del plano complejo donde podrían encontrarse los polos del sistema:

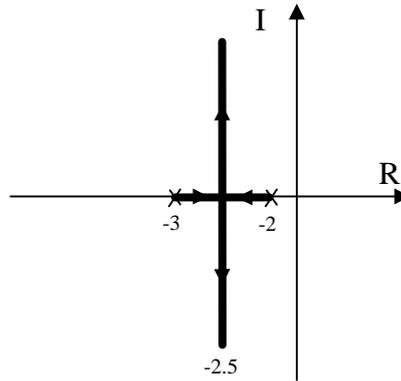
$$t_s = \frac{p}{s} \leq 1.57 \Rightarrow s \geq 2$$

$$M_p = e^{-\frac{p}{\tan q}} \leq 0.208 \Rightarrow q \leq 63.4^\circ$$



A continuación se prueba con el más sencillo de los reguladores, el proporcional [ $C(s)=K$ ]. Este regulador será válido si el LDR del sistema pasa por la zona válida. El trazado de este LDR es muy simple:

$$G(s) = \frac{5}{(s+3)(s+2)}$$



Podemos ver cómo el LDR pasa por la zona válida, por lo tanto el regulador tipo P será suficiente.

Para que el comportamiento en régimen permanente sea lo mejor posible, se elegirá la constante K del regulador lo más grande posible sin que el LDR se salga de la zona válida: por tanto se buscará el valor de K para el cual el LDR pasa por el punto  $-2.5+5j$ . Se empleará el criterio del módulo:

$$K' = \frac{\prod |s - p_i|}{\prod |s - z_i|} = \sqrt{5^2 + 0.5^2} \cdot \sqrt{5^2 + 0.5^2} = 25.25$$

$$K' = 5K \Rightarrow K = 5.05$$

Sólo falta comprobar si este regulador cumple las especificaciones en régimen permanente (error de posición menor del 20%):

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} [C(s) \cdot G(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ 5.05 \cdot \frac{5}{(s+3)(s+2)} \right] = 4.21$$

$$e_p = \frac{1}{1 + K_p} = 0.19 = 19\% < 20\% \Rightarrow \text{el regulador es válido}$$

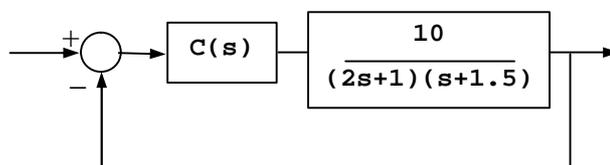
El regulador obtenido es, por tanto:

$$C(s) = 5.05$$

### **PROBLEMA 3**

Para el sistema de la figura, diseñar el regulador  $C(s)$  más sencillo posible que haga cumplir a la planta las siguientes especificaciones ante entrada escalón:

- Sobreoscilación = 4.32%
- Tiempo de establecimiento = 1.57s
- Error de posición = 48%

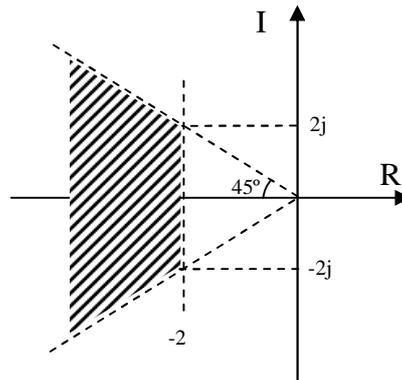


## SOLUCIÓN

En primer lugar, se expresan las especificaciones pedidas para el régimen transitorio como la zona del plano complejo donde podrían encontrarse los polos del sistema:

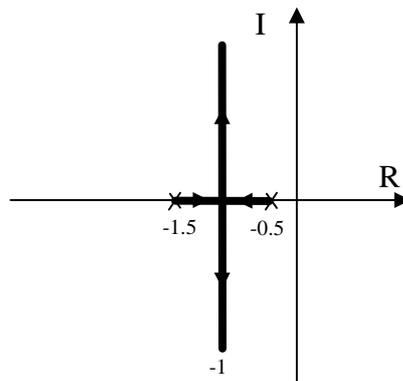
$$t_s = \frac{p}{s} \leq 1.57 \Rightarrow s \geq 2$$

$$M_p = e^{-\frac{p}{\tan q}} \leq 0.0432 \Rightarrow q \leq 45^\circ$$



A continuación se prueba con el más sencillo de los reguladores, el proporcional. Este regulador será válido si el LDR del sistema pasa por la zona válida. El trazado de este LDR es muy simple:

$$G(s) = \frac{5}{(s+1.5)(s+0.5)}$$

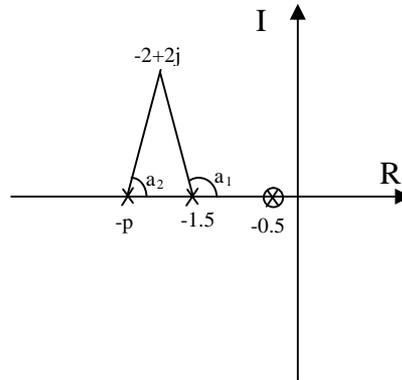


Queda claro que el LDR no pasa por la zona válida, por tanto el regulador tipo P no es válido, será necesario probar con un regulador tipo PD:

$$C(s) = K \cdot \frac{s+z}{s+p}$$

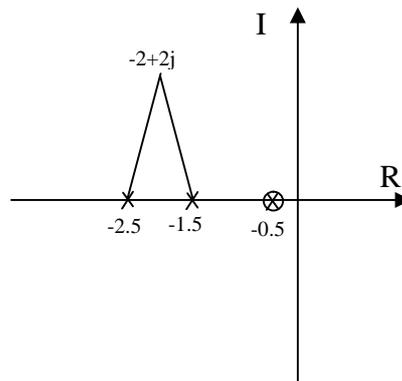
El cero del regulador (-z) se elegirá de modo que cancele al polo más significativo del sistema a controlar (salvo polos en el origen) en cadena abierta, por tanto  $z = 0.5$

El polo del regulador se elegirá de acuerdo con el criterio del argumento de modo que el LDR del sistema más el controlador pase por el punto deseado  $(-2 \pm 2j)$ :



$$-\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = 180 \Rightarrow \mathbf{a}_2 = 76^\circ \Rightarrow p = 2.5$$

El valor de la constante K se elegirá de modo que se cumpla el criterio del módulo:



$$K' = \frac{\prod |s - p_i|}{\prod |s - z_i|} = \sqrt{0.5^2 + 2^2} \cdot \sqrt{0.5^2 + 2^2} = 4.25$$

$$K' = 5K \Rightarrow K = 0.85$$

El regulador tipo PD sería:

$$C(s) = 0.85 \cdot \frac{s + 0.5}{s + 2.5}$$

Por último, es necesario comprobar si este regulador es válido para los requisitos pedidos en régimen permanente ( $e_p = 48\%$ )

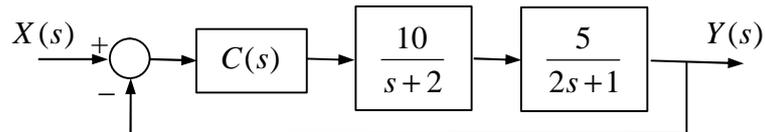
$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} [C(s) \cdot G(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ 0.85 \cdot \frac{s + 0.5}{s + 2.5} \cdot \frac{5}{(s + 1.5)(s + 0.5)} \right] = 1.13$$

$$e_p = \frac{1}{1 + K_p} = 0.47 = 47\% < 48\% \Rightarrow \text{el regulador es válido}$$

#### PROBLEMA 4

En el sistema de la figura inferior, se pide diseñar el controlador  $C(s)$  más sencillo que haga cumplir las siguientes especificaciones a la salida  $y(t)$  ante entrada  $x(t)$  escalón:

- Sobreoscilación = 16.3%
- Tiempo de pico = 1.05 segundos
- Error de posición en régimen permanente = 30%

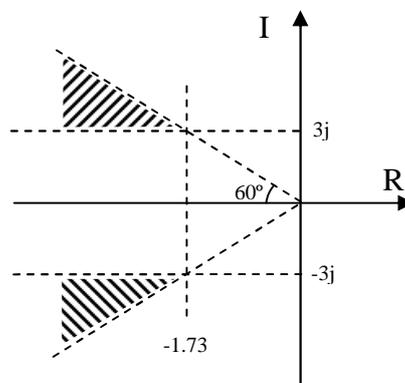


#### SOLUCIÓN

En primer lugar, se expresan las especificaciones pedidas para el régimen transitorio como la zona del plano complejo donde podrían encontrarse los polos del sistema:

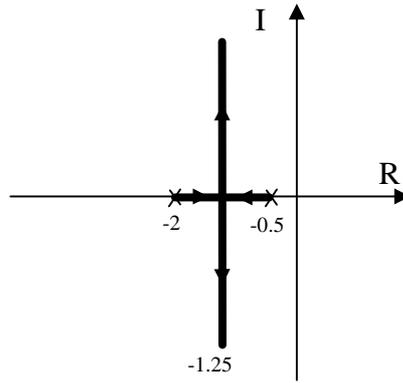
$$t_p = \frac{p}{w_d} \leq 1.05 \Rightarrow w_d \geq 3$$

$$M_p = e^{-\frac{p}{\tan q}} \leq 0.163 \Rightarrow q \leq 60^\circ$$



A continuación se prueba con el más sencillo de los reguladores, el proporcional. Este regulador será válido si el LDR del sistema pasa por la zona válida. El trazado de este LDR es muy simple:

$$G(s) = \frac{25}{(s+2)(s+0.5)}$$

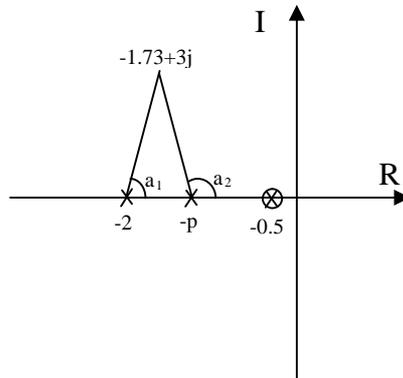


Queda claro que el LDR no pasa por la zona válida, por tanto el regulador tipo P no es válido, será necesario probar con un regulador tipo PD:

$$C(s) = K \cdot \frac{s + z}{s + p}$$

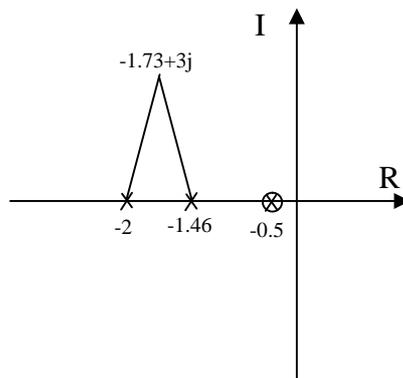
El cero del regulador (-z) se elegirá de modo que cancele al polo más significativo del sistema a controlar (salvo polos en el origen) en cadena abierta, por tanto  $z = 0.5$

El polo del regulador se elegirá de acuerdo con el criterio del argumento de modo que el LDR del sistema más el controlador pase por el punto deseado  $(-1.73 \pm 3j)$ :



$$-a_1 - a_2 = 180 \Rightarrow a_2 = 95.14^\circ \Rightarrow p = 1.46$$

El valor de la constante K se elegirá de modo que se cumpla el criterio del módulo:



$$K' = \frac{\prod |s - p_i|}{\prod |s - z_i|} = \sqrt{0.27^2 + 3^2} \cdot \sqrt{0.27^2 + 3^2} = 9.07$$

$$K' = 25K \Rightarrow K = 0.36$$

El regulador tipo PD sería:

$$C(s) = 0.36 \cdot \frac{s + 0.5}{s + 1.46}$$

Por último, es necesario comprobar si este regulador es válido para los requisitos pedidos en régimen permanente ( $e_p = 30\%$ )

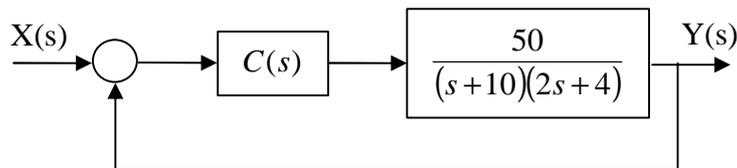
$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} [C(s) \cdot G(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ 0.36 \cdot \frac{s + 0.5}{s + 1.46} \cdot \frac{25}{(s + 2)(s + 0.5)} \right] = 3.1$$

$$e_p = \frac{1}{1 + K_p} = 0.243 = 24.3\% < 30\% \Rightarrow \text{el regulador es válido}$$

### PROBLEMA 5

Para el sistema de la figura, diseñar el regulador  $C(s)$  más sencillo posible que haga cumplir a la planta las siguientes especificaciones ante entrada escalón:

- Sobreoscilación = 2.37%
- Tiempo de establecimiento = 0.785s
- Error de posición = 25%

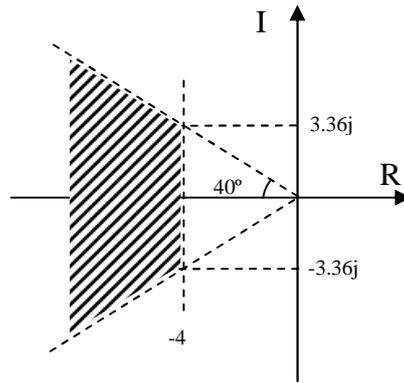


### SOLUCIÓN

En primer lugar, se expresan las especificaciones pedidas para el régimen transitorio como la zona del plano complejo donde podrían encontrarse los polos del sistema:

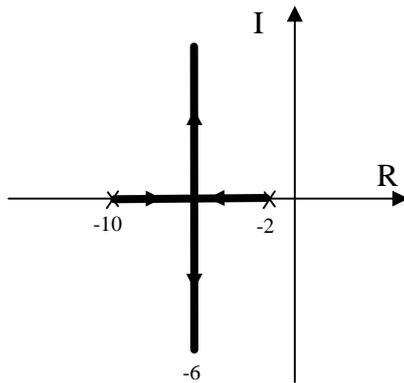
$$t_s = \frac{p}{s} \leq 0.785 \Rightarrow s \geq 4$$

$$M_p = e^{-\frac{p}{\tan q}} \leq 0.0237 \Rightarrow q \leq 40^\circ$$



A continuación se prueba con el más sencillo de los reguladores, el proporcional [C(s)=K]. Este regulador será válido si el LDR del sistema pasa por la zona válida. El trazado de este LDR es muy simple:

$$G(s) = \frac{25}{(s+10)(s+2)}$$



Podemos ver cómo el LDR pasa por la zona válida, por lo tanto el regulador tipo P será suficiente para cumplir las especificaciones en régimen permanente.

Para que el comportamiento en régimen permanente sea lo mejor posible, se elegirá la constante K del regulador lo más grande posible sin que el LDR se salga de la zona válida: por tanto se buscará el valor de K para el cual el LDR pasa por el punto de coordenadas  $-6+5.03j$ . Se empleará el criterio del módulo:

$$25K = \frac{\prod |s - p_i|}{\prod |s - z_i|} = \sqrt{5.03^2 + 4^2} \cdot \sqrt{5.03^2 + 4^2} = 41.3 \Rightarrow K = 1.65$$

Sólo falta comprobar si este regulador cumple las especificaciones en régimen permanente (error de posición menor del 25%):

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} [C(s) \cdot G(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ 1.65 \cdot \frac{25}{(s+10)(s+2)} \right] = 2.06$$

$$e_p = \frac{1}{1+K_p} = 0.326 = 32.6\% > 25\% \Rightarrow \text{el regulador no es v\u00e1lido}$$

Para corregir el error en r\u00e9gimen permanente se introduce un efecto integral en el regulador:

$$C(s) = K \cdot \frac{s+z}{s+p}$$

- La constante K es la obtenida para el regulador proporcional:  $K = 1.65$
- La situaci\u00f3n del cero z se elige a 1/6 del valor real de los polos deseados:

$$z = \frac{6}{6} = 1$$

- Por \u00faltimo, la situaci\u00f3n del polo p se elige de modo que se cumpla la condici\u00f3n de error en r\u00e9gimen permanente solicitada:

$$e_p = \frac{1}{1+K_p} \leq 0.25 \Rightarrow K_p \geq 3$$

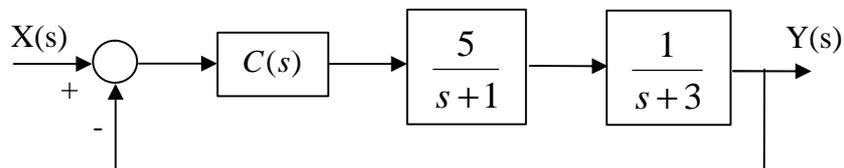
$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} [C(s) \cdot G(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ 1.65 \cdot \frac{s+1}{s+p} \cdot \frac{25}{(s+10)(s+2)} \right] = \frac{2.06}{p} \geq 3 \Rightarrow p \leq 0.687$$

Se elige  $p = 0.687$  y el regulador queda:

$$C(s) = 1.65 \cdot \frac{s+1}{z+0.687}$$

## **PROBLEMA 6**

Consid\u00e9rese el sistema de la figura:



Se pide dise\u00f1ar el regulador  $C(s)$  m\u00e1s sencillo posible que haga cumplir a la planta las siguientes especificaciones ante entrada escal\u00f3n:

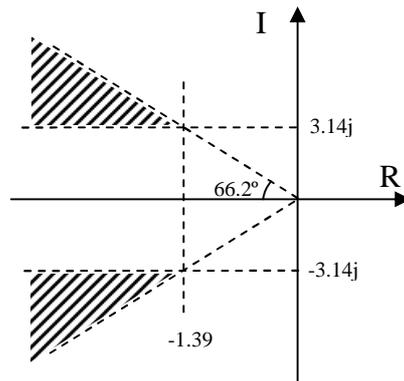
- Sobreoscilaci\u00f3n = 25%
- Tiempo de pico = 1 segundo
- Error de posici\u00f3n en r\u00e9gimen permanente = 4%

## SOLUCIÓN

En primer lugar, se expresan las especificaciones pedidas para el régimen transitorio como la zona del plano complejo donde podrían encontrarse los polos del sistema:

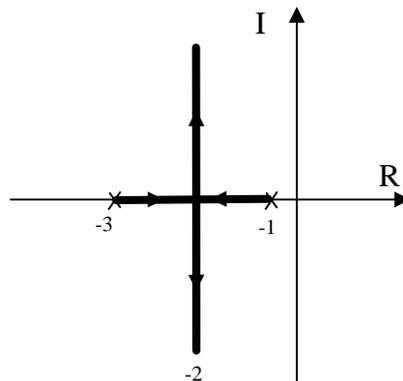
$$t_p = \frac{p}{w_d} \leq 1 \Rightarrow w_d \geq 3.14$$

$$M_p = e^{-\frac{p}{\tan q}} \leq 0.25 \Rightarrow q \leq 66.2^\circ$$



A continuación se prueba con el más sencillo de los reguladores, el proporcional [C(s)=K]. Este regulador será válido si el LDR del sistema pasa por la zona válida. El trazado de este LDR es muy simple:

$$G(s) = \frac{5}{(s+1)(s+3)}$$



Podemos ver cómo el LDR pasa por la zona válida, por lo tanto el regulador tipo P será suficiente para cumplir las especificaciones en régimen permanente.

Para que el comportamiento en régimen permanente sea lo mejor posible, se elegirá la constante K del regulador lo más grande posible sin que el LDR se salga de la zona válida: por tanto se buscará el valor de K para el cual el LDR pasa por el punto de coordenadas  $-2+4.53j$ . Se empleará el criterio del módulo:

$$5K = \frac{\prod |s - p_i|}{\prod |s - z_i|} = \sqrt{4.53^2 + 1^2} \cdot \sqrt{4.53^2 + 1^2} = 21.52 \Rightarrow K = 4.3$$

Sólo falta comprobar si este regulador cumple las especificaciones en régimen permanente (error de posición menor del 4%):

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} [C(s) \cdot G(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ 4.3 \cdot \frac{5}{(s+1)(s+3)} \right] = 7.17$$

$$e_p = \frac{1}{1 + K_p} = 0.122 = 12.2\% > 4\% \Rightarrow \text{el regulador no es válido}$$

Para corregir el error en régimen permanente se introduce un efecto integral en el regulador:

$$C(s) = K \cdot \frac{s + z}{s + p}$$

- La constante K es la obtenida para el regulador proporcional:  $K = 4.3$
- La situación del cero z se elige a 1/6 del valor real de los polos deseados:

$$z = \frac{2}{6} = 0.33$$

- Por último, la situación del polo p se elige de modo que se cumpla la condición de error en régimen permanente solicitada:

$$e_p = \frac{1}{1 + K_p} \leq 0.04 \Rightarrow K_p \geq 24$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} [C(s) \cdot G(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ 4.3 \cdot \frac{s + 0.33}{s + p} \cdot \frac{5}{(s+1)(s+3)} \right] = \frac{2.36}{p} \geq 24 \Rightarrow p \leq 0.098$$

Se elige  $p = 0.098$  para afectar lo menos posible al comportamiento en régimen transitorio y el regulador queda:

$$C(s) = 4.3 \cdot \frac{s + 0.33}{z + 0.098}$$