3º INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL,
ESPECIALIDAD MECÄNICA

AUTOMATIZACIÓN INDUSTRIAL

PROBLEMAS CONTROL DE PROCESOS

PARTE 1:

- **MODELADO DE SISTEMAS CONTINUOS**

PROBLEMA 1

Considérese el sistema definido por las ecuaciones diferenciales siguientes:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2w(t)}{dt^2} - 3\cdot\dfrac{dw(t)}{dt} = 40 - 20\cdot\dfrac{w(t)}{x(t)} \\ y(t) = 5\cdot w(t) - 2\cdot y(t)\cdot\dfrac{dy(t)}{dt} + 2\cdot v(t) \end{cases}$$

- **x, v:** señales de entrada
- **y:** señal de salida

Punto de funcionamiento: **x(0)=2; v(0)=5**

Se pide:

- Obtener la función de transferencia $G_1(s) = Y(s) / X(s)$. ¿Corresponde a un sistema estable?
- Obtener la función de transferencia $G_2(s) = Y(s) / V(s)$. ¿Corresponde a un sistema estable?

SOLUCIÓN

Obtención del punto de funcionamiento (derivadas=0):

$$\begin{cases} 0 - 3\cdot 0 = 40 - 20\cdot\dfrac{w(0)}{x(0)} \\ y(0) = 5\cdot w(0) - 2\cdot y(0)\cdot 0 + 2\cdot v(0) \\ x(0) = 2 \\ v(0) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w(0) = 4 \\ y(0) = 30 \end{cases}$$

Linealización y expresión en variables incrementales:

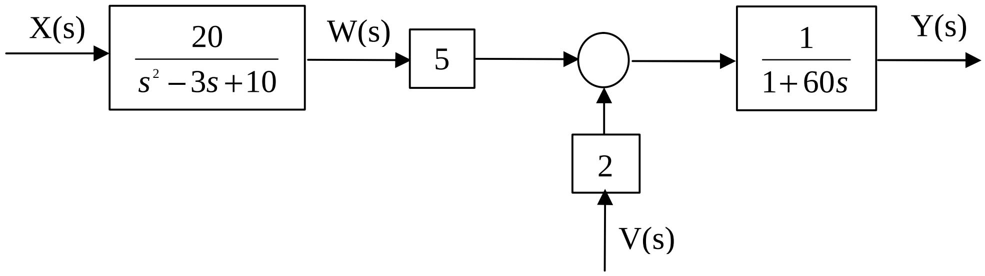
$$\begin{cases} \Delta\ddot{w}(t) - 3\Delta\dot{w}(t) = 0 - 20\dfrac{d}{dw(t)}\left[\dfrac{w(t)}{x(t)}\right]_0 \Delta w(t) - 20\dfrac{d}{dx(t)}\left[\dfrac{w(t)}{x(t)}\right]_0 \Delta x(t) \\ \Delta y(t) = 5\Delta w(t) - 2\dfrac{d}{dy(t)}\left[y(t)\cdot\dot{y}(t)\right]_0 \Delta y(t) - 2\dfrac{d}{d\dot{y}(t)}\left[y(t)\cdot\dot{y}(t)\right]_0 \Delta\dot{y}(t) + 2\Delta v(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\ddot{w}(t) - 3\Delta\dot{w}(t) = -10\Delta w(t) + 20\Delta x(t) \\ \Delta y(t) = 5\Delta w(t) - 60\Delta\dot{y}(t) + 2\Delta v(t) \end{cases}$$

Transformación al dominio de Laplace:

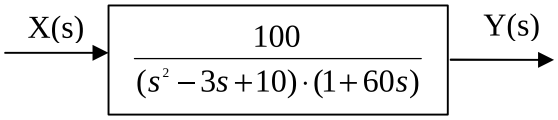
$$\begin{cases} s^2 \cdot W(s) - 3s \cdot W(s) = -10 \cdot W(s) + 20 \cdot X(s) \\ Y(s) = 5 \cdot W(s) - 60s \cdot Y(s) + 2 \cdot V(s) \end{cases} \qquad \begin{cases} W(s) \cdot [s^2 - 3s + 10] = 20 \cdot X(s) \\ Y(s) \cdot [1 + 60s] = 5 \cdot W(s) + 2 \cdot V(s) \end{cases}$$

Diagrama de bloques:



Función de transferencia $G_1(s)$:

v(t) = cte ?   V(s) = 0. Se reduce el diagrama y queda:

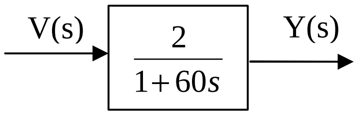


$$G_1(s) = \frac{100}{(s^2 - 3s + 10) \cdot (1 + 60s)} = \frac{100}{60s^3 - 179s^2 + 597s + 10}$$

$G_1(s)$ es inestable según el criterio de Routh por no tener todos los términos del denominador el mismo signo (algún polo tiene parte real no negativa).

Función de transferencia $G_2(s)$:

x(t) = cte ?   X(s) = 0. Se reduce el diagrama y queda:



$$G_2(s) = \frac{2}{1 + 60s}$$

$G_2(s)$ es estable porque su único polo (s = -1/60) tiene parte real negativa.

PROBLEMA 2

Un sistema desconocido responde a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3}+2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+3\frac{dx(t)}{dt}\cdot y(t)+2y(t)-10\frac{dx(t)}{dt}-x^2(t)-2=0$$

Considerando **x(t)** como la entrada del sistema e **y(t)** como la salida, se pide:

- Obtener la función de transferencia en **s** del sistema.
- Determinar si el sistema es o no estable.

Se trabajará en torno al punto de funcionamiento definido por **x(0)=2**.

SOLUCIÓN

Cálculo del punto de equilibrio (derivadas igual a cero):

$$\left.\begin{array}{l} 2y(0)-x^2(0)-2=0 \\ x(0)=2 \end{array}\right\} \quad y(0)=3$$

Linealización y expresión en variables incrementales:

$$\Delta\dddot{y}(t)+2\Delta\ddot{y}(t)+5\Delta\dot{y}(t)+\left[3\dot{x}(0)\right]\Delta y(t)+\left[3y(0)\right]\Delta\dot{x}(t)+2\Delta y(t)-10\Delta\dot{x}(t)-\left[2x(0)\right]\Delta x(t)=0$$

$$\Delta\dddot{y}(t)+2\Delta\ddot{y}(t)+5\Delta\dot{y}(t)+2\Delta y(t)-\Delta\dot{x}(t)-4\Delta x(t)=0$$

Paso al dominio de Laplace y función de transferencia:

$$s^3Y(s)+2s^2Y(s)+5sY(s)+2Y(s)-sX(s)-4X(s)=0$$

$$F(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{s+4}{s^3+2s^2+5s+2}$$

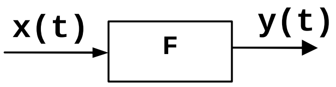
Para determinar la estabilidad se calculan los polos del sistema:

$$s^3+2s^2+5s+2=0 \quad \rightarrow \quad s=-0.77\pm1.92j;-0.47$$

Dado que todos los polos tienen parte real negativa, el sistema es estable.

PROBLEMA 3

Un sistema **F** responde a la siguiente ecuación diferencial:



$$\boxed{x(t)+2\cdot\frac{dx(t)}{dt}=2\cdot\frac{d^3y(t)}{dt^3}+\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\cdot\frac{dy(t)}{dt}+3\cdot y^2(t)}$$

Se pide:

- Obtener la función de transferencia del sistema F(s)
- Determinar si el sistema es estable

Dato: el sistema se estudiará alrededor del punto de funcionamiento definido por x(0)=300.

SOLUCIÓN

Cálculo del punto de funcionamiento (derivadas igual a cero):

$$\left.\begin{array}{l} x(0)+0=0+0+0+3y^2(0) \\ x(0)=300 \end{array}\right\} y(0)=10$$

Linealización y expresión en variables incrementales:

$$\Delta x(t)+2\Delta\dot{x}(t)=2\Delta\dddot{y}(t)+\Delta\ddot{y}(t)+5\Delta\dot{y}(t)+[6y(0)]\Delta y(t)$$

$$\Delta x(t)+2\Delta\dot{x}(t)=2\Delta\dddot{y}(t)+\Delta\ddot{y}(t)+5\Delta\dot{y}(t)+60\Delta y(t)$$

Paso al dominio de Laplace y función de transferencia:

$$X(s)+2sX(s)=2s^3Y(s)+s^2Y(s)+5sY(s)+60Y(s)$$

$$F(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{2s+1}{2s^3+s^2+5s+60}$$

Estabilidad: se calculan los polos del sistema:

$$2s^3+s^2+5s+60=0 \quad\rightarrow\quad s=1.25\pm 2.9j;\quad -3$$

El sistema tiene dos polos con parte real positiva, con lo cual es inestable.

PROBLEMA 4

Sea el sistema definido por la siguiente ecuación diferencial, donde **x(t)** representa la entrada e **y(t)** representa la salida:

$$x^2(t) + \frac{dx(t)}{dt} + 2 \cdot x(t) \cdot y(t) = \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \cdot \frac{dy(t)}{dt}$$

Suponiendo que el punto de funcionamiento del sistema queda definido por **x(0) = 2**, se pide:

- Obtener la función de transferencia del sistema **G(s) = Y(s)/X(s).**
- Determinar si el sistema G(s) es estable.

SOLUCIÓN

En primer lugar se calcula el punto de funcionamiento del sistema igualando las derivadas a cero:

$$\left.\begin{array}{l} x^2(0) + 0 + 2 \cdot x(0) \cdot y(0) = 0 + 3 \cdot 0 \\ x(0) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y(0) = -1$$

A continuación se linealiza la ecuación diferencial y se expresa en variables incrementales:

$$\frac{d}{dx(t)}\left[x^2(t)\right]_0 \Delta x(t) + \Delta \dot{x}(t) + \frac{d}{dx(t)}\left[2 \cdot x(t) \cdot y(t)\right]_0 \Delta x(t) +$$
$$+ \frac{d}{dy(t)}\left[2 \cdot x(t) \cdot y(t)\right]_0 \Delta y(t) = \Delta \ddot{y}(t) + 3 \cdot \Delta \dot{y}(t)$$

El resultado es:

$$\Delta \dot{x}(t) + 2\Delta x(t) = \Delta \ddot{y}(t) + 3 \cdot \Delta \dot{y}(t) - 4\Delta y(t)$$

A continuación se transforma la ecuación al dominio de Laplace, resultando:

$$s \cdot X(s) + 2 \cdot X(s) = s^2 \cdot Y(s) + 3s \cdot Y(s) - 4 \cdot Y(s)$$

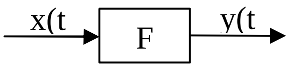
La función de transferencia se obtiene despejando:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+2}{s^2 + 3s - 4} \qquad polos: \quad s = -4;\ s = 1$$

Dado que no todos los polos tienen parte real negativa, el sistema G(s) es inestable.

PROBLEMA 5

El sistema **F** responde a la ecuación diferencial que se indica, donde **x(t)** es la entrada e **y(t)** es la salida:



$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - 4y(t)x(t) + 5\frac{dy(t)}{dt}x(t) - 2x^3(t) - \frac{dx(t)}{dt} + 40 = 0$$

Se pide:

- Obtener la función de transferencia F(s).
- Determinar si el sistema F(s) es estable.
- Determinar si el sistema F(s) realimentado unitaria y negativamente sería estable.

Dato: se analizará el sistema en torno al punto de funcionamiento definido por x(0)=2.

SOLUCIÓN

Obtención del punto de funcionamiento: se igualan las derivadas a cero:

$$\begin{cases} 0 - 4y(0)x(0) + 0 - 2x^3(0) - 0 + 40 = 0 \\ x(0) = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y(0) = 3$$

Linealización y expresión en variables incrementales. Indicamos los términos que se deben linealizar:

$$4y(t)x(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y(t)}\left[4y(t)x(t)\right]_0 \Delta y(t) + \frac{\partial}{\partial x(t)}\left[4y(t)x(t)\right]_0 \Delta x(t) = 8\Delta y(t) + 12\Delta x(t)$$

$$5\frac{dy(t)}{dt}x(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \dot{y}(t)}\left[5\dot{y}(t)x(t)\right]_0 \Delta\dot{y}(t) + \frac{\partial}{\partial x(t)}\left[5\dot{y}(t)x(t)\right]_0 \Delta x(t) = 10\Delta\dot{y}(t) + 0$$

$$2x^3(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx(t)}\left[2x^3(t)\right]_0 \Delta x(t) = 24\Delta x(t)$$

Una vez linealizados los términos no lineales y eliminados los términos independientes, la ecuación diferencial queda:

$$\Delta\ddot{y}(t) - 8\Delta y(t) - 12\Delta x(t) + 10\Delta\dot{y}(t) - 24\Delta x(t) - \dot{x}(t) = 0$$

Esta ecuación se puede pasar al dominio de Laplace, resultando:

$$s^2Y(s) - 8Y(s) - 12X(s) + 10sY(s) - 24X(s) - sX(s) = 0$$

Y de aquí se puede despejar la función de transferencia:

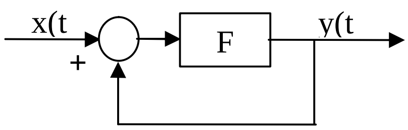
$$F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s + 36}{s^2 + 10s - 8}$$

Para determinar si el sistema **F(s)** es estable basta con calcular sus polos:

$$s^2 + 10s - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s = -10.74 \\ s = 0.74 \end{cases}$$

El sistema **F(s)** es <u>inestable</u> porque uno de sus polos tiene parte real positiva.

Si se aplica una realimentación negativa y unitaria, el sistema M(s) resultante es el siguiente:



$$M(s) = \frac{F(s)}{1+F(s)} = \frac{s+36}{s^2+11s+28}$$

Para determinar si el sistema **M(s)** es estable basta con calcular sus polos:

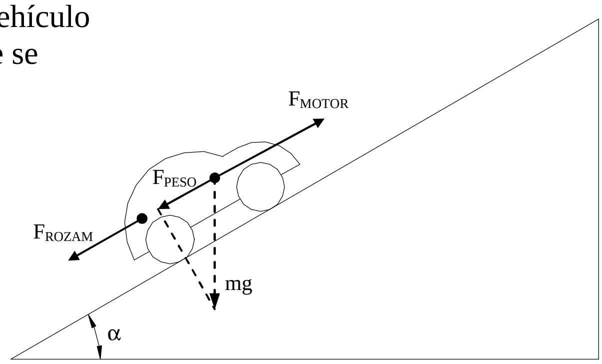
$$s^2 + 11s + 28 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s = -7 \\ s = -4 \end{cases}$$

El sistema **M(s)** es <u>estable</u> porque todos sus polos tienen parte real negativa.

<u>PROBLEMA 6</u>

Se desea modelar el comportamiento de un vehículo que circula por una carretera. Los efectos que se considerarán son:

- F_{MOTOR}: fuerza ejercida por el motor
- F_{PESO}: fuerza debida a la pendiente
- F_{ROZAM}: fuerza debida al rozamiento aerodinámico



<u>Valores de las constantes:</u>

Masa del vehículo:	m = 1000 kg
Constante del motor:	K_M = 256N/mm
Constante de rozamiento:	K_R = 5N·s/m
Gravedad:	g = 10m/s^2

<u>Variables del sistema:</u>

Posición del acelerador:	GAS [mm]
Pendiente de la carretera:	α [grados]
Velocidad del vehículo:	v[m/s]

<u>Ecuaciones físicas del sistema:</u>

$$m \cdot \frac{dv(t)}{dt} = F_{MOTOR}(t) - F_{PESO}(t) - F_{ROZAM}(t)$$

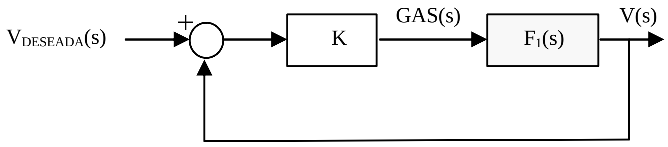
$$F_{MOTOR}(t) = K_M \cdot GAS(t)$$

$$F_{PESO}(t) = mg \cdot \mathrm{sen}(a(t))$$

$$F_{ROZAM}(t) = K_R \cdot v^2(t)$$

Se pide:

1. Obtener el valor de todas las variables en el punto de equilibrio correspondiente a una pendiente α=11º y una posición de acelerador GAS=25mm.
2. Linealizar las ecuaciones en torno a esa posición de equilibrio.
3. Expresar las ecuaciones anteriores en el dominio de Laplace.
4. Dibujar el diagrama de bloques del sistema, donde aparezcan como entradas la posición del acelerador y la pendiente de la carretera; y como salida la velocidad del vehículo.
5. Reducir el diagrama de bloques del punto 4 para obtener la función de transferencia $F_1(s)$ que relaciona la velocidad del coche con la posición del acelerador, supuesta la pendiente constante.
6. De manera equivalente, obtener la función de transferencia $F_2(s)$ que relaciona la velocidad del vehículo con la pendiente de la carretera, supuesta la posición del acelerador constante.
7. Desde la posición de equilibrio, y suponiendo que la pendiente no varía (11º), ¿cuántos mm de más debe pisarse el acelerador para que la velocidad del vehículo aumente un 10%?
8. Desde la posición de equilibrio, y suponiendo que la posición del acelerador no varía (25mm), cuánto tiempo tarda en reducirse la velocidad un 5% si la pendiente aumenta hasta 15º?
9. Se introduce en el vehículo un sistema de regulación de la velocidad como el de la figura:



donde $F_1(s)$ es la función de transferencia obtenida . Se pide calcular la función de transferencia G(s) que relaciona la velocidad real del vehículo V(s) con la velocidad deseada $V_{DESEADA}(s)$.

10. Si la velocidad deseada aumenta repentinamente 10m/s, ¿alcanzará el vehículo en régimen permanente la velocidad deseada?. Justificar en función de los valores de K

<u>SOLUCIÓN</u>

1.

$$m \cdot \frac{dv(0)}{dt} = 0 = F_{MOTOR}(0) - F_{PESO}(0) - F_{ROZAM}(0)$$

$$0 = K_M \cdot GAS(0) - mg \cdot sen(a(0)) - K_R \cdot v^2(0)$$

$$0 = 256 \cdot 25 - 10000 \cdot sen(11) - 5 \cdot v^2(0)$$

$$v(0) = \sqrt{900} = 30m/s$$

$$F_{ROZAM}(0) = K_R \cdot v^2(0) = 4500N$$

$$F_{PESO}(0) = mg \cdot sen(11) = 1900N$$

$$F_{MOTOR}(0) = K_M \cdot 25 = 6400N$$

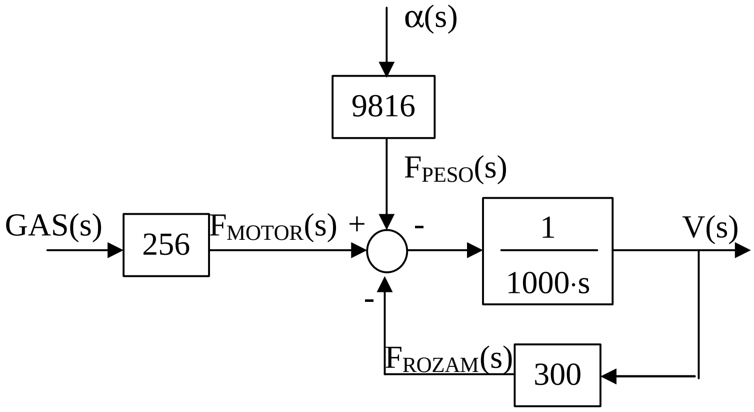
2.

$$m\cdot \dot{v}(t)=F_{MOTOR}(t)-F_{PESO}(t)-F_{ROZAM}(t)\mapsto 1000\cdot\Delta\dot{v}(t)=\Delta F_{MOTOR}(t)-\Delta F_{PESO}(t)-\Delta F_{ROZAM}(t)$$
$$F_{MOTOR}(t)=K_M\cdot GAS(t)\mapsto \Delta F_{MOTOR}(t)=256\cdot\Delta GAS(t)$$
$$F_{PESO}(t)=mg\cdot sen(a(t))\mapsto \Delta F_{PESO}(t)=mg\cdot cos(11)\cdot\Delta a(t)\mapsto \Delta F_{PESO}(t)=9816\cdot\Delta a(t)$$
$$F_{ROZAM}(t)=K_R\cdot v^2(t)\mapsto \Delta F_{ROZAM}(t)=K_R\cdot 2\cdot 30\cdot\Delta v(t)\mapsto \Delta F_{ROZAM}(t)=300\cdot\Delta v(t)$$

3.

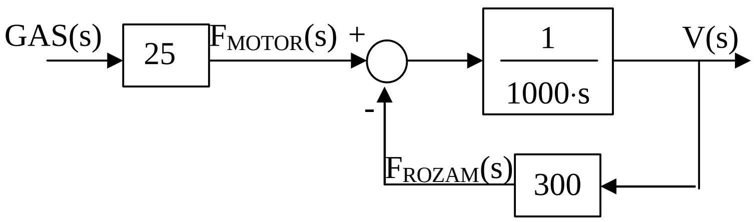
$$1000\cdot s\cdot V(s)=F_{MOTOR}(s)-F_{PESO}(s)-F_{ROZAM}(s)$$
$$F_{MOTOR}(s)=256\cdot GAS(s)$$
$$F_{PESO}(s)=9816\cdot a(s)$$
$$F_{ROZAM}(s)=300\cdot V(s)$$

4.

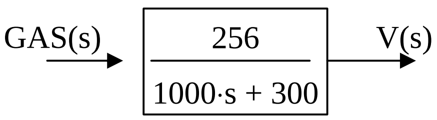


5.

Dado que la pendiente es constante, su incremento será cero y por tanto podemos eliminar esa entrada en el diagrama de bloques general. Queda:



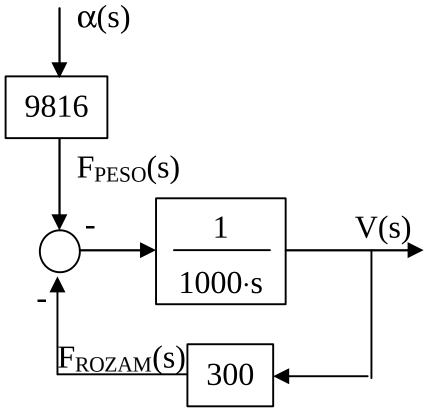
Fácilmente reducible a:

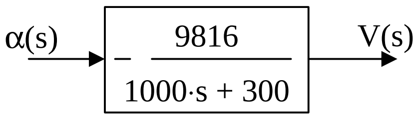


$$F_1(s)=\frac{V(s)}{GAS(s)}=\frac{256}{300+1000\cdot s}$$

6.

En este caso, la entrada que se anula es la correspondiente al acelerador. El diagrama y su correspondiente reducción se muestran seguidamente:





$$F_2(s) = \frac{V(s)}{a(s)} = -\frac{9816}{300 + 1000 \cdot s}$$

7.

El sistema que estamos considerando es de primer orden, por lo que presentará una respuesta a escalón como la mostrada en la figura. Dicho de otra forma, si la posición del acelerador cambia repentinamente, la velocidad aumentará de forma paulatina hasta llegar a un valor en régimen permanente que debe ser un 10% mayor que la velocidad inicial.

Velocidad inicial: 30m/s
Incremento del 10%: 3m/s
Movimiento del acelerador: x [mm] ⇒ escalón de valor x/s

Aplicando la propiedad de valor final de la transformada de Laplace:

$$3m/s = \lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{s\to 0}(s \cdot V(s)) = \lim_{s\to 0}\left(s \cdot \frac{x}{s} \cdot F_1(s)\right) = \lim_{s\to 0}\left(s \cdot \frac{x}{s} \cdot \frac{256}{300 + 1000s}\right) = \frac{256 \cdot x}{300}$$

$$x = \frac{300 \cdot 3}{256} = 3.5mm$$

8.

Velocidad inicial:	30m/s
Reducción del 5%:	-1.5m/s
Pendiente inicial:	11º
Incremento de pendiente:	4º = 0.07rad $\Rightarrow$ escalón de valor 0.07/s
Tiempo transcurrido:	x [sg]

Obtenemos la antitransformada de Laplace para la velocidad del vehículo ante entrada escalón

$$V(s) = \frac{0.07}{s} \cdot F_2(s) = \frac{0.07}{s} \cdot \frac{-9816}{300 + 1000 \cdot s} = \frac{-687.12}{s \cdot (300 + 1000s)}$$

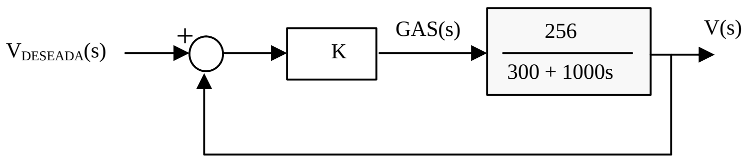
$$v(t) = L^{-1}(V(s)) = L^{-1}\left(\frac{A}{s} + \frac{B}{300 + 1000s}\right) = L^{-1}\left(\frac{-2.29}{s} + \frac{2290}{300 + 1000s}\right) = -2.29 + 2.29 \cdot e^{-0.3t}$$

$$v(x) = -1.5 = -2.29 + 2.29 \cdot e^{-0.3x}$$

$$-0.3x = ln\left(\frac{0.79}{2.29}\right) = -1.064$$

$$x = 3.55s$$

9.



Por simple reducción del diagrama se obtiene la función de transferencia pedida:

$$\frac{V(s)}{V_{DESEADA}(S)} = \frac{256K}{1000 \cdot s + 300 + 256K}$$

10.

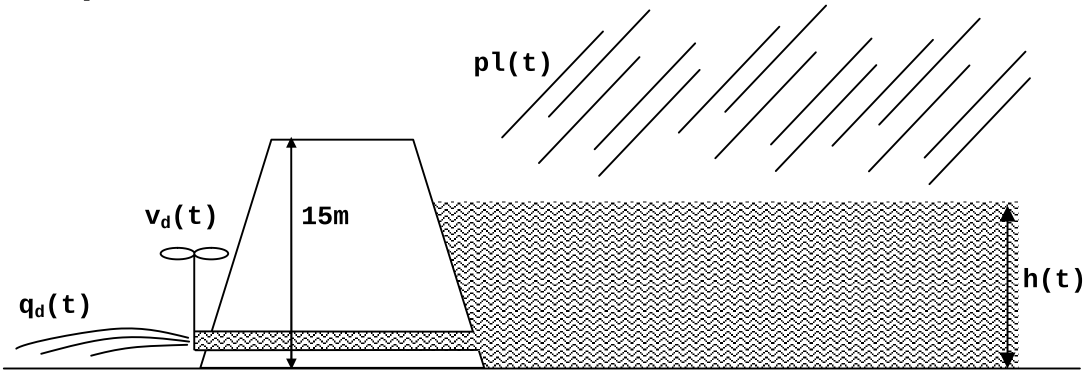
Debemos calcular la repuesta en régimen permanente ante entrada escalón de 10 unidades.

$$\lim_{t \to \infty} v(t) = \lim_{s \to 0}(s \cdot V(s)) = \lim_{s \to 0}\left(s \cdot \frac{10}{s} \cdot \frac{256K}{1000 \cdot s + 300 + 256K}\right) = \frac{2560K}{300 + 256K} < 10$$

Sólo se alcanzaría la velocidad deseada con un valor infinito de la constante K

PROBLEMA 7

La figura representa un dique de **15m** de altura pensado para evitar riadas en épocas lluviosas. Se considerarán como variables de entrada al sistema la intensidad de lluvia **pl(t)** y la apertura de la compuerta de desagüe **v_d(t);** y como variable de salida la altura de agua en el dique **h(t).** También se utilizarán como variables intermedias el caudal de lluvia **q_{pl}(t)** y el caudal de desagüe **q_d(t).**.



Ecuaciones físicas del sistema:

$$q_{pl}(t) = pl(t) \cdot A$$

$$q_d(t) = K \cdot \sqrt{h(t)} \cdot v_d(t)$$

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{q_{pl}(t) - q_d(t)}{A}$$

Valor de las constantes:

A = 40.000 m^2(área de la presa)
K = 28 $m^{1/2}/s$ (constante de vaciado)

Se pide:

1. Representar las ecuaciones del sistema en el dominio de Laplace, linealizadas sobre el punto de equilibrio correspondiente a una intensidad de lluvia **pl(0) = 5,2 l/m^2s** (1litro = $10^{-3}m^3$) y una apertura de la compuerta de desagüe **v_d(0) = 2,57m^2**.
2. Representar el diagrama de bloques del sistema completo.
3. Partiendo de la situación de equilibrio y sin variar la posición de la compuerta de desagüe, calcular la altura que alcanzará el agua en el dique si la intensidad de lluvia pasara a valer **5,7 l/m^2s**.
4. Partiendo de la situación de equilibrio y sin variar la posición de la compuerta, calcular el tiempo que tardaría el nivel de agua en sobrepasar el dique si la intensidad de lluvia pasara a valer **8 l/m^2s**.
5. Partiendo de la situación de equilibrio y suponiendo que la intensidad de lluvia no varía, calcular cuál sería la apertura de la compuerta necesaria para que la altura de agua en el dique bajara **1m** en **una hora**.

SOLUCIÓN

1. El nivel de agua en equilibrio se calcula a partir de las ecuaciones del sistema, haciendo dh(t)/dt = 0:

h(0) = 8,35m

Las ecuaciones linealizadas en torno a la posición de equilibrio y en forma incremental quedan:

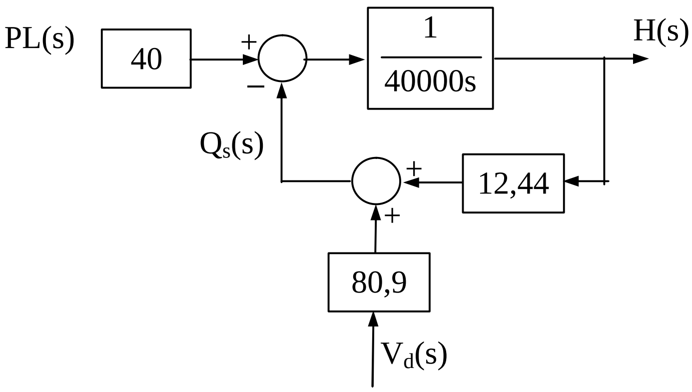
$$\begin{aligned}
&\Delta q_{pl}(t) = \Delta pl(t)\cdot A \\
&\Delta q_d(t) = \left(K\cdot\sqrt{h(0)}\right)\cdot\Delta v_d(t) + \left(\frac{K}{2\sqrt{h(0)}}\cdot v_d(0)\right)\cdot\Delta h(t) \\
&\Delta\frac{dh(t)}{dt} = \frac{\Delta q_{pl}(t)-\Delta q_d(t)}{A}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta q_{pl}(t) = 40\cdot\Delta pl(t) \\
&\Delta q_d(t) = 80{,}9\cdot\Delta v_d(t) + 12{,}44\cdot\Delta h(t) \\
&\Delta\frac{dh(t)}{dt} = \frac{\Delta q_{pl}(t)-\Delta q_d(t)}{40000}
\end{aligned}$$

Lo cual, representado en el dominio de Laplace resulta:

$$\begin{aligned}
&Q_{pl}(s) = 40\cdot PL(s) \\
&Q_d(s) = 80{,}9\cdot V_d(s) + 12{,}44\cdot H(s) \\
&s\cdot H(s) = \frac{Q_{pl}(s)-Q_d(s)}{40000}
\end{aligned}$$

2.



3. Se calcula la función de transferencia entre H(s) y PL(s) por simplificación de bloques, con $V_s(s)$=0:

$$H(s) = \frac{40}{40000s+12{,}44}\cdot PL(s)$$

Y se aplica un escalón de valor 5,7-5,2 = 0,5:

$$H(s) = \frac{40}{40000s+12{,}44}\cdot\frac{0{,}5}{s}$$

Para saber el valor que alcanza Δh(t) en régimen permanente se usa el teorema del valor final:

Por tanto, la altura final del depósito será:

$$lim_{t\to\infty}\Delta h(t) = lim_{s\to 0}\left(s\cdot H(s)\right) = 1{,}6m$$

$$h(\infty) = h(0) + \Delta h(t) = 9{,}96m$$

4. En este caso el valor del escalón a aplicar es 8-5,2 = 2,8

$$H(s) = \frac{40}{40000s + 12{,}44}\cdot\frac{2{,}8}{s}$$

Calculamos la antitransformada de Laplace mediante descomposición en fracciones simples:

$$H(s) = \frac{-360000}{40000s + 12{,}44} + \frac{9}{s} = \frac{-9}{s + 3{,}11\cdot 10^{-4}} + \frac{9}{s}$$

$$h(t) = 9\left(1 - e^{-3{,}11\cdot 10^{-4}t}\right)$$

Deseamos saber el tiempo en el que la altura se incrementa 15-8,35 = 6,65m:

$$6{,}65 = 9\left(1 - e^{-3{,}11\cdot 10^{-4}t}\right)$$

$$t = 4318s = 1h\ 11m\ 58s$$

5. Se calcula la función de transferencia entre H(s) y $V_s(s)$ por simplificación de bloques, con PL(s)=0:

$$H(s) = \frac{-80{,}9}{40000s + 12{,}44}\cdot V_d(s)$$

En este caso la incógnita es el valor del escalón a aplicar. Lo llamaremos X:

$$H(s) = \frac{-80{,}9}{40000s + 12{,}44}\cdot\frac{X}{s}$$

Al igual que antes, calculamos la antitransformada de Laplace mediante fracciones simples:

$$H(s) = X\cdot\left(\frac{260000}{40000s + 12{,}44} - \frac{6{,}5}{s}\right)$$

$$h(t) = X\cdot\left(e^{-3{,}11\cdot 10^{-4}t} - 1\right)\cdot 6{,}5$$

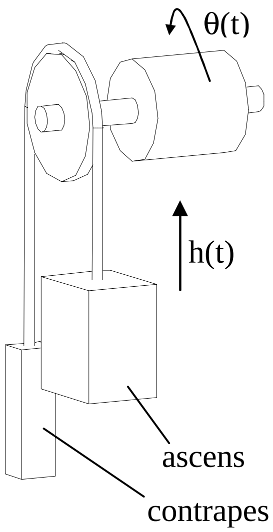
Hacemos t=3600s y h(t) = -1 y despejamos X:

$$1 = X\cdot\left(e^{-3{,}11\cdot 10^{-4}\cdot 3600} - 1\right)\cdot 6{,}5$$

$$X = 0{,}23m^2$$

Por tanto, la apertura pedida es 2,57+0,23 = 2,80m^2

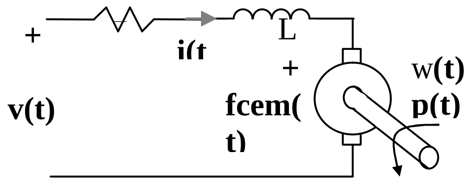
PROBLEMA 8



Un motor eléctrico de corriente continua se acopla, mediante una polea, a un ascensor. Se supondrá que la caja del ascensor y el contrapeso se encuentran equilibrados, de modo que no se considerarán sus pesos en las ecuaciones.

Las variables del sistema serán:

- $h(t)$: altura de la caja del ascensor
- $\theta(t)$: ángulo girado por el motor
- $\omega(t)$: velocidad de giro del motor
- $p(t)$: par proporcionado por el motor
- $v(t)$: tensión aplicada al motor
- $i(t)$: intensidad que circula por el devanado del motor
- fcem(t): fuerza contraelectromotriz inducida en el devanado



Las ecuaciones del motor son las siguientes:

- $v(t) = R \cdot i(t) + L \cdot di(t)/dt + fcem(t)$
- $fcem(t) = K_V \cdot \omega(t)$
- $p(t) = K_P \cdot i(t)$

El resto de ecuaciones necesarias se indican a continuación:

- $p(t) = J \cdot d\omega(t)/dt + B \cdot \omega(t)$
- $\omega(t) = d\theta(t)/dt$
- $h(t) = r \cdot \theta(t)$

Para las distintas constantes se tomarán los siguientes valores:

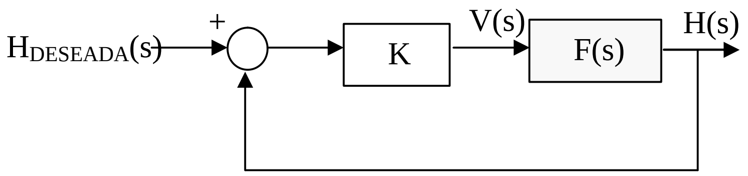
$R = 0{,}2\Omega$ (resistencia del devanado del motor)
$L = 0H$ (inductancia del devanado del motor) (se considera despreciable)
$K_P = 1{,}5N \cdot m/A$ (constante de par del motor)
$K_V = 0{,}2V \cdot s$ (constante de fuerza contraelectromotriz del motor)
$J = 0{,}25kg \cdot m^2$ (momento de inercia del conjunto)
$B = 1N \cdot s$ (rozamiento viscoso del conjunto)
$r = 0{,}25m$ (radio de la polea)

Primera parte

1. Dibujar el diagrama de bloques del sistema.
2. Reducir el diagrama de bloques para obtener la función de transferencia que relaciona la altura del ascensor con la tensión aplicada al motor: **F(s) = H(s)/V(s)**
3. Discutir la estabilidad de la función de transferencia obtenida. ¿Es lógico el resultado?

Segunda parte

Sobre el sistema anterior **F(s)** se añade una realimentación y un bloque multiplicador de valor **K**:



4. Obtener la f. de transferencia **G(s)** que relaciona H(s) y $H_{DESEADA}(s)$: **G(s) = H(s)/ $H_{DESEADA}$(s)**

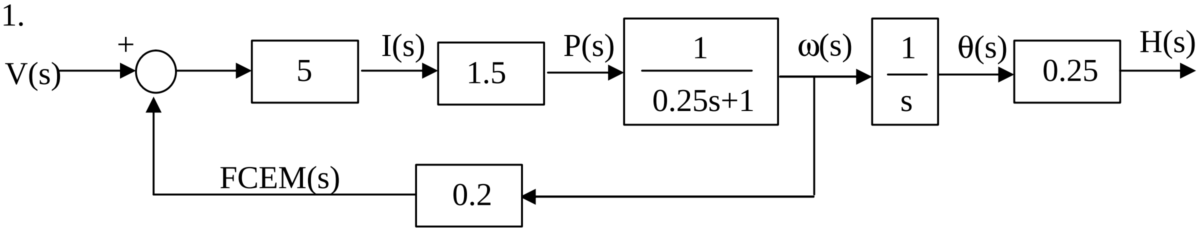
5. Discutir la estabilidad del sistema en función del valor de **K** según el criterio de Routh.

6. Supuesto un valor de **K=30**:

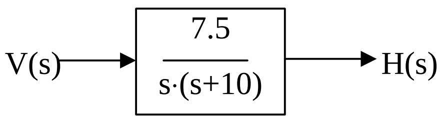
- **6.1.** Dibujar aproximadamente la respuesta del sistema a un escalón unitario.
- **6.2.** Obtener el valor de la ganancia en régimen permanente ante escalón unitario. ¿Qué sentido físico tiene?
- **6.3.** Obtener el valor de la sobreoscilación y del tiempo de pico de sobreoscilación.
- **6.4.** Obtener el valor del tiempo de establecimiento
- **6.5.** ¿Qué efecto tendría aumentar el valor de **K** sobre la sobreoscilación?

<u>SOLUCIÓN</u>

1.

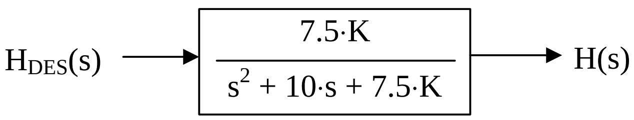


2.



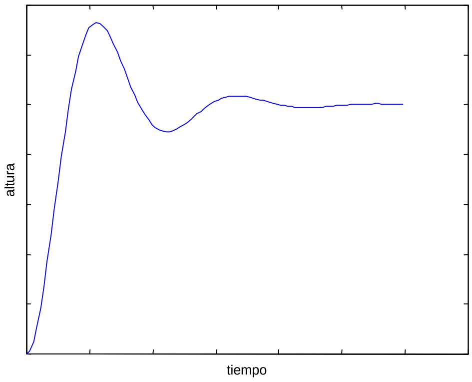
3. Sistema inestable por tener un polo en s=0. Es lógico que el sistema resulte inestable. Basta pensar en lo que sucede si se aplica una entrada tipo escalón: el motor se pondría a girar indefinidamente, con lo que la altura crecería sin parar.

4.



5. La condición de estabilidad es: $\boxed{K > 0}$
(para que los dos polos tengan parte real negativa)

6.1.



6.2.

$$Y(s) = G(s)\cdot\frac{1}{s} = \frac{225}{s^2 + 10\cdot s + 225}$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot G(s) = \lim_{s\to 0}\frac{225}{s^2 + 10\cdot s + 225} = 1$$

Luego la ganancia en régimen permanente es 1. Una ganancia unidad indica que, en régimen permanente, la altura del ascensor será igual a la altura deseada.

6.3.

$$M_p = e^{-z\frac{p}{\sqrt{1-z^2}}}.100\% = 33\%$$

$$t_p = \frac{p}{w_n\sqrt{1-z^2}} = 0.22s$$

6.4.

$$t_s = \frac{p}{zw_n} = 0.62s$$

6.5.

$$H_{DES}(s) \longrightarrow \boxed{\dfrac{7.5\cdot K}{s^2 + 10\cdot s + 7.5\cdot K}} \longrightarrow H(s)$$

$7.5\cdot K = \omega_n^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{(7.5\cdot K)}$

$10 = 2\xi\omega_n \quad \Rightarrow \quad \xi = 5/\sqrt{(7.5\cdot K)}$

Al aumentar K disminuye el coeficiente de amortiguamiento y la sobreoscilación amenta